Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

O zvláštní soustavě trojúhelníků kružnici vepsaných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 136--143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120875

Rovnice této křivky zní tedy

$$\xi^2 + \eta^2 = \xi \sqrt[3]{r^2 \xi},$$

čili v soustavě polární $\varrho = r \cos^2\varphi$.

Sestrojivše kvadrant kružnice o poloměru $OA = r = 1$ a příslušný oblouk OmA této křivky, naneseme daný zlomek ξ jednotky $OA = 1$ jakožto úsečku $Op = \xi$ a vedeme příslušným bodem m křivky poloměr OM. Úsečka $x = OP$ bodu M znázorňuje pak třetí odmocninu úsečky ξ, ježto dle horní rovnice jest

$$x = \sqrt[3]{1^2 \,.\, \xi} = \sqrt[3]{\xi}\,.\text{*)}$$

O zvláštní soustavě trojúhelníků kružnici vepsaných.

Podává

Alois Strnad,

professor na c. k. české realce Pražské.

Chceme na tomto místě pojednati spůsobem prostým o zvláštní soustavě trojúhelníků, jejíž vlastnosti budou snad zajímati mladé čtenáře těchto listů. Shledajíť tu úzkou souvislost úvah geometrických s algebraickými, a seznámí se s upotřebením důležitého pojmu limity.

1. Do kružnice K vepsán jest trojúhelník abc; oblouky bc, ca, ab rozpůlíme v bodech a_1, b_1, c_1, oblouky b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 v bodech a_2, b_2, c_2, atd. Tím stanovena jest soustava trojúhelníků $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, ... $a_nb_nc_n$. Vyšetřujme nejprve úhly těchto trojúhelníků. Úhly trojúhelníka původního abc označme α, β, γ; trojúhelník $a_nb_nc_n$ mějž úhly α_n, β_n, γ_n. Značí-li tato písmena zároveň počet stupňů příslušných úhlů, jest dle známých vlastností úhlů obvodových

---

*) Na str. 68. v řádce 4. zdola má býti „na přímce“ místo „na přímky“. Na str. 73. v řádce 3. shora vynech zlomek poslední a v řádce 4. zdola (d) místo (α).
Na str. 74. vynech v poslední řádce $\alpha\,\beta)$.

$$\widehat{bc} = 2\alpha, \ \widehat{ca} = 2\beta, \ \widehat{ab} = 2\gamma,$$

$$\widehat{b_1c_1} = \beta + \gamma, \ \widehat{c_1a_1} = \gamma + \alpha, \ \widehat{a_1b_1} = \alpha + \beta,$$

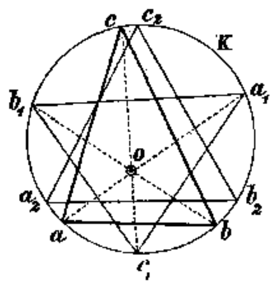
a proto

$$\alpha_1 = \frac{\beta + \gamma}{2}, \ \beta_1 = \frac{\gamma + \alpha}{2}, \ \gamma_1 = \frac{\alpha + \beta}{2};$$

obecně jest

$$(1)\ \alpha_n = \frac{\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}}{2}, \ \beta_n = \frac{\gamma_{n-1} + \alpha_{n-1}}{2}, \ \gamma_n = \frac{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}}{2}.$$

Hledíce k tomuto výsledku snadně bychom dokázali, že trojúhelník $a_1b_1c_1$ (aneb vůbec $a_nb_nc_n$) podoben jest trojúhelníku určenému body dotyčnými kružnice vepsané v trojúhelník abc (obecně $a_{n-1}\,b_{n-1}\,c_{n-1}$).



Obr. 1.

Rovněž bez obtíže lze stvrditi, že příčky aa_1, bb_1, cc_1 protínají se v bodě o, který jest středem kružnice vepsané v trojúhelník abc a průsečíkem výšek v trojúhelníku $a_1b_1c_1$. V takové souvislosti jsou též obecně trojúhelníky $a_{n-1}\,b_{n-1}\,c_{n-1}$, $a_nb_nc_n$.

