Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Roháček; Václav Jeřábek

O průmětu kuželoseček rotačního kužele

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 5, R75--R78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120874

$$\left(t^6 s' + \frac{t^6-1}{t^3}\right)\left(1 - \frac{t^3 s'}{t^2-1}\right)\left[\frac{t^6-1}{t^3} + s'(t^2+2)(t^2-1) + \right.$$
$$\left. + s'^2 t^3 (t^2-1)\right] = A^2.$$

Položíme-li $A = \frac{t^6-1}{t^3} + s'(t^2+2)(t^2-1) + s'^2(t^2-1)\,t^3$, obdržíme po krácení kvadr. rovnici pro s' bez absol. členu, a z ní plyne

$$s' = \frac{t^8 - 3t^6 + 3t^2 - 1}{t^3(t^6 + t^4 - 2t^2 + 1)}$$

a tedy

$$s = s' + \frac{1}{t^3} = \frac{t^6 - 2t^4 + t^2 + 1}{t(t^6 + t^4 - 2t^2 + 1)}.$$

Z rovnic (5), (6), (7) dostaneme

$$\begin{aligned} x &= t^6 + 3t^5 - 2t^4 + t^2 + 1, \\ y &= -t^6 + 3t^5 + 2t^4 - t^2 - 1, \\ z &= t(t^6 + t^4 - 2t^2 + 3t + 1), \\ u &= t(-t^6 - t^4 + 2t^2 + 3t - 1), \end{aligned}$$

kde ještě lze položiti $t = a/b$ (a, b celá čísla) a pak výrazy pro x, y, z, u učiniti homogenními. — To je vlastně řešení p. Matějíčka (Rozhledy, roč. 5, 1925, čís. 1).

(Příště dokončení.)

O průmětu kuželoseček rotačního kužele.

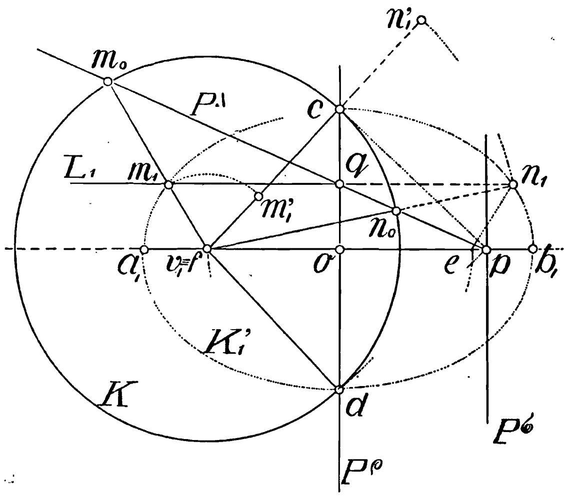
Podle † řed. *V. Jeřábka* sestavil dr. *J. Roháček*.

Rotační kužel budiž dán vrcholem v a podstavnou kružnicí $K(v_1 a)$ v průmětně π. K zvolené tětivě $\overline{cd}$ v kružnici K sestrojme pól p a příslušnou sdruženou poláru, kterou považujeme za stopu

P^σ roviny σ, procházející vrcholem kužele v; rovinu ϱ pak veďme přímkou cd rovnoběžně. Rovina ϱ protne kužel v elipse K' (obr. 1).	P^ϱ roviny ϱ, vedené rovnoběžně s rovinou σ, určenou stopou $cd \equiv P^\sigma$ a vrcholem v. Rovina ϱ protne kužel v hyperbole K (obr. 2).

