Vilém Jung

Příspěvek ku theorii ploch rotačních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 216--222

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120893

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + c, \\ \eta &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + c_1. \end{aligned} \tag{20}$$

V případu, kdy v (19) zvolíme dolní znamení, máme formule

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi + c, \\ \eta &= x \sin \varphi - y \cos \varphi + c_1. \end{aligned}$$

Učinivše $\varphi = \pi - \alpha$, máme

$$\begin{aligned} \xi &= - x \cos \alpha + y \sin \alpha + c, \\ \eta &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + c_1. \end{aligned} \tag{21}$$

Formule (20) jsou transformačními formulemi ze souřadnic pravoúhlých k novým, též pravoúhlým osám; formule (21) nabývají téhož tvaru, píšeme-li $-\xi$ místo ξ, a *tudíž jest systém bodů ξ, η vždy shodným se systémem bodů x, y*, čímž naše tvrzení dokázáno.

Obdobné úvahy bychom mohli provésti vzhledem k libovolným plochám a vzhledem k prostoru; nechtěje však příliš rozšiřovati objem tohoto článku, zůstavuji je době pozdější.

Příspěvek ku theorii ploch rotačních.

Zaslal

Vilém Jung v Pardubicích.

§. 1. V následujícím chci odvoditi, kdy znamená rovnice

$$(a_1x + a_2y + a_3z + a_4)\frac{\partial z}{\partial x} + (b_1x + b_2y + b_3z + b_4)\frac{\partial z}{\partial y} = c_1x + c_2y + c_3z + c_4 \tag{1}$$

differencialnou rovnici plochy rotační.

Rovnice plochy rotační má všeobecně tvar

$$\Phi\,[\delta_1x + \delta_2y + \delta_3z,\ (x - l_1)^2 + (y - l_2)^2 + (z - l_3)^2], \tag{2}$$

při čemž značí symbol Φ libovolnou funkci; o geometrickém významu veličin δ_1, δ_2, δ_3, l_1, l_2, l_3 netřeba se šířiti; jestiť každému, v tomto oboru pracujícímu, znám!

Abych řešil rovnici (1), utvořím si dle známé zásady srovnalost

$$\frac{dx}{a_1x + a_2y + a_3z + a_4} = \frac{dy}{b_1x + b_2y + b_3z + b_4} =$$

$$\frac{dz}{c_1x + c_2y + c_3z + c_4} = dt, \qquad (3)$$

kterouž napíšu ve formě tří rovnic:

$$\left.\begin{aligned} dx &= (a_1x + a_2y + a_3z + a_4)\,dt \\ dy &= (b_1x + b_2y + b_3z + b_4)\,dt \\ dz &= (c_1x + c_2y + c_3z + c_4)\,dt \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Jsou-li $F_1(x, y, z) = C_1$, $F_2(x, y, z) = C_2$ dva integraly, vyhovující soustavě (3), bude míti integral rovnice (1) tvar

$$\Phi(F_1, F_2) = 0. \qquad (5)$$

Jest tedy naší úlohou vyšetřiti podmínky, panující mezi součiniteli a, b, c, za kterých nabude integral

$$F_1 = C_1 \text{ tvaru } \delta_1x + \delta_2y + \delta_3z = C_1 \qquad (6)$$

a integral

$$F_2 = C_2 \text{ tvaru } (x - l_1)^2 + (y - l_2)^2 + (z - l_3)^2 = C_2. \qquad (7)$$

Abychom odvodili, kdy má soustava (3) integral formy (6), násobme rovnice soustavy (4) posloupně neurčitými koëfficienty δ_1, δ_2, δ_3 a sečtěme takto vzniklé výrazy, takže

$$\delta_1dx + \delta_2dy + \delta_3dz = dt\,\{(\delta_1a_1 + \delta_2b_1 + \delta_3c_1)\,x + (\delta_1a_2 + \delta_2b_2 + \delta_3c_2)\,y + (\delta_1a_3 + \delta_2b_3 + \delta_3c_3)\,z + \delta_1a_4 + \delta_2b_4 + \delta_3c_4\}. \quad (8)$$