2. Ježto $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\text{R}$, můžeme psáti rovnice (1) též takto:

$$(2)\qquad \alpha_n = \text{R} - \frac{\alpha_{n-1}}{2}, \ \beta_n = \text{R} - \frac{\beta_{n-1}}{2}, \ \gamma_n = \text{R} - \frac{\gamma_{n-1}}{2},$$

při čemž

$$\alpha_1 = \text{R} - \frac{\alpha}{2}, \ \beta_1 = \text{R} - \frac{\beta}{2}, \ \gamma_1 = \text{R} - \frac{\gamma}{2}.$$

Kdyby některý z úhlů trojúhelníka *abc* měl 60^0, ku př. $\alpha = 60^0$, bylo by pak též

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 60^0.$$

Jest-li však $\alpha > 60^0$, jest dle rovnic (2)

$$\alpha_1 < 60^0, \quad \alpha_2 > 60^0, \quad \alpha_3 < 60^0, \quad \alpha_4 > 60^0, \ldots$$

Dle týchž rovnic jest

$$\alpha_2 = R - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{R}{2} + \frac{\alpha}{4}, \quad \alpha_3 = R - \frac{\alpha_2}{2} = \frac{3R}{4} - \frac{\alpha}{8},$$

tudíž při $\alpha > 60^0$

$$\alpha - \alpha_2 = \frac{3\alpha}{4} - \frac{R}{2} > 0,$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \frac{R}{4} - \frac{3\alpha}{8} < 0.$$

Odtud vysvítají nerovnice

$$\alpha > \alpha_2 > \alpha_4 > \ldots > 60^0, \quad \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \ldots < 60^0,$$

které by se v protivné změnily, kdyby bylo $\alpha < 60^0$, a které takto lze vysloviti:

Jest-li úhel α *větší / menší než* 60^0, *blíží se úhly* α, α_2, α_4, ... *sestupně / vzestupně, úhly* α_1, α_3, α_5 ... *pak vzestupně / sestupně úhlu* 60^0.

Dle obdoby soudíme rovněž tak o úhlech β a γ, jakož také stvrzuje tento příklad:

$n = 0$		1	2	3	4	5	6
α_n	72^0	54^0	63^0	$58^030'$	$60^045'$	$59^037'30''$	$60^011'15''$
β_n	64^0	58^0	61^0	$59^030'$	$60^015'$	$59^052'30''$	$60^0\ 3'45''$
γ_n	44^0	68^0	56^0	$62^0\ 0'$	$59^0\ 0'$	$60^030'\ 0''$	$59^045'\ 0''$

Hodnoty α_0, β_0, γ_0 znamenají tu — i v úvahách dalších — úhly α, β, γ trojúhelníka *abc*.

3. Abychom úhly kteréhokoli trojúhelníka naší soustavy přímo vyjádřili z úhlů posléz jmenovaného trojúhelníka původního, vyvoďme ze vzorců (2) rovnice

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= 2R - \alpha\,, \\ 2\alpha_2 &= 2R - \alpha_1\,, \\ 2\alpha_3 &= 2R - \alpha_2\,, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ 2\alpha_n &= 2R - \alpha_{n-1}\,, \end{aligned}$$

násobíme je po řadě činiteli $1, -2, 4, -8, \ldots, (-2)^{n-1}$ a pak sečtěme. Tím obdržíme

$$2 \,.\, (-2)^{n-1} \,.\, \alpha_n = 2R\,[1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-2)^{n-1}] - \alpha\,;$$

sečtouce v závorce geometrickou posloupnost, jejíž podíl $q = -2$, ustanovíme

$$\alpha_n = \frac{2R}{3} \,.\, \frac{q^n - 1}{q^n} + \frac{\alpha}{q^n}. \tag{3}$$

Jest tedy při $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\alpha_1 = R - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{R}{2} + \frac{\alpha}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{3R}{4} - \frac{\alpha}{8},$$

$$\alpha_4 = \frac{5R}{8} + \frac{\alpha}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{11R}{16} - \frac{\alpha}{32}, \text{ atd.}$$

Obdobné hodnoty mají úhly β_n i γ_n. Již dříve jsme poznali, že s rostoucím ukazatelem n blíží se úhly $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ určité *hodnotě mezné (limitě)*, totiž 60^0. Důkazem toho jest též vzorec (3); neboť pro $\lim n = \infty$ jest $\lim (-2)^n = \infty$,

$$\lim \frac{q^n - 1}{q^n} = \lim \left(1 - \frac{1}{(-2)^n}\right) = 1,$$

a proto $$\lim \alpha_n = \frac{2R}{3} = 60^0.$$

Můžeme tedy říci: *Roste-li n do nekonečna, blíží se trojúhelník $a_n b_n c_n$ trojúhelníku rovnostrannému.*

3. Na velikosti úhlů α_n, β_n, γ_n, které jsme vyšetřili, závisí *tvar* trojúhelníka $a_n b_n c_n$; přihlédněme ještě blíže ku jeho *poloze*, která se zřetelem k trojúhelníku abc bude stanovena, určíme-li oblouky

$$\widehat{aa_n} = x_n, \quad \widehat{bb_n} = y_n, \quad \widehat{cc_n} = z_n.$$

