

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bohumil Hacar

Z astronomie dvojhvězd. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 5, R83--R86,R87--R93

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120872>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1934

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Srovnáním s (38) shledáme, že jsou to právě poloviční hodnoty délek poloos a lineární výstřednosti Steinerovy elipsy minimálního obsahu, opsané $\triangle ABC$.

Z rovnice (51) jest na první pohled patrné, že $BC \equiv x_1 = 0$, $CA \equiv x_2 = 0$, $AB \equiv x_3 = 0$ jsou tečnami elipsy (51). Body dotyčné jsou středy S' , S'' , S''' stran. Je tedy Steinerova elipsa vepsaná do $\triangle ABC$ zároveň Steinerovou elipsou opsanou $\triangle S'S''S'''$.

Maximální elipsa vepsaná do $\triangle ABC$ a minimální elipsa opsaná témuž trojúhelníku mají společný střed a společné směry os; jsou spolu homothetické: středem homothetie je těžiště a poměr homothetie je 1 : 2.

Z astronomie dvojhvězd.

B. Hačar.

(Dokončení.)

První dva z těchto elementů (P, T) nazýváme dynamické, ostatní geometrické.

V obr. 2 jest C střed dráhy, ΩC uzlová přímka, CN směr k sev. pólu (východisko počítání posič. úhlů), $\Omega QP\mathcal{U}$ pomocný kruh o poloměru $2a$ v rovině skutečné dráhy, elipsa $\Omega Q'P'\mathcal{U}$ jeho průmět do báně nebeské. Elipsa zdánlivé dráhy není v obrazi zakreslena. Bod P je periastron ve skutečné, P' ve zdánlivé dráze,*) S' průmět skutečného ohniska S , jest tedy $CP = a$ velká poloosa skutečné dráhy, $CP' = a'$ její průmět. Budiž dále Q_0 koncový bod malé poloosy skutečné dráhy, Q'_0 jeho průmět, tedy $CQ_0 = b$ malá poloosa, $CQ'_0 = b'$ její průmět, dále je $CQ = a$ a $CQ' = b'_1$ průmět. Budiž dále α posiční úhel poloosy a' a β p. ú. poloosy b' , Ω p. ú. vzestupného uzlu. Spuštěme nyní kolmice PR a QT na uzlovou přímku, pak bude $\triangle CPR \cong \triangle QTC$ ($\sphericalangle PCQ = 90^\circ$) a proto platí o průmětech těchto trojúhelníků $\triangle CRP' = CTQ'$. A ježto

$$\begin{aligned}\triangle CRP' &= -a'^2 \sin(\alpha - \Omega) \cos(\alpha - \Omega), \\ \triangle CTQ' &= b'^2_1 \sin(\beta - \Omega) \cos(\beta - \Omega).\end{aligned}$$

Ze srovnání obou trojúhelníků plyne základní rovnice

$$-a'^2 \sin(\alpha - \Omega) \cos(\alpha - \Omega) = b'^2_1 \sin(\beta - \Omega) \cos(\beta - \Omega) \quad (6)$$

neboli

$$\sin 2(\alpha - \Omega) = -\frac{b'^2_1}{a'^2} \sin 2(\beta - \Omega). \quad (7)$$

Posiční úhel uzlové přímky Ω . Předpokládejme, že zdánlivou elipsu i s oběma konjugovanými průměry $2a'$ a $2b'$ máme

*) Poznačení bodů P' a Q' nedopatřením v obr. 2 vynecháno, lze je však snadno doplniti.

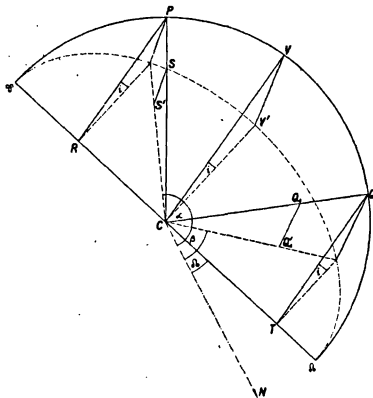
narysovánu. Ježto poměry úseček se promítnutím nemění, jest $CS : CP = CS' : CP' = \varepsilon$. A dále $CQ : CQ_0 = CQ_1 : CQ'_0$, čili $a : b = b'_1 : b'$. Protože však $a^2/b^2 = 1/(1 - \varepsilon^2)$, jest $b'_1 = b'/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Z rovnice (7) plyne