Dokážeme nyní, že *průmětem této křivky K' je kuželosečka K'_1, jejímž jedním ohniskem je průmět v_1 vrcholu v kužele.*

Za tím účelem veďme v rovině sečné ϱ přímku L, kolmou na její stopu P^ϱ v jakémkoliv bodě q ($L_1 \perp \overline{cd}$) a hledejme její průsečíky s kuželem. Přímkou L a rovnoběžkou vp | spádovou přímkou vo roviny je určena rovina λ, mající svojí stopu P^λ ve spojnici $pq \equiv P^\lambda$, resp. $oq \equiv P^\lambda$; λ protíná kužel ve dvou površkách, vycházejících z průsečných bodů m_0, n_0 stopy P^λ s kružnicí K. Povrchové přímky tyto sekou pak přímku L v bodech m, n křivky K' $[m_1 \equiv (L_1 \times m_0v)$, $n_1 \equiv (L_1 \times n_0v)]$.



Obr. 1.

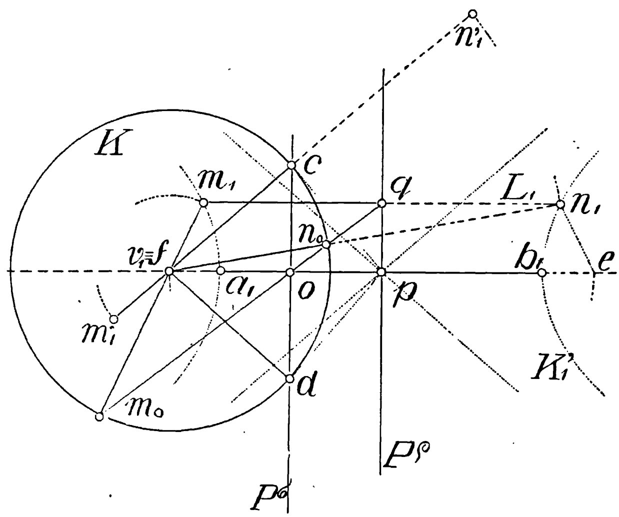
Vedlejší osou průsečné elipsy (i jejího průmětu) je tětiva $\overline{cd}$, neboť stojí kolmo na směr vp hlavní osy a tečny ve vrcholech c, d, jako průsečnice rovin tečných ke kuželi v bodech c a d s rovinou sečnou ϱ, jsou s tímto směrem taktéž rovnoběžny. Půlící bod o tětivy $\overline{cd}$ je tudíž středem elipsy K' i jejího průmětu K'_1.

Asymptoty průsečné hyperboly K' mají směr površek $\overline{vc}$, $\overline{vd}$ a jejich průměty směry v_1c, v_1d. Poněvadž stopy tečných rovin ke kuželi podél površek vc, vd protínají se v bodě p, je bod p středem hyperboly K' i jejího průmětu K'_1 a stopa P^ϱ osou imaginární.

Čtveřina bodová $(pqn_0m_0) = -1$ resp. $(oqn_0m_0) = -1$ je — jak patrno — harmonická a promítá se ze středu v_1 na přímku L_1 do čtyř bodů opět harmonicky sdružených $(m_1n_1q\infty) = -1$ a ježto jeden bod této čtveřiny je v nekonečnu, je k němu sdružený bod q půlícím bodem tětivy $\overline{m_1n_1}$ kuželosečky K'_1 a tedy též půlícím bodem tětivy $\overline{mn}$ křivky K'. Jsou tedy body m, n na kuželi po obou stranách průmětny stejně od ní vzdáleny. Otočíme-li nyní površky vm_0, vn_0 na kuželi do přímky vc, přejdou body m, n do nových poloh m', n' na vc tak, že m' je nad a n' pod průmětnou π. Jsou-li půdorysy nových poloh m'_1, n'_1, musí

$$\overline{m'_1c} = \overline{n'_1c} = u.$$

Z obrazců je dále patrno, že



Obr. 2.

