Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

Vyčíslení nekonečných součinův o racionálných členech pomocí funkce Γ

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 3, 161--178

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120903`

Vyčíslení nekonečných součinův o racionálných členech pomocí funkce Γ.

Napsal

Eduard Weyr.

Ve článku „*Stanovení součtův jistých nekonečných řad*“, v tomto Časopise r. XXI. str. 151, jsem ukázal — prováděje myšlénku panem *Appell-em* v Comptes Rendus, t. LXXXVI p. 953 vyslovenou — kterak lze pomocí funkce Ψ *Gauss-em* uvažované vyčísliti součet každé nekonečné řady, jejíž obecný člen jest racionalnou funkcí indexu, a kterak tento výraz pro součet v jistých případech se stává zcela elementarným. Naskytá se nyní přirozeně otázka po vyčíslení nekonečných součinův, jejichž obecný člen jest racionalnou funkcí indexu; i v té příčině na citovaném místě učiněna zmínka a to v ten smysl, že takové součiny lze vyjádřiti pomocí funkce Γ ve tvaru zakončeném. Provedení tohoto vyčíslení absolutně konvergujících nekonečných součinů jest cílem této úvahy, kterou zahajuji stručným odvozením hlavních vlastností funkce Γ, čili druhého Eulerova integralu, vycházeje z toho, co bylo pověděno v citovaném článku o funkci Ψ.

1. O funkci $\Psi(z)$ definované pro libovolné komplexní z rovnicí

$$\Psi(z) = \lim\left(\log n - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right),$$
$$\lim n = \infty,$$

z níž jsme v citovaném článku odvodili

$$\Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{1}{z+n} + \log\frac{n+1}{n}\right\}, \tag{1}$$

kde log značí přirozený realný logarithmus, jsme ukázali, že jest v celé rovině z jednoznačnou funkcí analytickou o polech $-1, -2, -3, \ldots$.

Stálá $-\Psi(o)$ sluje konstantou Euler-ovou neb Maschero-ni-ho, a jest tedy definována rovnicí

$$C = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right), \quad \lim n = \infty.$$

Značíce literou h celistvé kladné číslo větší než absolutní obnos ζ hodnoty z, máme (l. c.)

$$(2) \quad \sum_{n=h}^{\infty} \left| -\frac{1}{z+n} + \log \frac{n+1}{n} \right| < (\zeta + 1) \sum_{n=h}^{\infty} \frac{1}{n(n-\zeta)}$$
$$< (\zeta + 1) \sum_{n=h}^{\infty} \frac{1}{(n-\zeta)^2}.$$

Značí-li nyní k libovolné kladné celistvé číslo, a volíme-li $h > \zeta + k$, tedy $h - \zeta > k$, máme patrně

$$\sum_{n=h}^{\infty} \frac{1}{(n-\zeta)^2} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

z čehož vysvítá, že součet (2) a tedy také zbytek řady (1) lze volbou dosti velkého k, t. j. volbou dosti velkého h učiniti libovolně malým, nechť je ζ jakékoli; to ale znamená, že řada (1) jest v každém konečném oboru proměnné z stejnoměrně konvergentní. Lze tedy řadu (1) po členech integrovati, čímž

$$(3) \quad \int_0^z \Psi(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log n - \log(z+n) + z \log \frac{n+1}{n} \right\}.$$

První dva logarithmy na pravé straně závisí arci na integrační cestě, avšak výsledky, jichž různými cestami nabýti lze, se různí pouze o celistvé násobky hodnoty $2\pi i$, tak že, nechť je integrační cesta jakákoli, vždy obdržíme

$$(4) \quad e^{\int_0^z \Psi(z) dz} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{z+n}\, e^{z \log \frac{n+1}{n}} \right\}.$$

Výraz takto získaný označíme $\Gamma(z+1)$,*) tak že platí

*) Tutéž funkci značí *Gauss* $\Pi(z)$, tak že $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$. Označení *Legendre-ovo* Γ nyní převládá.

$$\Psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z+1)}{dz}.$$

Dříve než vytkneme analytickou povahu této funkce, připomeňme, že dle (4) máme

$$(5) \qquad \frac{1}{\Gamma(z+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z \log \frac{n+1}{n}} \right\},$$

t. j.