$$\frac{\sin 2(\Omega - \alpha)}{\sin 2(\beta - \Omega)} = \frac{b'_1{}^2}{a'^2}$$

a odtud

$$\frac{\sin 2(\Omega - \alpha) - \sin 2(\beta - \Omega)}{\sin 2(\Omega - \alpha) + \sin 2(\beta - \Omega)} = \frac{b'_1{}^2 - a'^2}{b'_1{}^2 + a'^2}$$

a dále



Obr. 2.

$$\frac{\cos(\beta - \alpha) \sin(2\Omega - \alpha - \beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cos(2\Omega - \alpha - \beta)} = \frac{b'_1{}^2 - a'^2}{b'_1{}^2 + a'^2}$$

neboli

$$\tan(\alpha + \beta - 2\Omega) = \frac{b'_1{}^2 - a'^2}{b'_1{}^2 + a'^2} \tan(\alpha - \beta). \quad (8)$$

Velká poloosa a a délka periastra ω . Jak z obr. 2 patrně, jest $a \sin \omega = PR$, $a \cos \omega = -CR$. Ježto jest $PR = CT$ a $CR = a' \cos(\Omega - \alpha)$, obdržíme

$$\begin{aligned} a \sin \omega &= b'_1 \cos(\beta - \Omega), \\ a \cos \omega &= a' \cos(\Omega - \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Dělením obdržíme

$$\tan \omega = \frac{b'_1 \cos(\beta - \Omega)}{a' \cos(\Omega - \alpha)}$$

což ve spojení se základní rovnicí (6) dává po snadné úpravě

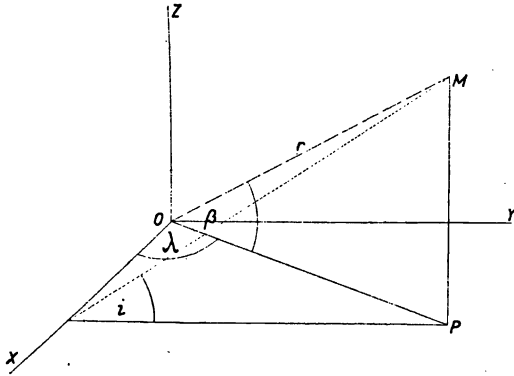
$$\tan \omega = \sqrt{\frac{\tan(\alpha - \Omega)}{\tan(\beta - \Omega)}}. \quad (10)$$

Druhá z rovnic (9) dává

$$a = \frac{a' \cos(\alpha - \Omega)}{\cos \omega}. \quad (11)$$

Sklon dráhy i . Z obr. 2 plyne

$$\cos i = \frac{SP'}{SP} = \frac{SP'}{CT} = \frac{a' \sin(\alpha - \Omega)}{b'_1 \cos(\beta - \Omega)}.$$



Obr. 3.

Vyjádříme-li ještě a'/b'_1 ze základní rovnice a dosadíme, tu

$$\cos i = \sqrt{-\tan(\alpha - \Omega) \tan(\beta - \Omega)}. \quad (12)$$

Vzorce právě odvozené dávají elementy geometrické. Elementy dynamické (P , T) nutno teprve určit.

Budiž L nějaký bod v prostoru (obr. 3) vzdálený r jednotek od středu O , P jeho průmět do roviny XY , dále $\sphericalangle XOP = \lambda$, $\sphericalangle LOP = \beta$, pak jsou veličiny r , λ , β polární prostorové souřadnice bodu L . Dále budiž $\sphericalangle LQP = i$ a $\sphericalangle LOQ = u$. Pak platí

