Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 143--160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120876

Přeneseme-li od vrcholu c ve smyslu kladném oblouk $\widehat{cm} = \widehat{ab} = 2\gamma$ a rozdělímeli oblouk $\widehat{ma} = 2(\gamma - \beta)$ na 3 stejné díly, leží na konci první třetiny od a vrchol a_{I}, jímž ostatních pět vrcholů b_{I}, c_{I}, a_{II}, b_{II}, c_{II} jest úplně určeno. V příkladě dříve již voleném bylo by

$$x_{\mathrm{I}} = -13^\circ 20', \quad y_{\mathrm{I}} = 18^\circ 40', \quad z_{\mathrm{I}} = -5^\circ 20';$$
$$x_{\mathrm{II}} = 166^\circ 40', \quad y_{\mathrm{II}} = 198^\circ 40', \quad z_{\mathrm{II}} = 174^\circ 40'.$$

Úlohy.

Řešení úloh z ročníku XXIII.

Úloha 42.

Dokázati, že čtverec součtu n čtverců možná na n způsobů vyjádřiti součtem n čtverců.

Řešení. (Zaslal pan *Josef Hajíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Budiž

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2,$$
$$S_k = S - a_k^2;$$

potom jest

$$S = S_1 + a_1^2 = S_2 + a_2^2 = \ldots = S_k^2 + a_k^2 = \ldots = S_n^2 + a_n^2, \qquad (1)$$

čímž rozveden součet S na n binomů.

Dle toho obdržíme

$$S^2 = (S_k + a_k^2)^2 = (S_k - a_k^2)^2 + 4a_k^2 S_k. \qquad (2)$$

Výraz $4a_k^2 S_k$ jest součtem $(n - 1)$ čtverce, tudíž dle rovnice (2) rozvedeno S^2 na součet n čtverců. Jelikož lze klásti

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

můžeme S^2 na n způsobů rozložiti v součet n čtverců. Ku př.:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)^2 = 5^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2$$
$$= 8^2 + 16^2 + 23^2 + 24^2 + 40^2 = 6^2 + 12^2 + 24^2 + 30^2 + 37^2$$
$$= 4^2 + 12^2 + 16^2 + 20^2 + 47^2 = 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 53^2.$$

Úloha 43.

Dokázati, že

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2+c_k^2+d_k^2)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

Řešení. (Zaslal pan *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Abychom dokázali, že

$$P=(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2)=A^2+B^2+C^2+D^2,$$

pišme součin P takto:

$$P=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)+(c_1^2+d_1^2)(a_2^2+b_2^2)$$
$$+(a_1^2+b_1^2)(c_2^2+d_2^2)+(c_1^2+d_1^2)(c_2^2+d_2^2).$$

Rozvedeme-li jednotlivé součiny dle vzorce

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2)=mp+nq)^2+(mq-np)^2,$$

obdržíme

$$P=(a_1a_2+b_1b_2)^2+(c_1c_2+d_1d_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$
$$+(c_1d_2-c_2d_1)^2+(a_1c_2-a_2c_1)^2+(b_1d_2-b_2d_1)^2$$
$$+(a_1d_2-a_2d_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2,$$

odtud pak po snadné úpravě

$$P=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1+c_1d_2-c_2d_1)^2$$
$$+(a_1c_2-a_2c_1-b_1d_2+b_2d_1)^2+(a_1d_2-a_2d_1+b_1c_2-b_2b_1)^2.$$

Tím věta předložená dokázána pro $n=2$. Užijeme-li rovnice poslední postupně při třech neb více činitelích, jeví se věta dokázanou též pro libovolnou celistvou a kladnou hodnotu n. Ku př.

$$(1^2+2^2+3^2+4^2)(2^2+3^2+4^2+5^2)(3^2+4^2+5^2+6^2)$$
$$=(2^2+4^2+40^2)(3^2+4^2+5^2+6^2)$$
$$=126^2+136^2+182^2+268^2.$$

Úloha 44.

Dokázati, že

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^n=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2.$$

Řešení. (Zaslal pan *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Úloha tato jest patrně jen zvláštním případem úlohy předešlé pro

$$a_k = a, \quad b_k = b, \quad c_k = c, \quad d_k = d.$$

Větu jí vyjádřenou možno též takto vyvoditi. Jestiť

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - d^2) + (2ad)^2 + (2bd)^2 + (2cd)^2,$$

tedy

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2,$$

pročež dle úlohy 43.