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \lim \left[(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right) \ldots \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z \log(n+1)} \right],$$

$$\lim n = \infty.$$

Píšeme-li součin na pravé straně ve tvaru

$$e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log(n+1)\right)} \cdot (1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)},$$

máme ihned pro reciprokou hodnotu funkce $\Gamma(z+1)$ tento výraz *Weierstrass-em* podaný:

$$(6) \qquad \frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}.$$

Funkce $\Gamma(z+1)$ definovaná výrazem (4) jest jednoznačnou analytickou funkcí proměnné z; a reciproká hodnota její pak jest celistvou (transcendentní) funkcí této proměnné, jelikož nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$$

při každém z jest absolutně konvergentním. Skutečně ukážeme, že položíme-li

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = 1 + v_n,$$

řada Σv_n absolutně konverguje. K tomu cíli pišme

$$1+v_n=\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}+\frac{1}{1\,.\,2}\frac{z^2}{n^2}-\dots\right),$$

$$v_n=-\left(1-\frac{1}{2\,!}\right)\frac{z^2}{n^2}+\left(\frac{1}{2\,!}-\frac{1}{3\,!}\right)\frac{z^3}{n^3}-\left(\frac{1}{3\,!}-\frac{1}{4\,!}\right)\frac{z^4}{n^4}+\dots,$$

čili

$$v_n=-\frac{1}{2\,!}\frac{z^2}{n^2}+\frac{2}{3\,!}\frac{z^3}{n^3}-\frac{3}{4\,!}\frac{z^4}{n^4}+\dots,$$

z čehož soudíme, že

$$|\,v_n\,|<\frac{\zeta^2}{n^2}+\frac{1}{2\,!}\frac{\zeta^3}{n^3}+\frac{1}{3\,!}\frac{\zeta^4}{n^4}+\dots$$

Vypíšeme-li tyto nerovnosti pro $n=1, 2, \dots$ a sečteme-li je, obdržíme na pravo, sčítajíce dle sloupců, konvergentní řadu (l. c. pag. 163) a

$$\Sigma\,|\,v_n\,|<\zeta^2\,\Sigma\frac{1}{n^2}+\frac{\zeta^3}{2\,!}\Sigma\frac{1}{n^3}+\frac{\zeta^4}{3\,!}\Sigma\frac{1}{n^4}+\dots,$$

čímž absolutní konvergence řady Σv_n a tedy též součinu (6) dokázána.

Zároveň jest patrno, že celistvá funkce $1:\Gamma(z+1)$ vymizí pouze pro $z=-1, -2, -3, \dots$, a že tedy celistvá funkce $1:\Gamma(z)$ vymizí jen při $z=0, -1, -2, \dots$, a to v stupni prvním. Funkce $\Gamma(z)$ se tudíž stává nekonečnou v bodech $0, -1, -2, \dots$, jednoduchých polech jejich; mimo to podotkněme, že $\Gamma(z)$ pro žádné z nevymizí, ještο reciproká hodnota $1:\Gamma(z)$ jest vždy konečnou, a konečně, že z (6) pro $z=0$ vychází:

$$\Gamma(1)=1.$$

2. Píšeme-li v rovnici (5) $z-1$ místo z, obdržíme

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z+n-1}{n}\,e^{-z\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+1}{n}}\right\},$$

a dělíme-li tuto rovnici rovnicí (5),

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z+n-1}{z+n}\,\frac{n+1}{n}\right\},$$

t. j.

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}=\lim_{n=\infty}\left(z\frac{n+1}{z+n}\right)=z,$$

čímž odvozena první vlastnost funkce Γ, vyjádřená rovnicí

$$(7)\qquad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

Poznamenejme, že z ní ihned plyne pro kladné celistvé k

$$\Gamma(k)=(k-1)\Gamma(k-1)=(k-1)(k-2)\Gamma(k-2)=\ldots$$
$$=(k-1)\ldots 2\,\Gamma(1),$$

t. j.

$$\Gamma(k)=1.2.3\ldots(k-1),$$

a obdobně

$$(7a)\qquad \Gamma(z+k)=(z+k-1)(z+k-2)(z+1)z\Gamma(z).$$

Z této formule patrno, že z hodnot, jež funkce $\Gamma(z)$ nabývá pro všecka z, jejichž realná část jest obsažena mezi 0 a 1, lze ihned odvoditi hodnotu $\Gamma(z)$ pro jakékoli z.