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta \cos \lambda = r \cos u, \\ y &= r \cos \beta \sin \lambda = r \sin u \cos i, \\ z &= r \sin \beta = r \sin u \sin i \end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos u, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin u \cos i, \\ \sin \beta &= \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Dělením prvních dvou dostáváme

$$\tan \lambda = \tan u \cos i.$$

Považujme nyní O za hlavní hvězdu, L za družici, rovinu XY za rovinu kolmou k zorné přímce Z (za rovinu dotykovou ke sféře), pak jest rovina LOQ rovinou skutečné dráhy a úhel $LQP = i$ úhel sklonu. Osa X jest pak totožná s uzlovou přímkou a tudíž $u = \omega + v$, $\lambda = \Theta - \Omega$, takže nalezená právě rovnice nabude tvaru

$$\tan(\Theta - \Omega) = \tan(\omega + v) \cos i. \quad (14)$$

K ní připojme rovnici (3) poněkud upravenou

$$\tan \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \frac{1}{2}v \quad (15)$$

a dále rovnici Keplerovu

$$E - \varepsilon \sin E = M = \mu t. \quad (16)$$

Předpokládejme nyní, že máme k dispozici delší řadu pozorování, která jsme po př. opravili vzhledem k precesi a vlastnímu pohybu, z nichž jsme utvořili středy pro jednotlivá léta a jež jsme převedli interpolací na počátky jednotlivých let. Vyberme nyní z těchto dat dvě τ , τ' dosti vzdálená, tu $t = \tau - T$, $t' = \tau' - T$ jsou doby uplynulé od průchodu periastrum (epochy). Položme

$$\begin{aligned} E - \varepsilon \sin E &= \mu(\tau - T) = M, \\ E' - \varepsilon \sin E' &= \mu(\tau' - T) = M', \end{aligned}$$

odkudž plyne

$$\mu = \frac{M' - M}{\tau' - \tau}, \quad T = \frac{M'\tau - M\tau'}{M' - M}.$$

Ze středního pohybu μ dostaneme oběžnou dobu $P = 2\pi/\mu$.

Přikročme nyní k řešení příkladu. Zvolíme příklad, který uvádí také *Lewis a Baize*,⁵⁾ totiž dvojhvězdu ζ Herculis, jejíž hlavní hvězda jest 3,0, družice 6,5 vel.

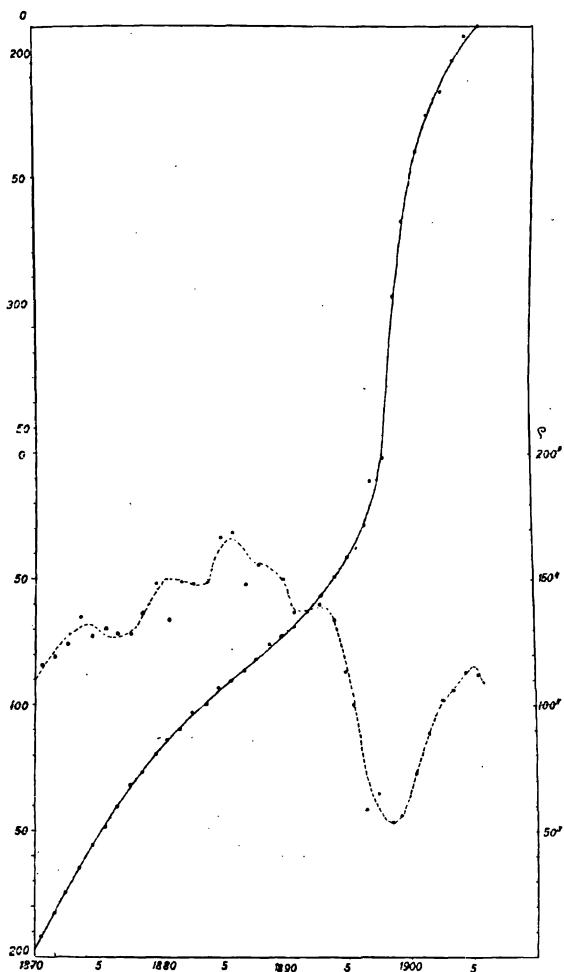
Tato dvojhvězda hodí se k tomuto účelu z několika důvodů. Především od objevení jejího W. Herschelem 18. července 1782 až do dnešního dne vykonala více nežli čtyři úplné oběhy, její dráha je tedy dostatečně zabezpečena. Ale i jinak jest — jak uvidíme — dráha její nadmíru zajímavá. Herschelova měření této dvojhvězdy uložena jsou v Pamětech Král. Astronomické Společnosti v Londýně. Pro náš příklad omezíme se na pozorování vykonaná různými pozorovateli v letech 1870 až 1905. Roční středy utvořené z těchto pozorování podává následující tabulka.