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2$$

a tak postupně dále, až dospějeme ku

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^n = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Řešení úloh z ročníku předešlého zaslali dodatečně:

p. *Jan Kroupa*, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 35, 36, 37, 38, 47, 53, 54, 55, 57, 59, 60.

p. *Frant. Kroutil*, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí, úl. 37, 39, 41, 57, 58, 60.

p. *Vincenc Kroušil*, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 50.

p. *Tobiáš Kudela*, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 35, 36, 37, 38, 47, 52, 53, 54, 55, 59, 60.

p. *R. Milota*, stud. V. tř. g. v Písku, úl. 36, 50, 53, 55, 60.

p. *Antonín Sedláček*, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 42.

slč. *Marie Šmelíková*, chov. II. ročn. učit. ústavu v Olomouci, úl. 48, 49, 50, 55.

p. *Miloslav Valouch*, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 55.

p. *Ant. Vyhlídal*, stud. VI. tř. g. v Přerově, úl. 37, 38, 39, 40, 41, 45, 46.

Řešení úloh.

Uloha 1.

Řešiti rovnici

$$\log 5^{2\sqrt[3]{x}} - \log 5^{3\sqrt[6]{x}} = 2 - \log 4.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jan Hejtmánek*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze).

Přejdeme-li od logarithmů k číslům, obdržíme rovnici

$$2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} - 2 = 0,$$

ze které ustanovíme

$$\sqrt[6]{x_1} = 2, \qquad \sqrt[6]{x_2} = -\frac{1}{2}$$

a tedy

$$x_1 = 64, \qquad x_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6.$$

Úloha 2.

Řešiti soustavu rovnic

$$4 \,.\, 3^{x+1} - 5 \,.\, 2^{y+3} = 164$$
$$5 \,.\, 3^{2x-3} + 4 \,.\, 2^{2y-1} = 167\,.$$

Řešení (Zaslal p. *Fr. Bílovský*, stud. VIII. tř. g. v Brně).

Položíme-li

$$3^x = u, \qquad 2^y = v,$$

nabudou rovnice dané tvaru

$$3u - 10v = 41, \quad 5u^2 + 54v^2 = 4509.$$

Z rovnic těch vypočítáme

$$u_1 = 27, \qquad u_2 = -13{\cdot}527$$
$$v_1 = 4, \qquad v_2 = -8{\cdot}1582$$

a odtud

$$x_1 = 3, \qquad y_1 = 2;$$

hodnoty x_2, y_2 jsou pomyslné.

Úloha 3.

Při kterých celistvých hodnotách x, y jest

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b}\,?$$

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Ottis*, stud. VII. tř. g. v Plzni). Zbavíme-li danou rovnici zlomků, obdržíme

$$b^2x + a^2y = 0,$$

tudíž

$$x = \alpha a^2, \qquad y = -\alpha b^2.$$

Ku př.

$$a = 11, \qquad b = 7, \qquad \alpha = 5$$

$$\frac{605}{11} + \frac{-245}{7} = \frac{605 - 245}{11 + 7} = 20.$$

Úloha 4.

Do koncertu prodáno 475 vstupenek za 424 zl. Sedadlo I. třídy stálo 1.60 zl., sedadlo II. třídy 1.10 zl. a místo k stání 50 kr. Kolik bylo kterých vstupenek, prodáno-li sedadel jen o málo více než míst k stání?

Řešení. (Zaslal p. *Josef Jeřábek*, stud. VI. tř. realky v Ječné ulici v Praze).

Daná úloha vyžaduje, aby se čísly celými a kladnými řešila soustava rovnic

$$x + y + z = 475$$
$$16x + 11y + 5z = 4240.$$

Vyloučíce z obdržíme rovnici

$$11x + 6y = 1865;$$

která řešena methodou Eulerovou poskytuje hodnoty

$$x = 6u + 1, \qquad y = 309 - 11u;$$

k nim náleží

$$z = 165 + 5u.$$

Dle podmínky v úloze má býti z co možno velké, ale při tom

$$x + y > z.$$

Tím nalezneme $u = 14$ a tedy

$$x = 85, \qquad y = 155, \qquad z = 235;$$

sedadel I. třídy prodáno 85, II. třídy 155 a míst k stání 235.