Abychom se dodělali výsledků správných a obecných, musíme všechny oblouky kružnice K počítati v stejném smyslu kladném, ku př. od a přes b ku c. Každý oblouk přesahující délku kružnice smíme při tom nahraditi obloukem menším než jest tato délka; od počtu stupňů jeho odečteme tolikrát 360^0, až obdržíme zbytek menší než 360^0. Toho všeho dbajíce, označme oblouky

$$\begin{array}{llll}
\widehat{aa_1} = x_1 = t_1, & \widehat{a_1a_2} = t_2, & \widehat{a_2a_3} = t_3, \ldots, & \widehat{a_{n-1}a_n} = t_n, \\
\widehat{bb_1} = y_1 = u_1, & \widehat{b_1b_2} = u_2, & \widehat{b_2b_3} = u_3, \ldots, & \widehat{b_{n-1}b_n} = u_n, \\
\widehat{cc_1} = z_1 = v_1, & \widehat{c_1c_2} = v_2, & \widehat{c_2c_3} = v_3, \ldots, & \widehat{c_{n-1}c_n} = v_n.
\end{array}$$

Z vlastností úhlů obvodových vysvítá, že

$$t_1 = 2\gamma + \alpha, \quad t_2 = 2\gamma_1 + \alpha_1, \ldots, \quad t_n = 2\gamma_{n-1} + \alpha_{n-1},$$
$$u_n = 2\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, \quad v_n = 2\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}.$$

Dle vzorce (3) jest

$$2\gamma_{n-1} = \frac{4R}{3} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^{n-1}} + \frac{2\gamma}{q^{n-1}},$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{2R}{3} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^{n-1}} + \frac{\alpha}{q^{n-1}},$$

součet pak rovnic těchto dává

$$(4) \qquad t_n = 2R \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^{n-1}} + \frac{t_1}{q^{n-1}}.$$

Snad bychom nemusili ani připomínati, že obdobné jsou hodnoty u_n a v_n. Jde nám však hlavně o veličiny x_n, y_n, z_n. Uvažme, že

$$x_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n;$$

ustanovme sčítance tohoto součtu dle vzorce (4) a slučme je u výraz

$$(5) \qquad x_n = 2n\mathrm{R} - (2\mathrm{R} - x_1)\,\mathrm{S}_n,$$

k němuž analogické jsou y_n i z_n, a ve kterém položeno

$$\mathrm{S}_n = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}} = \frac{q^n - 1}{3q^{n-1}}.$$

Vrátíme-li se k příkladu na konci odst. 1., obdržíme řadu hodnot tuto sestavených:

$n=1$		2	3	4	5	6	7
x_n	160°	10°	195°	12°30′	193°45′	13° 7′30″	193°26′15″
y_n	208°	346°	159°	342°30′	160°45′	341°37′30″	161°11′15″
z_n	172°	4°	186°	5° 0′	185°30′	5°15′ 0″	185°22′30″

Že jest při n lichém $x_n + y_n + z_n = 540^0$ a při n sudém $x_n + y_n + z_n = 360^0$, vyplývá ze vzorce (5); jestiť

$$x_n + y_n + z_n = 6n\mathrm{R} - [6\mathrm{R} - (x_1 + y_1 + z_1)]\,\mathrm{S}_n = 6n\mathrm{R}.$$

5. Zbývá ještě abychom vyzkoumali *meznou polohu*, které blíží se trojúhelník $a_n b_n c_n$, vzrůstá-li n do nekonečna. Tu jest pak

$$\lim \mathrm{S}_n = \lim \frac{1-(-2)^n}{3\,.\,(-2)^{n-1}} = \lim \frac{2 + \dfrac{1}{(-2)^{n-1}}}{3} = \frac{2}{3}$$

a proto dle vzorce (5)

$$\lim x_n = 2n\mathrm{R} - \frac{2}{3}\,(2\mathrm{R} - x_1)$$

$$= 2n\mathrm{R} - \frac{2}{3}\,[2\mathrm{R} - (2\gamma + \alpha)] = 2n\mathrm{R} - \frac{2}{3}\,(\beta - \gamma);$$

podobně jest

$$\lim y_n = 2n\mathrm{R} - \frac{2}{3}(\gamma - \alpha), \quad \lim z_n = 2n\mathrm{R} - \frac{2}{3}(\alpha - \beta).$$

Sluší však rozeznávati, je-li n sudé neb liché. V prvním případě obdržíme hodnoty mezné

$$(6) \qquad x_\mathrm{I} = -\frac{2}{3}(\beta - \gamma), \quad y_\mathrm{I} = -\frac{2}{3}(\gamma - \alpha), \quad z_\mathrm{I} = -\frac{2}{3}(\alpha - \beta),$$