⁵⁾ Bull. S. A. Fr. 1930. S. 371 a násl.

	Θ °	ϱ "		Θ °	ϱ "
1870,54	192,0	1,16	1890,54	68,8	1,37
71,52	182,5	1,19	91,56	62,5	1,38
72,54	174,3	1,24	92,60	56,0	1,41
73,55	164,7	1,35	93,74	47,6	1,34
74,58	155,4	1,27	94,70	40,7	1,14
75,57	148,5	1,30	95,38	37,1	1,01
76,53	140,3	1,28	96,53	10,2	0,59
77,57	132,7	1,28	97,51	1,2	0,66
78,54	126,5	1,36	98,58	297,0	0,54
79,56	119,3	1,48	99,30	267,2	0,57
1880,52	113,9	1,34	1900,54	239,0	0,74
81,53	109,5	1,49	01,56	225,3	0,90
82,54	103,0	1,48	02,59	216,4	1,03
83,60	99,3	1,49	03,53	203,7	1,07
84,59	93,0	1,67	04,55	193,6	1,14
85,58	90,0	1,69	05,61	189,3	1,13
86,60	86,6	1,48			
87,60	81,4	1,56			
88,58	75,7	1,68			
89,56	72,9	1,50			

Tyto hodnoty převedeme nyní grafickou interpolací na začátky let. Obr. 4 je sám sebou dosti jasný, takže nepotřebuje bližšího výkladu. Podotýkám jen, že na vodorovné ose jsou nanesena léta, na levém okraji poziční úhly ve stupních, na pravém vzdálenosti v setinách sekundy. Samozřejmě by v konkrétním případě bylo nutno mít zřetel také k váze jednotlivých bodů (počtu pozorování v nich sjednocených). Výsledek této interpolace je shrnut v tabulce:

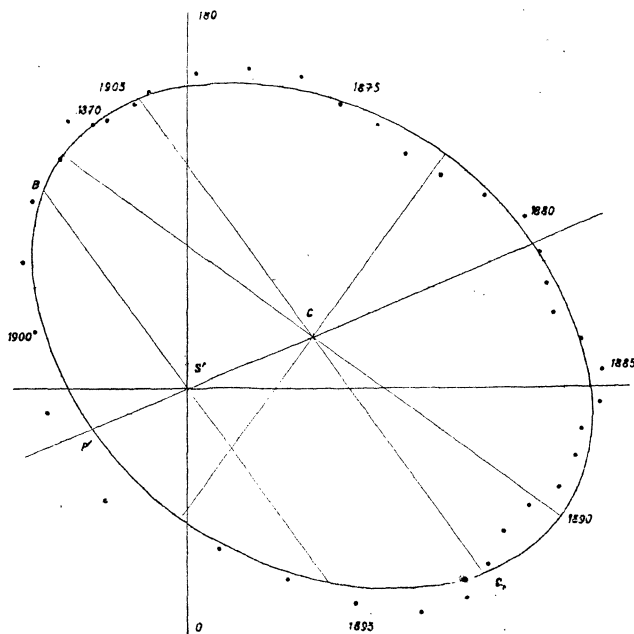
	Θ	ϱ		Θ	ϱ
1870	197,0	1,11	1890	71,0	1,44
71	187,0	1,18	91	66,0	1,38
72	178,5	1,25	92	60,0	1,39
73	169,5	1,29	93	53,0	1,39
74	160,5	1,32	94	46,0	1,29
75	152,5	1,29	95	38,0	1,09
76	144,5	1,27	96	27,5	0,86
77	137,0	1,27	97	11,0	0,65
78	130,0	1,31	98	328,0	0,56
79	123,0	1,40	99	280,0	0,56
1880	117,0	1,49	1900	250,5	0,65
81	111,5	1,50	01	233,0	0,82



Obr. 4.