Úloha 5.

Najíti dvě celá čísla, jichž průměr arithmetický jest o n větší než geometrický.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Hýbl,* právník v Praze).

Jsou-li x, y hledaná čísla, plyne z úlohy rovnice

$$\frac{x+y}{2}-n=\sqrt{xy},$$

již upravíme na podobu

$$(x-y)^2-4n(x+y)+4n^2=0.$$

Položíme-li $x-y=u$, nabývá rovnice tato tvaru

$$u^2-4nu-8ny+4n^2=0,$$

z níž

$$u=2n\pm\sqrt{8ny}.$$

Aby řešení provedeno bylo čísly celými, položme

$$y=2nt^2;$$

potom jest

$$u=2n(1\pm 2t), \qquad x=2n(t\pm 1)^2.$$

Vyhovují tedy úloze pouze sudá čísla tvaru $2nt^2$ a $2n(t\pm 1)^2$, kdež t jest libovolné číslo celé. Jich průměr arithmetický jest

$$A=n(2t^2\pm 2t+1)$$

a průměr geometrický

$$G=2nt(t\pm 1);$$

tudíž

$$A-n=G.$$

Úloha 6.

Ve kterých dvou pravidelných mnohoúhelnících jsou velikosti vnitřních úhlů v poměru počtu vrcholů?

Řešení. (Zaslal p. *Jiljí Jahn,* stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

První mnohoúhelník měj stran x, druhý y; potom jest vnitřní úhel prvního

$$\alpha = \frac{(x-2)\,2R}{x}$$

a ve druhém

$$\beta = \frac{(y-2)\,2R}{y}.$$

Dle podmínky v úloze má býti

$$\alpha : \beta = x : y$$

čili

$$\frac{x-2}{x} : \frac{y-2}{y} = x : y.$$

Úměru tuto přetvoříme v rovnici

$$2\,(x^2 - y^2) = xy\,(x-y),$$

z které plyne buď $x = y$ (výsledek samozřejmý) aneb

$$2\,(x+y) = xy.$$

Odtud jde, že

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2};$$

kladné řešení celistvé obdržíme při

$$x - 2 = 1,\ 2,\ 4.$$

Jest tedy

$$x_1 = 3,\quad y_1 = 6,$$
$$x_2 = 4,\quad y_2 = 4,$$
$$x_3 = 6,\quad y_3 = 3.$$

Mimo mnohoúhelníky o stejném počtu stran hoví tudíž úloze toliko pravidelný trojúhelník se šestiúhelníkem.

Úloha 7.

Součet odvěsen pravoúhlého trojúhelníka jest 35 cm, výška příslušná k přeponě má 12 cm. Které jsou strany trojúhelníka?

Řešení. (Zaslal p. *Alois Neumann,* stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci.)

Buďtež a, b odvěsny, c přepona trojúhelníka, v výška jeho. Dle úlohy jest

$$a + b = 35, \quad v = 12.$$

Jelikož $$a^2 + b^2 = c^2, \quad v = \frac{ab}{c},$$

máme k určení neznámých stran a, b, c tři rovnice. Z nich vyplývá

$$c^2 + 24c - 1225 = 0$$

a odtud $$c = 25;$$

druhý kořen $c' = -49$ nemá významu geometrického. K hodnotě c sluší pak délky druhých dvou stran, jež vypočítáme z rovnic

$$a + b = 35$$
$$a^2 + b^2 = 625;$$

nalezneme $$a = 15, \quad b = 20.$$

Úloha 8.

V trojúhelníku jest jedna strana 65 cm, výšky příslušné k druhým stranám jsou 60 cm a 56 cm. Ustanoviti obsah trojúhelníka.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Janák,* stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze.)