Z první rovnice tohoto článku soudíme, že

$$\Gamma(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{z+n-1}\frac{n}{n+1}e^{z\log\frac{n+1}{n}}\right\},$$

a tedy

$$\Gamma(1-z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{n-z}\frac{n}{n+1}e^{-z\log\frac{n+1}{n}}.\frac{n+1}{n}\right\},$$

z čehož násobením

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\frac{n}{n+z-1}\frac{n}{n-z}\right\}.$$

Vypíšeme-li prvních n členů tohoto součinu, ihned shledáme, že jejich součin jest

$$\frac{1}{n+1}\frac{1}{z}\frac{1}{1-z^2}\frac{2^2}{2^2-z^2}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-z^2}\frac{n^2}{n-z},$$

tak že

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\lim\frac{n^2}{(n+1)(n-z)}$$
$$.\lim\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-z^2}\frac{2^2}{2^2-z^2}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2-z^2}\right],\quad n=\infty,$$

kde první limita na pravo má patrně hodnotu 1.

Avšak známa jest formule

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right)\dots,$$

pročež

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{8}$$

čímž vyjádřena druhá vlastnost funkce Γ.

Třetí rovnice, již *Eulerem* odvozená, vychází z předchozí kladouce při celistvém kladném k

$$\mathrm{N} = \Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)\dots\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right),$$

což lze též psáti

$$\mathrm{N} = \Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{k-2}{k}\right)\dots\Gamma\left(\frac{1}{k}\right),$$

obdržíme násobením a vzhledem k rovnici (8)

$$\mathrm{N}^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{k}}\,\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{k}}\dots\frac{\pi}{\sin\frac{(k-1)\pi}{k}}.$$

Avšak z goniometrie jest známo,*) že

---

*) Uvedené formule se snadno takto doděláme. Označme literou S součin

$$\sin\frac{\pi}{k}\sin\frac{2\pi}{k}\dots\sin\frac{(k-1)\pi}{k},$$

v němž k značí celistvé kladné číslo, a položme $e^{\frac{\pi i}{k}} = q$, čímž

$$e^{\frac{\nu\pi i}{k}} = q^{\nu}, \quad \sin\frac{\nu\pi i}{k} = \frac{q^{\nu} - q^{-\nu}}{2i},$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2^{k-1}\,i^{k-1}}\,\frac{q^2-1}{q}\,\frac{q^4-1}{q^2}\dots\frac{q^{2n-2}-1}{q^{n-1}}.$$

Ješto

$$qq^2\dots q^{k-1} = q^{\frac{k(k-1)}{2}} = e^{\frac{1}{2}(k-1)\pi i}, \quad i^{k-1} = e^{\frac{\pi i}{2}(k-1)},$$

máme

$$\sin\frac{\pi}{k}\,.\,\sin\frac{2\pi}{k}\ldots\sin\frac{(k-1)\pi}{k}=\frac{k}{2^{k-1}},$$

čímž

$$N^2=(2\pi)^{k-1}k^{-1}$$

a tedy, ješto

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right),\quad \Gamma\left(\frac{2}{k}\right),\ldots$$

jsou vzhledem k (6) patrně kladné hodnoty, máme pro N kladnou hodnotu $(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}$, čímž nalezena Eulerova rovnice

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right)=(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

3. Abychom odvodili čtvrtou vlastnost funkce Γ, z níž poslední rovnice vychází jako specialný případ, označme podíl z $\Gamma(x)$ a součinu

---

$$S=\frac{(-1)^{k-1}(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2k-2})}{z^{k-i}e^{(k-1)\pi i}}.$$

Avšak rovnice

$$z^k-1=0$$

má kořeny

$$1,\ e^{\frac{2\pi i}{k}},\ e^{2\cdot\frac{2\pi i}{k}},\ldots e^{(k-1)\frac{2\pi i}{k}},$$

t. j.

$$1,\ q^2,\ q^4,\ldots,\ q^{2k-2},$$

čímž pro každé z platí

$$z^k-1=(z-1)(z-q^2)(z-q^4)\ldots(z-q^{2k-2}),$$

a tedy i

$$z^{k-1}+z^{k-2}+\ldots+z+1=(z-q^2)(z-q^4)\ldots(z-q^{2k-2}).$$

Odtud soudíme, kladouce za z jednotku, že

$$S=\frac{(-1)^{k-1}k}{2^{k-1}e^{(k-1)\pi i}}=\frac{k}{2^{k-1}}.$$

$$\Gamma\left(\frac{z}{k}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{k}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+k-1}{k}\right)$$

literou Q (z); vyjádříme-li všecky tyto funkce Γ pomocí vzorce (6) čili

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{C(z-1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z-1}{n}\right)e^{-\frac{z-1}{n}}\right\},$$

snadno obdržíme

$$Q(z)=e^{-\frac{(k-1)C}{2}}\frac{\prod\limits_{v=0}^{k-1}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z+v-k+kn}{kn}e^{-\frac{x+v-k}{kn}}\right\}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z+n-1}{n}e^{-\frac{z-1}{n}}\right\}}.$$