82	106,5	1,49	02	221,0	0,96
83	101,5	1,48	03	210,0	1,04
84	97,0	1,57	04	199,5	1,10
85	92,5	1,65	05	192,5	1,16
86	88,0	1,64			
87	84,0	1,58			
88	79,5	1,57			
89	75,0	1,53			

Tyto polohy zaneseme nyní do soustavy polárných souřadnic θ, ρ se středem S' . Vzniklými body proložíme elipsu, aby co nejlépe k nim se přimykala a při tom vyhovovala 2. zákonu Keplerovu (obr. 5). Elipsu nutno rýsovat s největší pečlivostí a ve velkém měřítku: zdar výpočtu závisí na její přesnosti. V obr. 5 změříme nyní úsečky CS' a CP' a vypočteme $CS' : CP' = \varepsilon$. Dostáváme



Obr. 5.

$\varepsilon = 0,568$. Mezi nekonečným počtem tětiv, které lze vésti bodem S (ohniskem skutečné elipsy!) jest jedna, která jest bodem S půlena (SB). Jest to průmět kolmice v ohnisku skuteč. elipsy vztyčené na velkou osu. K této tětivě položíme rovnoběžku bodem C — to jest průmět malé osy. Nyní změříme úhleměrem úhly $OSP' = \alpha$, $OS'B = \beta$ a dále změříme úsečky $CP' = a'$, $CQ'_0 = b'$.

Dostáváme:

$$\alpha = 293,0^\circ, \quad \beta = 215,3^\circ; \quad a' = 0,95'', \quad b' = 1,16''.$$

Pro rovnici (8) potřebujeme ještě b_1^2 . Jak výše uvedeno, jest $b_1 = b' \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, odtud snadno

$$\begin{aligned} b_1'^2 &= 1,9865, & b_1'^2 - a'^2 &= 1,084, & \alpha - \beta &= 77,6^\circ, \\ a'^2 &= 0,9025, & b_1'^2 + a'^2 &= 2,889, & \alpha + \beta &= 148,4^\circ. \end{aligned}$$

Z rovnice (8):

$\log (b'^2 - a'^2)$	0,03503	
$\text{colog} (b'^2 + a'^2)$	9,53925	
$\log \tan (\alpha - \beta)$	0,65785	148,4 — $2\Omega = 59,6^\circ$
$\log \tan (\alpha + \beta - 2\Omega)$	0,23213	$\Omega = 44,4^\circ$

Z rovnice (10):

$\log \tan (\alpha - \Omega)$	0,40683	0,40683
$\log \tan (\beta - \Omega)$	9,19971	9,19971
	1,20712	9,60654
$\log \tan \omega =$	0,60356	$\log \cos i = 9,80327$
$\omega =$	104,0°	$i = 50,5^\circ$

Z rovnice (12):

V případě pohybu zpětného (retrográdního) zavedeme $\omega' = 360 - \omega$.

Z rovnice (11):

$\log a'$	9,97772	
$\log \cos (\alpha - \Omega)$	9,56215 <i>n</i>	
$\log \sec \omega$	0,61632 <i>n</i>	
$\log a$	0,15619	$a = 1,43''$

Nyní zbývá ještě vypočísti oba elementy dynamické T a P . Postup bude tento: Z rovnice (14) vypočteme pravou anomálii v , dosadíme do rovnice (15), z níž obdržíme excentrickou anomálii E , z níž plyne, jak jsme ukázali, μ , T a P . K výpočtu je třeba aspoň dvou posíčních úhlů Θ , Θ' příslušných k datům τ , τ' . Pro kontrolu a ke zvýšení přesnosti vezmeme ještě třetí p. úhel Θ'' , příslušný k datu τ'' . Výpočet zařídíme podle následujícího, snadno srozumitelného schématu.

Shrňme nyní nalezené výsledky a srovnáme je s elementy, které obdržel *Lewis* a nověji (1917) *Comstock*.