Dána jest strana c a výšky v_1, v_2 příslušné k stranám neznámým a, b. Označíme-li úhly trojúhelníka obvyklým způsobem, jest

$$\sin \alpha = \frac{v_2}{c} = \frac{56}{65};$$

k tomu najdeme z tabulek úhel

$$\alpha = 59^0 29' 25''.$$

Podobně ustanovíme

$$\sin \beta = \frac{v_1}{c} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13},$$
$$\beta = 67^0 22' 50'';$$

třetí úhel trojúhelníka jest pak

$$\gamma = 53^0 7' 45''.$$

Dále najdeme

$$a = \frac{v_2}{\sin \gamma} = 70\,cm, \quad b = \frac{v_1}{\sin \gamma} = 75\,cm$$

a konečně

$$\triangle = \tfrac{1}{2} av_1 = \tfrac{1}{2} bv_2 = 2100\, cm^2.$$

Jelikož jest $v_1 > v_2$, musí býti $a < b$ a tedy také $\alpha < \beta$; nemůže proto úhel α býti ostrý. Může však takovým býti úhel β, pročež obdržíme ještě tyto druhé hodnoty úloze vyhovující:

$$\beta' = 112^0 37' 10'', \quad \gamma' = 3^0 53' 25'',$$
$$a' = 407{\cdot}92\, cm, \quad b' = 437{\cdot}07\, cm,$$
$$\triangle' = 12238\, cm^2.$$

Jiné řešení. Výškami v_1, v_2 dělí se každá z neznámých stran a, b ve dvě části, které takto lze vyjádřiti:

$$a = \sqrt{65^2 - 60^2} + \sqrt{b^2 - 60^2}$$
$$b = \sqrt{65^2 - 56^2} + \sqrt{a^2 - 56^2}.$$

Odtud obdržíme rovnice

$$a^2 - b^2 - 50a + 4225 = 0,$$
$$a^2 - b^2 + 66b - 4225 = 0,$$

z nichž vyloučením a plyne

$$29b^2 - 14850b + 950625 = 0;$$

z toho pak vypočítáme hodnoty b, b' jako nahoře.

Úloha 9.

Vyšetřiti povahu kořenů rovnice

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} = a.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Vavrouch,* stud. VIII. tř. g. v Přerově.)

Upravme danou rovnici na tvar

$$ax^2 - (a+2)x + 1 = 0;$$

řešením nalezneme

$$x = \frac{1}{2a}(a + 2 \pm \sqrt{a^2 + 4}).$$

Rovnice má při realném a dva kořeny realné různé a jest rozeznávati tyto případy:

α) Jest-li $a > 0$, jest $\sqrt{a^2+4} < a+2$ a tedy oba kořeny kladné, jak i ze součinu jich, rovného $\frac{1}{a}$, poznáváme.

β) Jest-li $a < 0$, jest $\sqrt{a^2+4} > a+2$, jest jeden kořen kladný, jeden záporný.

γ) Jest-li $a = 0$, jest $\sqrt{a^2+4} = a+2$, jest jeden kořen rovnice nekonečný, druhý rovná se $\frac{1}{2}$.

Kořeny jsou racionálné, jest-li a veličinou tvaru

$$a = \frac{4mn}{m^2 - n^2},$$

kdež m, n též čísla racionálná; potom jest

$$\sqrt{a^2+4} = \frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$$

a kořeny rovnice jsou

$$x_1 = \frac{m+n}{2n}, \quad x_2 = \frac{m-n}{2m}.$$

Úloha 10.

Z 5ti samohlásek a 19ti souhlásek kolik lze utvořiti slov, v nichž tři souhlásky střídají se se dvěma samohláskami?

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Bílovský*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Má-li slovo obsahovati 3 souhlásky a 2 samohlásky navzájem se střídající, tu, hledíce jen k souhláskám, obdržíme takové množství skupin, kolik jest variací 3. třídy o 19ti prvcích s opakováním, t. j. 19^3. Přibereme-li samohlásky, tu se každá skupina tří souhlásek může spojiti s dvěma samohláskami tolikrát, kolik jest variací 2. třídy z 5ti prvků s opakováním, t. j. 5^2. Všech slov žádaného tvaru jest tedy

$$19^3 \times 5^2 = 171475.$$

Úloha 11.

V trojúhelníku ABC vedena příčka A_1B_1 procházející středem kružnice vepsané rovnoběžně k půdici $AB = c$. Oč jest obvod trojúhelníka A_1B_1C menší než obvod trojúhelníka ABC? Kterak lze sestrojiti trojúhelník A_2B_2C, jehož obvod jest o týž rozdíl větší než obvod trojúhelníka daného?