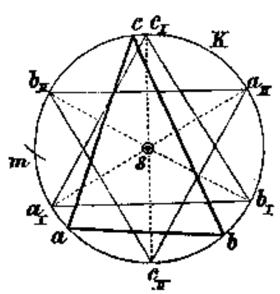
ve druhém pak

$$(7) \qquad x_\mathrm{II} = 2\mathrm{R} + x_\mathrm{I}, \quad y_\mathrm{II} = 2\mathrm{R} + y_\mathrm{I}, \quad z_\mathrm{II} = 2\mathrm{R} + z_\mathrm{I}.$$

Tyto hodnoty určují v kružnici K vrcholy dvou mezných trojúhelníků $a_\mathrm{I} b_\mathrm{I} c_\mathrm{I}$, $a_\mathrm{II} b_\mathrm{II} c_\mathrm{II}$ tak sice, že

$$x_\mathrm{I} = \widehat{aa_\mathrm{I}}, \quad y_\mathrm{I} = \widehat{bb_\mathrm{I}}, \quad z_\mathrm{I} = \widehat{cc_\mathrm{I}},$$
$$x_\mathrm{II} = \widehat{aa_\mathrm{II}}, \quad y_\mathrm{II} = \widehat{bb_\mathrm{II}}, \quad z_\mathrm{II} = \widehat{cc_\mathrm{II}}.$$

Dospěli jsme tudíž úvahou touto k výsledku: *Roste-li ukazatel do nekonečna, blíží se trojúhelníky abc, $a_2 b_2 c_2$, $a_4 b_4 c_4$, $a_6 b_6 c_6$ . . . polohou svou trojúhelníku $a_\mathrm{I} b_\mathrm{I} c_\mathrm{I}$, trojúhelníky $a_1 b_1 c_1$, $a_3 b_3 c_3$, $a_5 b_5 c_5$ . . . trojúhelníku $a_\mathrm{II} b_\mathrm{II} c_\mathrm{II}$; oba tyto mezné trojúhelníky jsou rovnostranné a dle středu kružnice K souměrně sdružené.*



Obr. 2.

Dán-li jest trojúhelník *abc*, lze příslušné k němu trojúhelníky mezné snadně sestrojiti dle rovnic (6) a (7); při tom pozor jest míti na kladný neb záporný smysl oblouků.

Přeneseme-li od vrcholu c ve smyslu kladném oblouk $\widehat{cm} = \widehat{ab} = 2\gamma$ a rozdělímeli oblouk $\widehat{ma} = 2(\gamma - \beta)$ na 3 stejné díly, leží na konci první třetiny od a vrchol a_{I}, jímž ostatních pět vrcholů b_{I}, c_{I}, a_{II}, b_{II}, c_{II} jest úplně určeno. V příkladě dříve již voleném bylo by

$$x_{\mathrm{I}} = -13^0 20', \quad y_{\mathrm{I}} = 18^0 40', \quad z_{\mathrm{I}} = -5^0 20';$$
$$x_{\mathrm{II}} = 166^0 40', \quad y_{\mathrm{II}} = 198^0 40', \quad z_{\mathrm{II}} = 174^0 40'.$$

Úlohy.

Řešení úloh z ročníku XXIII.

Úloha 42.

Dokázati, že čtverec součtu n čtverců možná na n způsobů vyjádřiti součtem n čtverců.

Řešení. (Zaslal pan *Josef Hajíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Budiž

$$S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2,$$
$$S_k = S - a_k^2;$$

potom jest

$$S = S_1 + a_1^2 = S_2 + a_2^2 = \ldots = S_k^2 + a_k^2 = \ldots = S_n^2 + a_n^2, \qquad (1)$$

čímž rozveden součet S na n binomů.

Dle toho obdržíme

$$S^2 = (S_k + a_k^2)^2 = (S_k - a_k^2)^2 + 4a_k^2 S_k. \qquad (2)$$

Výraz $4a_k^2 S_k$ jest součtem $(n-1)$ čtverce, tudíž dle rovnice (2) rozvedeno S^2 na součet n čtverců. Jelikož lze klásti

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

můžeme S^2 na n způsobů rozložiti v součet n čtverců. Ku př.:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)^2 = 5^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2$$
$$= 8^2 + 16^2 + 23^2 + 24^2 + 40^2 = 6^2 + 12^2 + 24^2 + 30^2 + 37^2$$
$$= 4^2 + 12^2 + 16^2 + 20^2 + 47^2 = 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 53^2.$$