Zavedeme-li do každého z k součinů v čitateli se objevujících na místo čísla n číslo p_v rovnicí

$$p_v=kn+v-k+1,$$

tu nabývá p_v hodnot $v+1$, $v+1+k$, $v+1+2k$, ... shodných s $v+1$ dle modulu k, a můžeme psáti

$$Q(z)=e^{-\frac{(k-1)C}{2}}\frac{\prod\limits_{v=0}^{k-1}\prod\limits_{(p_v)}\left\{\frac{z+p_v-1}{p_v+k-v-1}e^{-\frac{z+v-k}{p_v+k-v-1}}\right\}}{\prod\limits_{v=0}^{k-1}\prod\limits_{(p_v)}\left\{\frac{z+p_v-1}{p_v}e^{-\frac{x-1}{p^v}}\right\}},$$

aneb

$$Q(z)=e^{-\frac{(k-1)C}{2}}\prod_{v=0}^{k-1}\prod_{(p_v)}\left\{\frac{p_v}{p_v+k-v-1}e^{\frac{z-1}{p_v}-\frac{z+v-k}{p_v+k-v-1}}\right\}.$$

Logarithmickým derivováním obdržíme

$$\frac{d\log Q(z)}{dz}=\sum_{v=0}^{k-1}\sum_{(p_v)}\left\{\frac{1}{p_v}-\frac{1}{p_v+k-v-1}\right\},$$

z čehož patrno, že tato derivace jest stálou; označíce ji a, máme

$$\log Q(z)=az+a_1$$

a

$$Q(z) = e^{az+a_1},$$

čímž nabýváme formule

$$(10)\quad \Gamma(z) = e^{az+a_1}\,\Gamma\left(\frac{z}{k}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{k}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+k-1}{k}\right),$$

aneb, píšeme-li kz místo z,

$$\Gamma(kz) = e^{akz+a_1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right).$$

Abychom ustanovili stálé a, a_1, uvažme především, že vzhledem k (7) platí

$$\frac{\Gamma(kz)}{\Gamma(z)} = \frac{kz\Gamma(kz)}{kz\Gamma(z)} = \frac{1}{k}\,\frac{\Gamma(kz+1)}{\Gamma(z+1)},$$

a že tedy

$$\lim \frac{\Gamma(kz)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{k} \quad \text{pro} \quad \lim z = 0.$$

Položíme-li tedy v rovnici (10) $z = 0$, obdržíme vzhledem k (9)

$$\frac{1}{k} = e^{a_1}(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}k^{-\frac{1}{2}},$$

z čehož

$$e^{a_1} = (2\pi)^{-\frac{k-1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}.$$

Nahradíme-li v (10) z hodnotou $z+\frac{1}{k}$, obdržíme

$$\Gamma(kz+1) = e^{akz+a_1+a}\,\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{k}\right)\ldots$$
$$\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right)\Gamma(z+1),$$

a dělíme-li tuto rovnici rovnicí (10):

$$kz = ze^a,$$

z čehož

$$e^a = k, \quad a = \log k.$$

Rovnice (10) zní nyní

$$
(11)\qquad \begin{aligned} &\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right)\\ &=(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}k^{\frac{1}{2}-kz}\,\Gamma(kz), \end{aligned}
$$

což jest formule *Gauss*-ova, vyjadřující čtvrtou vlastnost funkce Γ.

4. Přistupme nyní k nekonečným součinům, jejichž obecný člen jest racionalnou funkcí indexu.

Součiny takové Πu_n se často vyskytují; k nim náleží na př. známý součin vyčíslený *Wallis*-ovou formulí

$$
\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\right\}.
$$

Každý nekonečný součin absolutně konvergující, jehož obecný člen jest racionalnou funkcí indexu, lze vyjádřiti pomocí funkce Γ ve tvaru zakončeném, a v mnohých případech lze na základě vlastností funkce Γ právě odvozených tento výraz vyjádřiti i funkcemi elementarnými.

Jde především o stanovení obecného tvaru zmíněných součinův. Aby nekonečný součin

$$
\prod_{n=1}^{\infty} u_n
$$

byl absolutně konvergentním, jest nutné a stačí, aby, položíme-li

$$
u_n = 1 + v_n,
$$

řada Σv_n absolutně konvergovala. Jde tedy o vyšetření, kdy řada, jejíž obecný člen jest racionalnou funkcí indexu, konverguje absolutně.

Ješto při konvergentní řadě nutně

$$
\lim v_n = 0 \quad \text{pro} \quad \lim n = \infty,
$$

musí v_n býti ryze lomenou funkcí indexu n:

$$
v_n=\frac{cn^{s-r}+c_1 n^{s-r-1}+\ldots+c_{s-r}}{bn^s+b_1 n^{s-1}+\ldots+b_s}, \qquad r \geqq 1;
$$

zde b a c jsou různy od nully. Podíl dvou posloupných členův

$$
\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\gamma n^{2s-r}+\gamma_1 n^{2s-r-1}+\ldots+\gamma_{2s-r}}{\beta n^{2s-r}+\beta_1 n^{2s-r-1}+\ldots+\beta_{2s-r}},
$$

kde β a γ jsou stejné, lze pro dosti velká čísla n patrně rozvinouti v řadu pokračující dle klesajících mocností indexu n

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{\gamma_1 - \beta_1}{\beta} \frac{1}{n} + \ldots,$$

a rozhodují tedy o konvergenci řady Σv_n pravidla, která *Weierstrass* v pojednání „Über die Theorie der analytischen Facultäten", Crelle t. LI jakožto zobecnění známého *Gauss-ova* kriteria, Werke t. III, byl odvodil. Dle těchto pravidel konverguje řada Σv_n jen tenkráte, a pak absolutně, je-li realná část hodnoty $\frac{\gamma_1 - \beta_1}{\beta}$ menší než -1. Avšak snadno nalezneme, že

$$\frac{\gamma_1 - \beta_1}{\beta} = -r;$$

jest tedy k absolutní konvergenci řady Σv_n nutné a stačí, aby $r > 1$ t. j. aby stupeň čitatele racionalné funkce v_n byl alespoň o dvě jednotky menší než stupeň jmenovatele.

Téhož výsledku lze přímo dojíti touto úvahou:

Píšeme-li v_n ve tvaru

$$v_n = \frac{1}{n^r} \frac{c + c_1 n^{-1} + \ldots + c_{s-r} n^{-(s-r)}}{b + b_1 n^{-1} + \ldots + b_s n^{-s}},$$

čili stručněji

$$v_n = \frac{1}{n^r} \frac{c + \varepsilon}{b + \varepsilon'},$$

tu patrně pro dosti velké n lze ε i ε' učiniti číselně libovolně malými, a lze tudíž udati dvě realná kladná čísla λ a λ' taková, že pro dosti velké n platí

$$\lambda > |c| + |\varepsilon|, \quad \lambda' < |b| - |\varepsilon'|;$$

ale pak

$$|v_n| < \frac{\lambda}{\lambda'} \frac{1}{n^r},$$

$$\Sigma |v_n| < \frac{\lambda}{\lambda'} \Sigma \frac{1}{n^r}.$$

Z toho patrno, že při $r > 1$ řada Σv_n konverguje absolutně.

Obdobně, zvolíce realné kladné hodnoty μ a μ' tak, aby alespoň pro dosti velké n platilo

$$\mu < |c| - |\varepsilon|, \quad \mu' > |b| + |\varepsilon|,$$

máme

$$\Sigma\, |v_n| > \frac{\mu}{\mu'} \Sigma \frac{1}{n^r},$$

z čehož patrno, že při $r = 1$ řada $\Sigma\, |v_n|$ diverguje. Ale i řada Σv_n diverguje, jakož snadno shledáme z rozdílu

$$v_n - \frac{c}{b}\frac{1}{n} = \frac{A_n}{n^2},$$

kde A_n jest číselně pod určitým číslem A pro dosti velké n *); nyní

$$\left|\Sigma v_n - \frac{c}{b}\Sigma\frac{1}{n}\right| < A\Sigma\frac{1}{n^2},$$

z čehož patrno, že Σv_n číselně roste nad každou mez. Tím však hořejší výsledek úplně odvozen.

5. Konverguje-li nekonečný součin

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

jehož obecný člen u_n jest racionalnou funkcí indexu n, tu musí, vzhledem k $\lim u_n = 1$ pro $\lim n = \infty$, především čitatel této funkce býti téhož stupně jako jmenovatel, tedy

$$u_n = \frac{an^s + a_1 n^{s-1} + \ldots + a_s}{bn^s + b_1 n^{s-1} + \ldots + b_s},$$

a mimo to musí koefficienty a, b býti stejné. Je-li daný součin absolutně konvergentním, tu musí vzhledem k

$$v_n = u_n - 1 = \frac{(a_1 - b_1)\, n^{s-1} + \ldots + a_s - b_s}{bn^s + \ldots + b_s}$$

dle předešlého článku platiti

$$a_1 - b_1 = 0,$$

a to také stačí, aby součin P byl absolutně konvergentním, protože pak řada Σv_n jest absolutně konvergentní.

*) Srov. cit. článek v tomto Časopise, XXI. str. 172.

Tím stanoven obecný tvar nekonečných součinův absolutně konvergujících, jejichž obecný člen jest racionalnou funkcí indexu; jsou to součiny

$$(12)\qquad P=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\alpha_1)(n-\alpha_2)\dots(n-\alpha_s)}{(n-\beta_1)(n-\beta_2)\dots(n-\beta_s)},$$

při nichž platí

$$(13)\qquad \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_s.$$

Arci předpokládáme, že žádný kořen α ani β není kladným celistvým číslem.

6. Pomocí formule (6), čili

$$\Gamma(z+1)=e^{-Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{n+z}e^{\frac{z}{n}}\right\},$$

vyjádříme ihned absolutně konvergující součin

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\alpha_1)\dots(n-\alpha_s)}{(n-\beta_1)\dots(n-\beta_s)}$$

snadno funkcí Γ. Píšeme-li totiž P ve tvaru

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n-\alpha_1}{n}\dots\frac{n-\alpha_s}{n}\cdot\frac{n}{n-\beta_1}\dots\frac{n}{n-\beta_s}\right\},$$

čili, vzhledem k

$$\Sigma\alpha-\Sigma\beta=0,$$

ve tvaru

$$P=e^{C(\Sigma\beta-\Sigma\alpha)}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n-\alpha_1}{n}e^{\frac{\alpha_1}{n}}\dots\frac{n-\alpha_s}{n}e^{\frac{\alpha_s}{n}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{n}{n-\beta_1}e^{-\frac{\beta_1}{n}}\dots\frac{n}{n-\beta_s}e^{-\frac{\beta_s}{n}}\right)\right\},$$

máme, rozložíce v jednotlivé absolutně konvergující součiny,

$$P=\frac{\Gamma(1-\beta_1)\dots\Gamma(1-\beta_s)}{\Gamma(1-\alpha_1),\dots\Gamma(1-\alpha_s)},$$

čímž vytčený výsledek získán.

7. Přihlédneme-li k odvozeným vlastnostem funkce Γ vyjádřeným formulemi, v nichž k značí kladné celistvé číslo,

$$\Gamma(z+k) = z(z+1)(z+2)\dots(z+k-1)\,\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)\dots\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right) = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} k^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right) = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} k^{\frac{1}{2}-kz}\,\Gamma(kz),$$

tu je zjevno, že v mnohých případech lze součin P vyjádřiti výrazem jednodušším, mnohdy zcela elementarným. Poukážeme k některým takovým případům.

Liší-li se kořeny α od kořenů β o čísla celistvá, t. j. platí-li

$$\beta_\nu = \alpha_\nu + k_\nu, \qquad \Sigma k_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, 3, \dots s),$$

kde k_ν značí čísla celistvá, kladná neb záporná, lze součin P patrně vyčísliti. Na př. máme

$$\mathrm{P} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\alpha_1)(n-\alpha_2)(n-\alpha_3)}{(n+2k-\alpha_1)(n-k-\alpha_2)(n-k-\alpha_3)}$$
$$= \frac{\Gamma(1-\alpha_1+2k)\,\Gamma(1-\alpha_2-k)\,\Gamma(1-\alpha_3-k)}{\Gamma(1-\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_2)\,\Gamma(1-\alpha_3)}.$$

Je-li k číslem celistvým, lze výraz ten ihned vyčísliti, na př. při kladném celistvém k máme

$$\frac{\Gamma(1-\alpha_1+2k)}{\Gamma(1-\alpha_1)} = (1-\alpha_1)(1-\alpha_1+1)(1-\alpha_1+2)\dots(1-\alpha_1+2k-1),$$

$$\frac{\Gamma(1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2-k)} = (1-\alpha_2-k)(1-\alpha_2-k+1)\dots(1-\alpha_2-k+k-1),$$

$$\frac{\Gamma(1-\alpha_3)}{\Gamma(1-\alpha_3-k)} = (1-\alpha_3-k)(1-\alpha_3-k+1)\dots(1-\alpha_3-k+k-1),$$

a tedy

$$\mathrm{P} = \frac{(1-\alpha_1)(2-\alpha_1)\dots(2k-\alpha_1)}{\alpha_2(\alpha_2+1)(\alpha_2+2)\dots(\alpha_2+k-1)\,.\,\alpha_3(\alpha_3+1)(\alpha_3+2)\dots(\alpha_3+k-1)}$$

Shodují-li se některé z kořenův α až na celé s hodnotami

$$\frac{1}{k},\quad \frac{2}{k},\ldots,\frac{k-1}{k},$$

kde k je nějaké kladné číslo celistvé, jsou-li ostatní kořeny α čísly celistvými, arci zápornými, a platí-li obdobně o kořenech β, že se některé z nich shodují až na celé se zlomky

$$\frac{1}{l},\quad \frac{2}{l},\quad \ldots,\quad \frac{l-1}{l},$$

kde l je též kladné číslo celistvé, a že ostatní jsou záporná čísla celistvá, tu lze součin P též vyčísliti; arci tu musí k a l býti současně sudé neb liché, jak toho výminka $\Sigma\alpha = \Sigma\beta$ patrně vymáhá. A obecněji se podaří vyčíslení součinu P, lze-li jak kořeny α tak kořeny β rozděliti na obdobné skupiny a na skupinu čísel celistvých, arci záporných. Na př. při

$$s = 4,\quad \alpha_1 = \frac{4}{3},\quad \alpha_2 = -\frac{1}{3},\quad \alpha_3 = -\frac{1}{2},\quad \alpha_4 = \frac{3}{2},$$

jsou tyto kořeny resp. shodny s $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$,

a
$$\beta_1 = \frac{1}{5},\quad \beta_2 = \frac{7}{5},$$
$$\beta_3 = -\frac{2}{5},\quad \beta_4 = \frac{4}{5},$$

jsou resp. shodny se zlomky

$$\frac{1}{5},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{4}{5};$$

lze tedy nekonečný součin

$$\mathrm{P} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n-\frac{4}{3}\right)\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}{\left(n-\frac{1}{5}\right)\left(n-\frac{7}{5}\right)\left(n+\frac{2}{5}\right)\left(n-\frac{4}{5}\right)}$$

vyčísliti. Ještě nalézáme:

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{7}{5}\right)\Gamma\left(1+\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{5}\right)$$
$$=\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\frac{\Gamma\left(2-\frac{7}{5}\right)}{1-\frac{7}{5}}\cdot\frac{2}{5}\,\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$=-\frac{5}{2}\frac{2}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$=-\frac{4\pi^2}{\sqrt{5}},$$

a

$$\Gamma\left(1-\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(2-\frac{4}{3}\right)}{1-\frac{4}{3}}\,\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(2-\frac{3}{2}\right)}{1-\frac{3}{2}}$$
$$=\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2\pi^2}{\sqrt{3}},$$

máme výsledek

$$\mathrm{P}=-\frac{2}{5}\sqrt{15}.$$

Jakožto poslední příklad stůjž zde nekonečný součin

$$\mathrm{P}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)+1+i}{n(n+1)+1-i},\quad i=\sqrt{-1},$$

jehož vyčíslení podal pan *B. Bečka* na základě geometrické úvahy v Časopise pro pěstování mathem. a fysiky, V. str. 37.

Zde

$$s=2,\quad \alpha_1=-i,\quad \alpha_2=i-1,\quad \beta_1=i,\quad \beta_2=-i-1,$$

a tedy

$$\mathrm{P}=\frac{\Gamma(1-i)\,\Gamma(2+i)}{\Gamma(1+i)\,\Gamma(2-i)}=\frac{(1+i)\,\Gamma(1-i)\,\Gamma(1+i)}{(1-i)\,\Gamma(1+i)\,\Gamma(1-i)}=i.$$