Řešení. (Zaslal p. *Alois Nevím*, stud. g. v Brně).

Veďme středem o kružnice vepsané do trojúhelníka ABC přímku A_1B_1 rovnoběžně se základnou $AB = c$ a pak na druhé straně základny, u vzdálenosti rovné poloměru této kružnice, přímku $A_2B_2 \parallel AB$, pokaždé až ku průseku s ostatními stranami daného trojúhelníka; i bude obvod O_1 trojúhelníka A_1B_1C o c menší, obvod O_2 trojúhelníka A_2B_2C o c větší než obvod O trojúhelníka ABC.

Dle konstrukce jest rozdíl

$$O - O_1 = AA_1 + AB + BB_1 - (Ao + oB_1).$$

Vedeme-li ještě přímky Ao a Bo, obdržíme dva rovnoramenné trojúhelníky o ramenech $AA_1 = A_1o$ a $BB_1 = oB_1$; jest tedy onen rozdíl

$$OO_1 = AB = c.$$

Že trojúhelník A_2B_2C vyhovuje druhé podmínce, vysvítá z následujícího:

Vedeme-li $om \parallel AB$ a $on \parallel BC$, pokaždé až ku průseku se základnou AB, povstane trojúhelník mno, jehož obvod se rovná základně AB a je-li $Ap \parallel B_2C$ vedeno až ku průseku s A_2B_2, jsou trojúhelníky $mno \cong A_2Ap$ a přímky $pB_2 = AB$, $A_2p = BB_2$. Jest tudíž rozdíl obvodů

$$\begin{aligned} O_2 - O &= AA_2 + BB_2 + A_2p = AA_2 + Ap + A_2p \\ &= mo + no + mn = c. \end{aligned}$$

Úloha 12.

Dány jsou trojúhelníky podobné, jichž plochy jsou p_1, p_2, $p_3, \ldots, p_n$. Sestrojiti trojúhelník jim podobný, jehož obvod rovná se součtu obvodů trojúhelníků daných, a ustanoviti jeho plochu P.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Sieger,* stud. VII. tř. g. v Plzni).

Sestavme dané trojúhelníky tak, aby jejich půdice b_1, b_2, b_3, ... b_n tvořily přímku $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = AC$, a ostatní stejnolehlé strany byly rovnoběžné. Prodloužíme-li pak stranu prvního trojúhelníka, vycházející z A, a stranu posledního vycházející z C, až ku společnému jich průsečíku B, obdržíme podobný trojúhelník, jehož základnou jest $(c_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$ a kterýž vytknuté podmínce vyhovuje.

Znamenají-li totiž o_1, o_2, o_3, ..., o_n obvody daných trojúhelníků a O obvod sestrojeného ABC, jest pro jejich podobnost

$$o_1 : b_1 = o_2 : b_2 = o_3 : b_3 = \ldots = o_n : b_n$$
$$= O : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$

neb

$$(o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n) : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$
$$= O : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n);$$

tudíž

$$O_1 = o_1 + o_2 + o_3 + \ldots + o_n.$$

Z téhož důvodu jest

$$\sqrt{p_1} : b_1 = \sqrt{p_2} : b_2 = \sqrt{p_3} : b_3 = \ldots = \sqrt{p_n} : b_n$$
$$= \sqrt{P} : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$

neb

$$(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3} + \ldots + \sqrt{p_n}) : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$
$$= \sqrt{P} : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$

tedy

$$P = (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3} + \ldots + \sqrt{p_n})^2.$$

Úloha 13.

Sestrojiti pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona dělena jest dotyčným bodem vepsané kružnice na části dané c_1 a c_2.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Kroutil,* stud. VII. tř, g. ve Val. Meziříčí).

Znamená-li r poloměr vepsané kružnice, jsou odvěsny a a b

$$a = c_1 + r, \qquad b = c_2 + r;$$

tedy plocha trojúhelníka

$$2p = (r + c_1)(r + c_2) = r(r + c_1 + c_2) + c_1 c_2.$$

Ježto $r + c_1 + c_2 = \frac{1}{2}(a + b + c)$, jest

$$2p = p + c_1 c_2,$$
$$p = c_1 c_2.$$

Vyjádříme-li tudíž plochu i výškou v na přeponu

$$p = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)v,$$

najdeme výšku

$$v = \frac{2c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

jakožto střední harmonicky úměrnou obou dílů c_1 a c_2 přepony.

Výšku tuto snadno lze sestrojiti. Přechází tedy předložená úloha na známou úlohu: Sestrojiti pravoúhlý trojúhelník o dané přeponě a dané výšce.

Správné řešení úloh zaslali pp.:

František Bílovský, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 13.
Ignác Peyl, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 8.
Josef Frieb, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 8., 10. až 13.
Josef Grohman v Ivanovicích na Moravě, úl. 1., 4., 7., 8.
Václav Havlíček, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 4.
Jan Hejtmánek, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 4., 6., 7., 8., 13.
Jan Horák, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 8.
Karel Hrdlička, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1., 8., 13.
Ferdinand Hrubý, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1., 3., 4., 6., 7., 10., 13.
František Hýbl, právník v Praze, úl. 1. až 13.
Jiljí Jahn, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 5., 6., 7., 8., 10., 13.
Václav Janák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 7., 8.
Antonín Janíček, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 13.

Josef Jeřábek, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 3., 4., 5., 6., 7.

Karel Kašub v Brně, úl. 1., 2., 6.

Karel Komers, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 7.

Jan Koutný, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 1.

František Kroutil, stud. VIII. tř. g. ve Vrl. Meziřičí, úl. 1., 9.,

Josef Kugler, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 4., 7., 8.

Karel Milota, stud. VI. tř. g. v Písku, úl. 1 až 6., 8.

Alois Neumann, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 2,, 3., 7., 8., 9.

Alois Nevím, stud. g. v Brně, úl. 1., 2., 7., 8., 11., 13.

Jaroslav Novotný, stud. VIII. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 1. 4., 11.

Alois Ottis, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1. až 13.

Karel Pavlíček, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1., 2., 4., 7., 8.

Josef Pexider, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 4., 5., 9.

Karel Platzer, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 8.

Josef Půček, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 13.

Václav Sadil, stud. VI. tř. r. v Budějovicích, úl. 8.

František Sekyra, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 7., 8., 9.

Julius Schönfeld, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 4., 7., 8., 13.

Jan Sieger, stud. VII. tř. g. v Plzni, úl. 1. až 8., 11., 12., 13.

Rudolf Stojan, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 7., 9.

Karel Tauchmann, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 1.

Josef Vavrouch, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 1., 2., 3., 4., 6., 7., 8., 9., 11.

Siegfried Vic, stud. VII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1., 7., 8., 13.

Jan Vrabec, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1., 3., 5., 7., 8.

B. Ženíšek, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 1., 2., 4., 6., 8., 11., 13.

Úloha 26.

Kolikrát možná vyjádřiti součin

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2+e^2)(f^2+g^2+h^2+k^2)$$

součtem čtyř čtverců $A^2+B^2+C^2+D^2$?

Prof. Dr. *F. J. Studnička.*

Úloha 27.

Jak se dokáže co nejjednodušeji, že pro libovolné celistvé a kladné k a n

$$\sum_{h=0}^{n}(-1)^h k_h (n-\overline{h+1})_k = 1?$$

Týž.

Úloha 28.

Řešiti jest rovnici

$$x^5(x-1)+\frac{1}{x}=1.$$

R.

Úloha 29.

Řešiti jest rovnici

$$2\sqrt{x^2-x^4}=\sin\alpha.$$

$x_1 = \sin\frac{\alpha}{2}$
$x_2 = -\sin\frac{\alpha}{2}$
$x_3 = \cos\frac{\alpha}{2}$
$x_4 = -\cos\frac{\alpha}{2}$

R.

Úloha 30.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$(x+y)\cos\alpha = 2$$
$$xy\operatorname{cotg}^2\alpha = 1.$$

$x = \sec\alpha \pm 1$
$y = \sec\alpha \mp 1$

R.

Úloha 31.

Vyloučiti jest x ze soustavy rovnic

$$\operatorname{cosec} x - \sin x = a$$
$$\sec x - \cos x = b.$$

R.