Aby diff. rovnice (8) podala integral formy (6), musí její pravá strana pro jakékoliv x, y, z, dt zmizeti, takže musí platiti:

$$\left.\begin{aligned} a_1\delta_1 + b_1\delta_2 + c_1\delta_3 &= 0 \\ a_2\delta_1 + b_2\delta_2 + c_2\delta_3 &= 0 \\ a_3\delta_1 + b_3\delta_2 + c_3\delta_3 &= 0 \\ a_4\delta_1 + b_4\delta_2 + c_4\delta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9).$$

Z čehož dvojnásobnou elliminací veličin λ vyplývá dvé podmínek

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (10), \qquad \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Abychom dále odvodili, kdy má soustava (3) integral formy (7), násobme rovnice soustavy (4) posloupně hodnotami $(x - l_1)$, $(y - l_2)$, $(z - l_3)$ a sečtěme takto vzniklé výrazy, načež máme:

$$(x - l_1)\,dx + (y - l_1)\,dy + (z - l_3)\,dz = dt\,\{a_1x^2 + b_2y^2 + c_3z^2 + (a_2 + b_1)\,xy + (b_3 + c_2)\,yz + (c_1 + a_3)\,zx + (a_4 - l_1\,a_1 - l_2\,b_1 - l_3\,c_1)\,x + (b_4 - l_1\,a_2 - l_2\,b_2 - l_3\,c_2)\,y + (c_4 - l_1\,a_3 - l_2\,b_3 - l_3c_3)\,z - (l_1a_4 + l_2b_4 + l_3c_4)\} \qquad (12)$$

Aby diff. rovnice (12) podala integral formy (7), musí její pravá strana zmizeti:

t. j. $a_1 = b_2 = c_3 = 0,\ b_1 = -a_2,\ c_1 = -a_3,\ c_2 = -b_3$ (13)

$$\left.\begin{aligned} a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3 - d_4 &= 0 \\ a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3 - b_4 &= 0 \\ a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3 - c_4 &= 0 \\ a_4 l_1 + b_4 l_2 + c_4 l_3 + 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (14),$$

z čehož-li vyloučíme l_1, l_2, l_3, plyne

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & -a_4 \\ a_2, & b_2, & c_2, & -b_4 \\ a_3, & b_3, & c_3, & -c_4 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

Za podmínek (13) vyhoví se podmínkám (10) a (15) zároveň, neboť se oba determinanty promění v symmetralné čili protiměrné s nullovou příčkou. Totiž

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & -a_2, & -a_3 \\ a_2, & 0, & -b_3 \\ a_3, & b_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

jakož i

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & -a_4 \\ a_2, & b_2, & c_2, & -b_4 \\ a_3, & b_3, & c_3, & -c_4 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & -a_2, & -a_3, & -a_4 \\ a_2, & 0, & -b_3, & -b_4 \\ a_3, & b_3, & 0, & -c_4 \\ a_4, & b_4, & c_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Soustava (9) se promění v

$$\left.\begin{aligned} -a_2\delta_2 - a_3\delta_3 &= 0 \\ a_2\delta_1 - b_3\delta_3 &= 0 \\ a_3\delta_1 + b_3\delta_2 &= 0 \\ a_4\delta_1 + b_4\delta_2 + c_4\delta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

a soustava (14) v

$$\left.\begin{aligned} -a_2 l_2 - a_3 l_3 &= a_4 \\ a_2 l_1 - b_3 l_3 &= b_4 \\ a_3 l_1 + b_3 l_2 &= c_4 \\ a_4 l_1 + b_4 l_2 + c_4 l_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

a podmínka (11) přejde v

$$\begin{vmatrix} 0, & -a_2, & -a_3 \\ a_2, & 0, & -b_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Znamená tedy rovnice

$$(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4)\frac{\partial z}{\partial x} + (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4$$

differencialnou rovnici plochy rotační, platí-li

$$a_1 = b_2 = c_3 = 0,\ b_1 = -a_2,\ c_2 = -b_3,\ c_1 = -a_3,$$

jakož i

$$\begin{vmatrix} 0, & -a_2, & -a_3 \\ a_2, & 0, & -b_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 2. Nám jest i možno přímo udati rovnice osy plochy rotační, známe-li diff. rovnici této plochy.