	Lewis:	Comstock:
$T = 1899,7$	$T = 1898,3$	$T = 1898,77$
$P = 34,84$	$P = 35,15$	$P = 34,46$
$\varepsilon = 0,568$	$\varepsilon = 0,556$	$\varepsilon = 0,458$
$\Omega = 44,4^\circ$	$\Omega = 44,0^\circ$	$\Omega = 51,6^\circ$
$\omega = 104,0^\circ$	$\omega = 105,4^\circ$	$\omega = 113,3^\circ$
$i = 50,5^\circ$	$i = 50,7^\circ$	$i = 47,5^\circ$
$a = 1,43''$	$a = 1,44''$	$a = 1,35''$
μ retrogr.	μ retrogr.	μ retrogr.

Shoda je tedy jistě uspokojivá. Jedině pro T vychází hodnota poněkud veliká, což ostatně přímo ukazuje obr. 5, z něhož je patrné, že průchod periheliem nastal během r. 1898. Tato neshoda

mezi výpočtem a grafem je poučným ukazatelem stupně přesnosti užitě elipsy.

	1870	1875	1870	1875
τ	157,0	152,5	199,5	199,5
Θ	197,0	197,0	9,66669 n	9,66669 n
$\log \tan (\Theta - \alpha)$	9,71462 n	0,48565 n	0,19673	0,19673
$\log \sec i$	0,19673	0,19673	9,86342 n	9,86342 n
$\log \tan (\omega' + v)$	9,91135 n	0,68238 n	143,9°	101,7° + 360°
$\omega' + v$	140,8° + 360°	101,7° + 360°	-112,1°	205,7°
v	244,8°	205,7°	0,17183 n	0,17183 n
$\log \tan \frac{1}{2}v$	0,19749 n	0,64185 n	9,72007	9,72007
$\log \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$	9,72007	9,72007	9,89190 n	9,89190 n
7) $\log \tan \frac{1}{2}E$	9,91756 n	0,36192 n	-37,94°	113,50°
$\frac{1}{2}E$	140,41°	113,50°	-75,88°	227,00°
$\log \varepsilon$	280,82°	227,00°	9,75435	9,75435
$\log \sin E$	9,75435	9,75435	9,98668 n	9,98668 n
$\log \varepsilon \sin E$	9,99221 n	9,86413 n	9,74103 n	9,74103 n
$\varepsilon \sin E$	9,74656 n	9,61848 n	-0,55085 = -31,56°	-0,41540 = -23,80°
$E - \varepsilon \sin M = M$	-0,55790 = -31,97°	-0,41540 = -23,80°	-44,32	250,80°
$M - M'$	312,79°	295,12°	—	295,12°
$P = 360 \cdot \frac{\tau - \tau'}{M - M'}$	357,11°	35,40	—	35,40
$M\tau'$	34,28	—	—	—
$M'\tau$	595552	477523	—	477523
$M'\tau - M\tau'$	— 82878	— 83100	—	— 83100
T	— 678430	— 560623	—	— 560623
	1899,8	1899,6	—	1899,6

*) Úhel $\omega' + v$ ve sloupcích „1875“ a „1870“ nutno zvětšiti o 360°, protože příslušné polohy vztahují se na předcházející oběh družice, jejíž pohyb je retrogradní.

7) Excentr. anomalie E a pravá anomalie v mají nutně stejné znam.

K úplné orientaci o poměrech dvojhvězdné soustavy zbývá nyní ještě určití délku velké poloosy dráhy v astr. jednotkách (= poloměr zemské dráhy) a hmotu soustavy po př. jednotlivých složek. Značí-li A délku velké poloosy v astr. jednotkách, pak jest podle definice paralaxy $A = a/p$. K výpočtu hmoty uijeme 3. zákona Keplerova v té formě, jak jsme jej uvedli na začátku tohoto článku:

$$\frac{A^3}{(m_1 + m_2) P^2} = C.$$

Stejně platí však pro soustavu Slunce — Země (hmota Slunce = 1, v. poloosa z. dr. = 1)