Úloha 32.

Vedeme-li v pravoúhlém trojúhelníku *abc* výšku $\overline{cd} = v$, a značí-li ϱ, ϱ_1, ϱ_2 poloměry kružnic vepsaných v trojúhelníky *abc*, *acd*, *bcd*, jest

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \varrho^2,$$
$$\varrho + \varrho_1 + \varrho_2 = v.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 33.

Střední příčka lichoběžníka rovnoramenného jest p, půdice mají se k sobě a k rameni jako $5:3:2$. Která jest strana rovnostranného trojúhelníka rovného obsahem danému lichoběžníku?

Týž.

Úloha 34.

Kterou hodnotu má poměr $tg\, x : tg\, y$, je-li

$$\sin x = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{4 - 3\sin^2 \alpha}}, \quad \sin y = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - 3\cos^2 \alpha}}?$$

Týž.

Úloha 35.

Které úhly 360^0 nepřesahující hoví rovnici

$$\frac{\cos x + \cos 3x}{\cos 2x + \cos 4x} + \frac{\sin x + \sin 3x}{\sin 2x + \sin 4x} = 2.$$

Týž.

Úloha 36.

Úsečka $\overline{ab}$ pohybuje se krajními body svými po ramenech pravého úhlu. Přibližší-li se počátek její a o 30 *cm* k vrcholu o, vzdálí se koncový bod b o 40 *cm* od $'o$. Úhel, jejž původní poloha tvoří s novou, jest $45^{0}14'23''$. Vypočítat $\overline{ab} = x$.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 37.

Jaké úhly má rovnoramenný trojúhelník, ve kterém vzdálenost středů kružnice opsané a vepsané rovná se $\frac{3}{8}$ výšky?

Týž.

Úloha 38.

V kruhu poloměru $r = 25$ *cm* vedena tetiva $t = 48{\cdot}7$ *cm*; v kterém poměru dělí plochu kruhu?

Týž.

Úloha 39.

O trojúhelník *abc*, jehož výšky protínají se v bodě v, opsána kružnice; mimo to opsány kružnice trojúhelníkům *abv*, *bcv*, *cav*. Dokázati, že součet obloukových trojúhelníků *abv*, *bcv*, *cav* rovná se dvojnásobnému obsahu trojúhelníka *abc*.

Týž.

Úloha 40.

Z určité vzdálenosti jeví se celý pomník Karla IV. v Praze v úhlu $\alpha = 10^{0}44'$, podstavec jeho v úhlu $\beta = 6^{0}29'$, je-li oko v stejné výši s patou pomníku. Přiblížíme-li se o 30 *m*, jeví se podstavec sochy v úhlu $\gamma = 15^{0}51'$. Vypočítati výšku sochy i podstavce.

Týž.

Úloha 41.

Bodem uvnitř trojhranu daným sestrojiti kouli, která se dotýká jeho stěn.

Týž.

Úloha 42.

Který jest povrch čtyrstěnu *abcd*, ve kterém

$$ab = 3, \quad ac = 2, \quad ad = 4,$$
$$\sphericalangle dab = \sphericalangle dac = \sphericalangle dcb = 90^\circ?$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 43.

Osový řez válce má obvod 183 *cm*, plášť válce rovná se kruhu poloměru 45 *cm*; které jsou rozměry válce? *Týž.*

Úloha 44.

Který jest obsah tělesa omezeného dvěma vrchlíky kulovými, jichž poloměry jsou $r_1 = 60$ *cm*, $r_2 = 73$ *cm* a vzdálenost středů jich $s = 91$ *cm*? *Týž.*

Úloha 45.

Na ose X dány dvě družiny bodů rovnicemi

$$x^2 - 9x + 8 = 0, \qquad 3x^2 - 4x - 15 = 0.$$

Dokázati, že body ty tvoří harmonickou čtveřinu. *Týž.*

Úloha 46.

Strany úplného čtyrhranu mají rovnice

$$y = 0, \quad x = 0, \quad 2x - 3y + 6 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0.$$

Které jsou rovnice jeho úhlopříček? Dokázati, že středy úhlopříček těch leží v jedné přímce, a ustanoviti její rovnici.

Týž.