Citovanou úvahu lze ostatně snadno zobecniti a tak vystihnouti elementarný ráz vyčísleného součinu. Je-li totiž $\varphi(n)$ funkce vyhovující podmínkám

$$0 < \varphi(1) < \varphi(2) < \ldots, \quad \lim_{n=\infty} \varphi(n) = \infty,$$

a klademe-li dle citované úvahy

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \varphi(n),$$

máme při $n > 1$

$$\alpha_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{1 + \varphi_n \varphi_{n-1}},$$

a tedy

$$\sum_1^\infty \alpha_n = \alpha_1 + \sum_{n=2}^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{1 + \varphi_n \varphi_{n-1}} = \frac{\pi}{2},$$

píšíce φ_n místo $\varphi(n)$. Avšak při kladném x platí

$$\log(x + iy) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

z čehož

$$2i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \log \frac{x + iy}{x - iy},$$

a tedy

$$2i \frac{\pi}{2} = \log \frac{1 + i\varphi_1}{1 - i\varphi_1} + \sum_{n=2}^\infty \log \frac{1 + \varphi_n\varphi_{n-1} + i(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{1 + \varphi_n\varphi_{n-1} - i(\varphi_n - \varphi_{n-1})}$$

čili

$$-1 = \frac{1 + i\varphi_1}{1 - i\varphi_1} \prod_{n=2}^\infty \frac{1 + \varphi_n\varphi_{n-1} + i(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{1 + \varphi_n\varphi_{n-1} - i(\varphi_n - \varphi_{n-1})}.$$

Pro $\varphi(n) = n$ plyne z této formule specialný výsledek citovaný, totiž

$$-1 = \frac{1+i}{1-i} \prod_{n=2}^\infty \frac{1 + n(n-1) + i}{1 + n(n-1) - i}$$

$$= \frac{1+i}{1-i} \prod_{n=1}^\infty \frac{1 + n(n+1) + i}{1 + n(n+1) - i} = \frac{1+i}{1-i} \mathrm{P},$$

z čehož

$$\mathrm{P} = -\frac{1-i}{1+i} = i.$$

Okolnost, že funkce $\varphi(n)$ do velké míry jest libovolna, poukazuje k tomu, že získaný součin lze zcela elementarně vyčísliti; a skutečně lze jak čitatele tak jmenovatele rozložiti na dva linearné faktory a součin psáti

$$S = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(\varphi_{n-1} + i)(\varphi_n - i)}{(\varphi_{n-1} - i)(\varphi_n + i)},$$

kterýžto součin se redukuje na $\frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i}$. Skutečně máme

$$S = \lim_{n=\infty} \left[\frac{(\varphi_1+i)(\varphi_2-i)}{(\varphi_1-i)(\varphi_2+i)} \cdot \frac{(\varphi_2+i)(\varphi_3-i)}{(\varphi_2-i)(\varphi_3+i)} \cdots \frac{(\varphi_{n-1}+i)(\varphi_n-i)}{(\varphi_{n-1}-i)(\varphi_n+i)}\right],$$

t. j.

$$S = \lim \left[\frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i} \frac{\varphi_n - i}{\varphi_n + i}\right] = \frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i} \lim \frac{\varphi_n - i}{\varphi_n + i},$$

a tedy vzhledem k supponované limitě $\lim \varphi_n = \infty$,

$$S = \frac{\varphi_1 + i}{\varphi_1 - i}.$$

O aequivalenci šroubových pohybův a šroubových sil.

Dle Ballovy „Theory of screws“ napsal A. **Libický**, professor v Roudnici.

(Dokončení.)

14. Přejdeme nyní k úloze nejvšeobecnější, totiž k vyhledání pohybu šroubového, aequivalentního dané soustavě pohybův (a_1, α_1), $(a_2, \alpha_2) \ldots (a_{n-1}, \alpha_{n-1})$, jichž osy jsou v prostoru jakkoli položeny.

Především jest patrno, že amplituda výsledného pohybu rovná se geometrickému součtu daných amplitud: šroub jeho ustanovíme, složíme-li nejprve pomocí cylindroidu (α_1, α_2) šroubové pohyby (a_1, α_1) a (a_2, α_2); jejich pohyb výsledný složíme s pohybem (a_3, α_3) a tak pokračujeme, až dospějeme k poslední složce (a_{n-1}, α_{n-1}).

V oddíle 9. odvodili jsme rovnici (17a), stanovící vztah mezi invarianty soustav pohybův, rovnomocných dvěma složkám a jejich výslednici; podobnou rovnici obdržíme i pak, když počet složek jest libovolně velký. Pro soustavu šroubových pohybův (a_1, α_1), $(a_2, \alpha_2) \ldots (a_n, \alpha_n)$, o které předpokládáme, že