$$\overline{vm'_1} = a - u,$$
$$\overline{vn'_1} = a + u,$$

sečtením ihned plyne

$$\overline{vm'_1} + \overline{vn'_1} = 2a.$$

$$\overline{vm'_1} = u - a,$$
$$\overline{vn'_1} = u + a,$$

odečtením vyplývá

$$\overline{vn'_1} - \overline{vm'_1} = 2a.$$

Sestrojíme-li bod e souměrný k bodu $f \equiv v_1$ podle stopy P^ϱ, jest na základě souměrnosti $fm_1 = en_1$ a $fn_1 = em_1$ a hořejší rovnosti nabývají známých tvarů:

$$\overline{m_1f} + \overline{m_1e} = 2a \text{ resp. } \overline{m_1f} - \overline{m_1e} = 2a,$$

což praví, že průmětem křivky K'_1 je elipsa, resp. hyperbola, jejímž jedním ohniskem je bod v_1. Učiníme-li $\overline{oa_1} = \overline{ob_1} = a$ ($\overline{pa_1} = \overline{pb_1} = a$) = poloměru podstavné kružnice kužele, obdržíme vrcholy hlavní osy kuželosečky K'_1.

Při průseku parabolickém veďme v podstavné kružnici K rotačního kužele vodorovný průměr $\overline{ap}$ (obr. přenechávám lask.

čtenáři) a v bodech koncových tečny P^{ϱ}, P^{σ}. Považujme P^{σ} za stopu tečné roviny σ, dotýkající se kužele podél površky vp, a P^{ϱ} za stopu roviny $\varrho \parallel \sigma$ protínající kužel podle věty Dandelinovy v parabole K'. Zvolme opět na P^{ϱ} bod q a veďme jím v rovině ϱ přímku L, kolmou na P^{ϱ} a vyhledejme její průsečíky s kuželem. Poněvadž přímka L a površka vp jsou spolu rovnoběžny, určují rovinu λ, jejíž stopa je $pq \equiv P^{\lambda}$; tato protíná kružnici K v dalším bodě c, v němž vedená površka vc kužele protíná přímku L v hledaném průsečíku m, patřícím parabole K'. Průmět jeho $m_1 \equiv$ $\equiv (L_1 \times v_1c)$ náleží pak parabole K'_1.

Ježto $\triangle\, cm_1q$, $\triangle\, v_1pc$ jsou podobné, platí

$$\overline{q_1m_1} = \overline{m_1c};$$

připočteme-li na obě strany délku poloměru r vidíme, že

$$\overline{qm_1} + r = \overline{m_1c} + r,$$

čili

$$\overline{m_1q_0} = \overline{m_1v_1}.$$

Bod m_1 je stejně vzdálen od pevného bodu $f \equiv v_1$ a od pevné přímky D, vedené rovnoběžně s P^{ϱ} ve vzdálenosti r, leží tudíž na parabole K'_1, jejímž ohniskem je bod v_1.

Steinerovy elipsy.

Prof. Dr. *V. Sukdol.*

(Dokončení.)*)

II.

Kolem pevného bodu $P\,(p_1 : p_2 : p_3)$ nechť se otáčí přímka p, jím procházející, daná rovnicí

$$(kp_2 + p_3)\, x_1 - kp_1x_2 - p_1x_3 = 0. \tag{40}$$

Tato přímka protíná stranu BC v bodě

$$D\left(0,\ \frac{2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\beta - k\sin\gamma},\ -\frac{2kr \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\beta - k \sin\gamma}\right),$$

stranu CA v bodě

$$E\left(\frac{2rp_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\gamma},\ 0,\ \frac{2r\,(kp_2 + p_3)\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + (kp_2 + p_3)\sin\gamma}\right)$$

a stranu AB v bodě

*) V I. části článku vyskytly se dvě malé tiskové chyby: Na str. 45 v rovnici (29) mocnitel ve jmenovateli má býti $\frac{3}{2}$; na str. 47 v rovnici (39) má býti: $e = \frac{2}{3}r\sqrt[4]{4[(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 - 12\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma)]}$. Prosíme zdvořile čtenáře, aby si je opravil.