Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

O aequivalenci šroubových pohybů a šroubových sil

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 3, 178--183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120907

$$S = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(\varphi_{n-1} + i)(\varphi_n - i)}{(\varphi_{n-1} - i)(\varphi_n + i)},$$

kterýžto součin se redukuje na $\frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i}$. Skutečně máme

$$S = \lim_{n=\infty} \left[\frac{(\varphi_1+i)(\varphi_2-i)}{(\varphi_1-i)(\varphi_2+i)} \cdot \frac{(\varphi_2+i)(\varphi_3-i)}{(\varphi_2-i)(\varphi_3+i)} \cdots \frac{(\varphi_{n-1}+i)(\varphi_n-i)}{(\varphi_{n-1}-i)(\varphi_n+i)}\right],$$

t. j.

$$S = \lim \left[\frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i} \, \frac{\varphi_n - i}{\varphi_n + i}\right] = \frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i} \lim \frac{\varphi_n - i}{\varphi_n + i},$$

a tedy vzhledem k supponované limitě $\lim \varphi_n = \infty$,

$$S = \frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i}.$$

O aequivalenci šroubových pohybův a šroubových sil.

Dle Ballovy „Theory of screws“ napsal A. Libický, professor v Roudnici.

(Dokončení.)

14. Přejdeme nyní k úloze nejvšeobecnější, totiž k vyhledání pohybu šroubového, aequivalentního dané soustavě pohybův (a_1, α_1), $(a_2, \alpha_2) \ldots (a_{n-1}, \alpha_{n-1})$, jichž osy jsou v prostoru jakkoli položeny.

Především jest patrno, že amplituda výsledného pohybu rovná se geometrickému součtu daných amplitud: šroub jeho ustanovíme, složíme-li nejprve pomocí cylindroidu (α_1, α_2) šroubové pohyby (a_1, α_1) a (a_2, α_2); jejich pohyb výsledný složíme s pohybem (a_3, α_3) a tak pokračujeme, až dospějeme k poslední složce (a_{n-1}, α_{n-1}).

V oddíle 9. odvodili jsme rovnici (17a), stanovící vztah mezi invarianty soustav pohybův, rovnomocných dvěma složkám a jejich výslednici; podobnou rovnici obdržíme i pak, když počet složek jest libovolně velký. Pro soustavu šroubových pohybův (a_1, α_1), $(a_2, \alpha_2) \ldots (a_n, \alpha_n)$, o které předpokládáme, že jest aequivalentní nulle, platí totiž rovnice (3); i bude, vynecháme-li společného činitele r:

$$a_1\,[\alpha_1\,\varrho] + a_2\,[\alpha_2\,\varrho] + \ldots + a_n[\alpha_n\,\varrho] = 0.$$

Splyne-li nyní libovolný dosud šroub ϱ postupně se šrouby $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, nabudeme z této rovnice soustavy rovnic:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,[\alpha_1\,\alpha_1] + a_2\,[\alpha_2\,\alpha_1] + \ldots + a_n\,[\alpha_n\,\alpha_1] &= 0, \\ a_1\,[\alpha_1\,\alpha_2] + a_2\,[\alpha_2\,\alpha_2] + \ldots + a_n\,[\alpha_n\,\alpha_2] &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\,[\alpha_1\,\alpha_n] + a_2\,[\alpha_2\,\alpha_n] + \ldots + a_n\,[\alpha_n\,\alpha_n] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Násobíme-li tyto rovnice po řadě jednou $a_1, a_2 \ldots a_n$, po druhé $a_1, a_2 \ldots -a_n$ a uvážíme-li, že $[\alpha_i\,\alpha_k] = [\alpha_k\,\alpha_i]$, $[\alpha_l\,\alpha_l] = 2p_{\alpha_l}$, obdržíme:

$$a_1^2 p_{\alpha_1} + a_2^2 p_{\alpha_2} + \ldots + a_n^2 p_{\alpha_n} + a_1\,a_2\,[\alpha_1\,\alpha_2] + \ldots$$
$$+ a_1\,a_n\,[\alpha_1\,\alpha_n] + a_2\,a_3\,[\alpha_2\,\alpha_3] + \ldots + a_{n-1}\,a_n[\alpha_{n-1}\,\alpha_n] = 0,$$
$$a_n^2\,p_{\alpha_n} = a_1^2\,p_{\alpha_1} + a_2^2\,p_{\alpha_2} + \ldots + a^2_{n-1}p_{\alpha_{n-1}} + a_1\,a_2\,[\alpha_1\,\alpha_2]$$
$$+ a_1\,a_3\,[\alpha_1\,\alpha_3] + \ldots + a_1\,a_{n-1}\,[\alpha_1\,\alpha_{n-1}] + a_2\,a_3\,[\alpha_2\,\alpha_3] + \ldots$$
$$+ a_{n-2}\,a_{n-1}\,[\alpha_{n-2}\,\alpha_{n-1}].$$

Poněvadž

$$J_{\alpha_l} = a_l\sqrt{p_{\alpha_l}}, \quad \cos\widehat{\alpha_i\alpha_k} = \frac{[\alpha_i\,\alpha_k]}{2\sqrt{p_{\alpha_i}p_{\alpha_k}}},$$

lze poslední rovnici též psáti ve tvaru:

$$\begin{aligned} J^2_{\alpha_n} = J^2_{\alpha_1} + J^2_{\alpha_2} + \ldots + J^2_{\alpha_{n-1}} + 2J_{\alpha_1}\,J_{\alpha_2}\cos\widehat{\alpha_1\alpha_2} \\ + 2J_{\alpha_1}\,J_{\alpha_3}\cos\widehat{\alpha_1\alpha_3} + \ldots + 2J_{\alpha_1}\,J_{\alpha_{n-1}}\cos\widehat{\alpha_1\alpha_{n-1}} + \ldots \\ + 2J_{n-2}\,J_{n-1}\cos\widehat{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}}. \end{aligned} \qquad (27)$$

Ve zvláštním případě může soustava šroubův $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ vyhovovati těmto podmínkám: α_2 jest přidružený k α_1, α_3 jest přidružený k α_1 i α_2, α_4 jest přidružený k α_1, α_2 i α_3 atd., α_{n-1} jest přidružený k $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$. Pro výsledný pohyb takové soustavy šroubův, kterou nazývá Ball *korreciprokální*, platí zjednodušená rovnice:

$$J^2_{\alpha n} = \sum_1^{n-1} J^2_{\alpha i}. \qquad (27a)$$

Z rovnice (3) plyne bezprostředně věta:

Máme-li soustavu n šroubových pohybů rovnomocných nulle, a je-li nějaký šroub přidružený k $n-1$ z těchto pohybů, jest přidružený též ku zbývajícímu n-tému pohybu.

Neboť jestliže:

$$[\alpha_1 \varrho] = 0, \quad [\alpha_2 \varrho] = 0, \ldots [\alpha_{n-1} \varrho] = 0,$$

přejde rovnice (3) ve

$$[\alpha_n \varrho] = 0,$$

což vyjadřuje, že šroub ϱ jest přidružený k α_n.

Zvláštním případem této věty jest:

Je-li n sil v rovnováze a protíná-li nějaká přímka směry $n-1$ sil, protíná též směr n-té síly.*)

15. Výsledkem eliminace aplitud a_1, $a_2 \ldots a_n$ ze soustavy stejnoměrných rovnic (26) jest rovnice:

$$\begin{vmatrix} [\alpha_1 \alpha_1] & [\alpha_2 \alpha_1] & \ldots & [\alpha_n \alpha_1] \\ [\alpha_1 \alpha_2] & [\alpha_2 \alpha_2] & \ldots & [\alpha_n \alpha_2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_1 \alpha_n] & [\alpha_2 \alpha_n] & \ldots & [\alpha_n \alpha_n] \end{vmatrix} = 0.$$

Souměrnému determinantu na levé straně této rovnice můžeme dáti jiný tvar, vyjádříme-li vzájemné momenty $[\alpha_i \alpha_k]$ Plückerovými souřadnicemi přímkovými. Značí-li x_1, y_1, z_1 a x_2, y_2, z_2 pravoúhlé souřadnice dvou bodů v prostoru, jest dle Plückera přímka těmi body procházející určena souřadnicemi λ, μ, ν, ξ, η, ζ, pro které platí známé rovnice:

$$\frac{\lambda}{x_1 - x_2} = \frac{\mu}{y_1 - y_2} = \frac{\nu}{z_1 - z_2} = \frac{\xi}{z_1 y_2 - y_1 z_2}$$
$$= \frac{\eta}{x_1 z_2 - z_1 x_2} = \frac{\zeta}{y_1 x_2 - x_1 y_2};$$

souřadnice ty vyhovují patrně stejnině:

*) Viz Somova: „Uvedení ve statiku i dynamiku", v německém překladě pag. 301. Podobnou úvahu, jakou nalézáme v kapitole IV. tohoto díla o rovnováze soustavy sil, provedl jsem tuto pro pohyby šroubové.

$$\lambda\xi + \mu\eta + \zeta\nu = 0.$$

První tři jsou úměrny směrným cosinům přímky, tudíž jest cosinus úhlu φ, který spolu uzavírají dvě přímky $(\lambda, \mu, \nu \ldots)$, $(\lambda', \mu', \nu' \ldots)$ úměrny trojčlenu

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'.$$

V témž poměru jest vzájemný moment těchto dvou přímek $d \sin\varphi$ s výrazem:

$$-(\lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta' + \xi\lambda' + \eta\mu' + \zeta\nu');\ ^{*})$$

jest tedy vzájemný moment šroubův α a β úměrný výrazu:

$$(p_\alpha + p_\beta)(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') + \lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\zeta' + \xi\lambda' + \eta\mu' + \zeta\nu'$$

čili:

$$\lambda(p_\beta \lambda' + \xi') + \mu(p_\beta \mu' + \eta') + \nu(p_\beta \nu' + \zeta')$$
$$+ (p_\alpha \lambda + \xi)\lambda' + (p_\alpha \mu + \eta)\mu' + (p_\alpha \nu + \zeta)\nu'.$$

Determinant zmíněný skládá se dle toho z prvkův, majících tvar součinu jistého koefficientu se šestičlenem, podobným tomu, který byl právě odvozen. Vyloučíme-li všechny koefficienty, zbývá determinant, jejž poznačíme Δ; soustavu n^2 prvků jemu příslušící můžeme si mysliti vyvozenou z prvkův obdélných soustav:

$$\begin{array}{l}
\lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_{\alpha_1}\lambda_1 + \xi_1, p_{\alpha_1}\mu_1 + \eta_1, p_{\alpha_1}\nu_1 + \zeta_1, \\
\lambda_2, \mu_2, \nu_2\ p_{\alpha_2}\lambda_2 + \xi_2, p_{\alpha_2}\mu_2 + \eta_2, p_{\alpha_2}\nu_2 + \zeta_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_n, \mu_n, \nu_n, p_{\alpha n}\lambda_n + \xi_n, p_{\alpha n}\mu_n + \eta_n, p_{\alpha n}\nu_n + \zeta_n;
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
p_{\alpha_1}\lambda_1 + \xi_1, p_{\alpha_1}\mu_1 + \eta_1, p_{\alpha_1}\nu_1 + \zeta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \\
p_{\alpha_2}\lambda_2 + \xi_2, p_{\alpha_2}\mu_2 + \eta_2, p_{\alpha_2}\nu_2 + \zeta_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{\alpha n}\lambda_n + \xi_n, p_{\alpha n}\mu_n + \eta_n, p_{\alpha n}\nu_n + \zeta_n, \lambda_n, \mu_n, \nu_n,
\end{array}$$

dle pravidla o násobení determinantův, totiž prvek úměrný k $[\alpha_i\ \alpha_k]$ z i-tého řádku první soustavy a z k-tého řádku druhé soustavy posloupným násobením prvkův a sečtením součinův.

---

*) Viz na př. Salmona-Fiedlera: „Analytische Geometrie des Raumes“, I. díl, 3. vyd., pag. 67.

Sluší nyní rozeznávati tyto případy: *)

Je-li $n < 6$, jest determinant Δ součtem ze $\binom{6}{n}$ součinův, které obdržíme, násobíme-li každý z determinantů n-tého stupně, jež lze utvořiti z řádků prvé obdélné soustavy, příslušným determinantem téhož stupně, utvořeným z řádků druhé soustavy.

Je-li $n = 6$, jest Δ součinem determinantův obou soustav.

Je-li $n > 6$, jest Δ identicky rovný nulle; tu není žádné podmínky pro vzájemné momenty $[\alpha_i \ \alpha_k]$.

Lze ostatně snadno dokázati, že každý z determinantů n-tého stupně ($n \leqq 6$), jež se mohou uvedeným způsobem utvořiti, sám o sobě se rovná nulle. Neboť nahradíme-li dané pohyby šroubové (a_1, α_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jejich součástkami, totiž rotacemi a_i kolem os A_i a translacemi $a_i p_{\alpha_i}$ ve směrech těchto os, dostaneme soustavu rotací a translací, která jest aequivalentní nulle. Přeložme pak všechny rotace a_i do počátku soustavy souřadnic O a sečtěme je geometricky; obdržíme tak uzavřený polygon, jehož promítnutím na osy souřadnicové X, Y, Z zjednáme si rovnice:

$$\sum_1^n \lambda_i a_i = 0,$$
$$\sum_1^n \mu_i a_i = 0,$$
$$\sum_1^n \nu_i a_i = 0.$$

Druhý polygon, též uzavřený, jest polygon translací; strany jeho tvoří jednak všechny translace $a_i p_{\alpha_i}$, jednak translace, vzniklé přeložením rotací a_i do bodu O. Průměty translace $a_i p_{\alpha_i}$ na osy jsou úměrny $\lambda_i a_i p_{\alpha_i}$, $\mu_i a_i p_{\alpha_i}$, $\nu_i a_i p_{\alpha_i}$ a průměty translace, aequivalentní dvojici rotační $(a_i, -a_i)$, jsou, jak netřeba šíře vykládati úměry: $\xi_i a_i$, $\eta_i a_i$, $\zeta_i a_i$. Promítneme-li polygon translací na X, Y, Z, obdržíme tedy další rovnice:

*) Viz na př. Baltzer-Pokorný „Základové mathematiky“, I. díl.

$$\sum_1^n (\lambda_i p_{\alpha_i} + \xi_i)\, a_i = 0,$$
$$\sum_1^n (\mu_i p_{\alpha_i} + \eta_i)\, a_i = 0,$$
$$\sum_1^n (\nu_i p_{\alpha_i} + \zeta_i)\, a_i = 0.$$

Ze šesti rovnic, takto odvozených, plyne:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots & \lambda_n \\ \mu_1, & \mu_2, & \dots & \mu_n \\ \nu_1, & \nu_2, & \dots & \nu_n \\ \lambda_1 p_{\alpha_1} + \xi_1, & \lambda_2 p_{\alpha_2} + \xi_2, & \dots & \lambda_n p_{\alpha_n} + \xi_n \\ \mu_1 p_{\alpha_1} + \eta_1, & \mu_2 p_{\alpha_2} + \eta_2, & \dots & \mu_n p_{\alpha_n} + \eta_n \\ \nu_1 p_{\alpha_1} + \zeta_1, & \nu_2 p_{\alpha_2} + \zeta_2, & \dots & \nu_n p_{\alpha_n} + \zeta_n \end{Vmatrix} = 0, \qquad (28)$$

t. j. každý ze $\binom{6}{n}$ determinantů n-tého stupně, který lze utvořiti z prvků těchto šesti řádkův, se rovná nulle.

Budiž Δ_{ik} podřízený determinant, náležející k prvku i-tého řádku a k-tého sloupce determinantu Δ; dle předešlého rovnají se všechny Δ_{ik} nulle, jestliže $n - 1 > 6$. Pro $n - 1 \leq 6$ nejsou obecně Δ_{ik} rovny nulle; tudíž určuje se soustavou rovnic (26) úměra:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = \Delta_{i1} : \Delta_{i2} : \Delta_{i3} : \dots : \Delta_{in}. \qquad (29)$$

Z toho jde, že jest vždy možno jediným způsobem určiti poměry amplitud sedmi pohybův, které jsou aequivalentní nulle a jimž příslušné šrouby jsou dány. Kdyby byl počet daných šroubů větší než sedm, byla by úloha ta neurčitou; kdyby byl počet ten menší než sedm, musily by dané šrouby vyhovovati jistým podmínkám.*)

I můžeme vysloviti důležitou větu:

Každý pohyb šroubový (sílu šroubovou) lze rozložiti v šest pohybů (sil) dle šesti daných šroubův.

Zvláštní případy, ve kterých $n = 2, 3, 4 \dots$, vyžadují podrobnějšího vyšetřování, jemuž hodlám věnovati některý příští článek.

*) Theory of Screws, pag. 28.