Znamenají-li totiž α_1, α_2, α_3 úhly, jež tvoří rotační osa se souřadnými osami X, Y, Z, plyne z geometrického významu veličin δ_1, δ_2, δ_3 srovnalost:

$$\frac{cos\alpha_1}{\delta_1} = \frac{cos\alpha_2}{\delta_2} = \frac{cos\alpha_3}{\delta_3}. \qquad (19)$$

Poměry veličin δ_1, δ_2, δ_3 možno ze soustavy rovnic (16) vypočítati.

Veličiny pak l_1, l_2, l_3 vyhovují rovnicím osy rotační, neboť jsou souřadnicemi středů obalených ploch kulových. Udělíme-li jedné z nich určitou hodnotu, jsou ostatní dvě určitě stanoveny pomocí soustavy (17).

Rovnice osy rotační budou pak všeobecně

$$\frac{x - l_1}{\delta_1} = \frac{y - l_2}{\delta_2} = \frac{z - l_3}{\delta_3}. \qquad (20)$$

Abychom dospěli co možná nejkratčeji k rovnicím oné osy, rozeznávejme tré případů:

1. Veškeré δ jsou od nully různé t. j. $\delta_1 \lesseqgtr 0$, $\delta_2 \lesseqgtr 0$, $\delta_3 \gtreqless 0$; osa rotační není ku žádné z os souřadných kolmá čili ku žádné z rovin souřadných rovnoběžná.

Položme v tomto případě některou z veličin l rovno nulle, třeba $l_1 = 0$, pak znamenají l_2, l_3 souřadnici y-ovou a z-ovou třetí stopy rotační osy (jejího proniku s rovinou Y, Z). Pak

$$l_2 = \frac{c_4}{b_3},\quad l_3 = -\frac{b_4}{b_3},\quad \frac{\delta_2}{\delta_1} = -\frac{a_3}{b_3},\quad \frac{\delta_3}{\delta_1} = \frac{a_2}{b_3}.$$

Rovnice osy rotační pak budou

$$\frac{x}{b_3} = \frac{y - \frac{c_4}{b_3}}{-a_3} = \frac{z + \frac{b_4}{b_3}}{a_2}. \tag{21}$$

V této soustavě se nevyskytuje koëfficient a_4, což by mohlo zavdati příčinu k důmince, že soustava (21) není správnou. Považíme-li však, že jest a_4 dle (18) odvislé od a_2, a_3, b_3, b_4, c_4 (platí tu $a_3 b_4 - a_2 c_4 = b_3 a_4$), uznáme úplně správnost její.

2. Některá z veličin δ zmizí, pak jest osa rotační rovnoběžná s některou z rovin souřadných čili kolmá k některé z os souřadných. Dejme tomu, že $\delta_1 = 0$ (t. j. $cos\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; osa rotační jest $\perp$ k X aneb $\|$ s rovinou YZ).

Pak musí nutně dle (16) $b_3 = 0$, z (18) pak vyplývá

$$a_2 c_4 = a_3 b_4$$

čili

$$\frac{c_4}{a_3} = \frac{b_4}{a_2} \text{ aneb } \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_4}{c_4}.$$

Ze (17) se podává $l_1 = \frac{b_4}{a_2} = \frac{c_4}{a_3}$. Jest tedy l_1 samo sebou určité a osa rot. se nalézá v rovině, jež má rovnici

$$x = \frac{b_4}{a_2} = \frac{c_4}{a_3}.$$

Na to položme $l_2 = 0$, pak jest

$$l_3 = -\frac{a_4}{a_3}, \quad \frac{\delta_3}{\delta_2} = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{b_4}{c_4}.$$

Jest pak

$$\frac{y}{a_3} = \frac{z + \frac{a_4}{a_3}}{-a_2} \text{ aneb } \frac{y}{c_4} = \frac{z + \frac{a_4}{a_3}}{-b_4}$$

rovnicí průmětu osy rotační do roviny YZ. Obě tyto rovnice podávají totéž, jakž ani jinak býti nemůže.

3. Zmizí-li dvě z veličin δ, jest osa rovnoběžná s jednou osou souřadnou a kolmá na jednu z rovin souřadných.

Je-li na př. $\delta_1 = \delta_2 = 0$, jest $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_3 = 0$. Rotační osa jest rovnoběžná s osou Z čili kolmá na XY.

Tu musí dle (16) $b_3 = a_3 = 0$, ale i dle (18) $c_4 = 0$, načež dle (17) $l_2 = -\frac{a_4}{a_2}$, $l_1 = \frac{b_4}{a_2}$; jsou tedy l_1 a l_2 samy sebou určité a osa rotační je pronikem rovin, jež mají rovnice

$$x = \frac{b_4}{a_2}, \quad y = -\frac{a_4}{a_2}.$$

Dále patrno, že tu $l_3 = \frac{0}{0}$, což jest úplně na místě a znamená, že souřadnice z-ová osy rotační jest neurčitá, t. j. že jest osa rotační kolmá k rovině XY.

§. 3. *Poznámka.*

1. Rozvineme-li differencialnou rovnici plochy rotační

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}, & \cos\alpha, & x - x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y}, & \cos\beta, & y - y_1 \\ -1, & \cos\gamma, & z - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

kterouž poprvé prof. dr. *G. Blažek* v tomto časopise *R II* pag. 172 odvodil, shledáme, že se tu potvrdí souvislosti svrchu dokázané.

Platí tu, jak se každý snadno přesvědčí:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\{z\cos\beta - y\cos\gamma + y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta\}$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\{x\cos\gamma - z\cos\alpha + z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma\}$$
$$= y\cos\alpha - x\cos\beta + x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha.$$

Dle našeho označení platí:

$$a_1 = 0,\ a_2 = -\cos\gamma,\ a_3 = \cos\beta,\ a_4 = y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta$$
$$b_1 = \cos\gamma,\ b_2 = 0,\ b_3 = -\cos\alpha,\ b_4 = z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma$$
$$c_1 = -\cos\beta,\ c_2 = \cos\alpha,\ c_3 = 0,\ c_4 = x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha.$$

A jest tu skutečně $a_1 = b_2 = c_3 = 0$

$$b_1 = -a_2,\ c_2 = -b_3,\ c_1 = -a_3,$$

jakož i

$$\begin{vmatrix} 0, & -a_2, & -a_3 \\ a_2, & 0, & -b_3 \\ a_4, & b_4, & c_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & \cos\gamma, & -\cos\beta \\ -\cos\gamma, & 0, & \cos\alpha \\ y_1\cos\gamma - z_1\cos\beta, & z_1\cos\alpha - x_1\cos\gamma, & x_1\cos\beta - y_1\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0, & \cos\gamma, & -\cos\beta \\ -\cos\gamma, & 0, & \cos\alpha \\ -z_1\cos\beta, & z_1\cos\alpha, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-z_1 \begin{vmatrix} 0, & \cos\gamma, & -\cos\beta \\ -\cos\gamma, & 0, & \cos\alpha \\ \cos\beta, & -\cos\alpha, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Třetí determinant v tomto pořadí obdržíme z druhého, přičteme-li v tomto ke třetí řádce x_1 násobnou prvou a y_1 násobnou druhou řádku.

2. V *R. I* tohoto časopisu pag. 207—213 řešil příležitostně dr. *Ed. Weyr* rovnici

$$(a_1x + a_2y + a_3z + a_4)\frac{\partial z}{\partial x} + (b_1x + b_2y + b_3z + b_4)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= c_1x + c_2y + c_3z + c_4 \qquad (1)$$

velmi elegantním spůsobem.

Převedlť vše v podstatě na řešení kubické rovnice:

$$\begin{vmatrix} a_1 - n, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2 - n, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 - n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} -$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_3, & a_3 \\ c_1, & a_1 \end{vmatrix} \right\} n + [a_1 + b_2 + c_3]\, n^2 - n^3 = 0$$

ohledně n.

Nebude nezajímavo ukázati, jaké kořeny má tato rovnice v případě, když značí (1) diff. rovnici plochy rotační.

Každý snadno přehlédne, že se v tomto případě změní ona rovnice v

$$\{ a_2^2 + b_3^2 + a_3^2 \}\, n + n^3 = 0,$$

čemuž vyhoví

$$n_1 = 0, \quad \begin{matrix} n_2 \\ n_3 \end{matrix} = \pm i \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + b_3^2}.$$

Myslím, že i tento příspěvek jest dobrým příkladem na upotřebení determinantů!