$$\frac{1}{(1 + m') P'^2} = C.$$

A tudíž, zanedbáme-li hmotu Země m' a vezmeme-li rok za časovou jednotku,

$$\frac{A^3}{(m_1 + m_2) P^2} = 1.$$

Je-li dále Δ vzdálenost hvězdy od Slunce, tu

$$\frac{(A/\Delta)^3}{(m_1 + m_2) P^2} = (1/\Delta)^3.$$

Ježto však $A/\Delta = a$, $1/\Delta = p$ paralaxa dvojhvězdy, jest dále

$$m_1 + m_2 = \left(\frac{a}{p}\right)^3 \left(\frac{1}{P}\right)^2.$$

Paralaxa hvězdy ζ Herculis byla často měřena. Přijmeme-li hodnotu, kterou *J. Haas*⁸⁾ obdržel ze souhrnu novějších měření, totiž $p = 0,098''$ a dosadíme-li za a a P hodnoty právě vypočtené, obdržíme ihned

$$m_1 + m_2 = 2,57 \text{ hmot slunečních.}$$

Je patrnó, že toto číslo velmi citlivě závisí na a i p .

Ve skutečnosti obě složky popisují okolo společného gravitačního centra podobné elipsy, jejichž rozměry jsou obráceně úměrny hmotám obou těles. Jsou-li a_1 , a_2 velké poloosy obou drah, tu $a_1 + a_2 = a$ a $a_1 : a_2 = m_2 : m_1$. Známe-li tedy z pozorování poměr a_1/a_2 rozměrů obou drah, můžeme určití i obě hmoty jednotlivě. Pro ζ Her nalezl *Van den Boss*⁹⁾ $m_2/m_1 = 0,43$, což s hořejším vztahem dává

$$m_1 = 1,8, \quad m_2 = 0,8.$$

⁸⁾ Die nächsten Fixsterne. Veröf. d. Univ. Sternw. Berlin-Babelsberg, III, 3, S. 43. 1923.

⁹⁾ Podle E. Bernewitz, Üb. d. Dichten d. Doppelsterne. A. N. 213. 1.

Pro velkou poloosu pak vychází $A = 14,6$ astr. jed. Z Comstockových elementů odvozuje Haas $m_1 = 1,5$, $m_2 = 0,7$, $A = 13,5$. Jest tedy hmota hlavní hvězdy něco větší, družice menší než hmota Slunce. Družice obíhá ve vzdálenosti něco větší než je vzdálenost Saturna (9,5 a. j.), ale menší než vzdálenost Urana (19,2). Rozměry a hustotu složek možno naléztí pouze odvozením povrchové teploty na základě zákonů záření, což překračuje úkol tohoto článku. Na jednu zajímavou okolnost chtěl bych však ještě upozorniti: V obr. 5 jsou jednotlivé roční polohy družice rozloženy tak, jako by náležely jakési epicykloidě. Tento tvar dráhy je tak nápadný, že sotva lze jej přisouditi chybám pozorovacím, zvláště všimneme-li si různé délky „vln“ v okolí perihelia a aphelia. Jest to tak, jako by družice obíhala ještě kolem jiného centra, které teprve krouží kolem centra celé soustavy. Lze napočítati 5—6 takových „vln“, což by značilo, že podružný oběh trvá asi 6 let. Podle toho byla by tedy hvězda ζ Her hvězdou potrojnou.

PŘEHLED.

O úhlu pravoúhlého trojúhelníka. V jednom ze starších čísel „Učit. novin“ uvádí red. K. Steinich bez důkazu vzorec, kterým možno *přibližně* vypočítati úhel pravoúhlého trojúhelníka. Jsou-li a, b odvěsny, c přepona, α, β protilehlé úhly odvěsnám, je ve stupních

$$\alpha \doteq 172 \frac{a}{b + 2c};$$

podmínkou jest, aby $\alpha < 45^\circ$, tedy aby se počítal úhel protilehlý straně menší.

Tento vzorec v naší poznámce odvodíme.

Při obvyklém označení platí vzorec:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}. \quad (1)$$

Rozvineme-li v řadu $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$, při čemž se spokojíme se dvěma prvními členy, máme:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 = \alpha (1 - \frac{1}{6} \alpha^2), \quad (2)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2. \quad (3)$$

Z rovnice (2) jde: