Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O jisté affinní poloze mezi ellipsou a kruhem

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 3, 333--335

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120859

Q, Q_1. Podobně protíná rovnoběžka jdoucí středem O s tětivou S_1m' kruh (On) $[On' = n]$ ve dvou bodech R, R_1 ellipsy.

Stane-li se tětiva $m'On'$ průměrem $a'Ob'$ kruhu $(S_1m'_1)$, lze obdržeti analogickou konstrukcí osy ellipsy, z nichž jedna jest rovnoběžná s $b'S_1$ a polovice její rovná se délce $Oa' = a$ a druhá jde rovnoběžně k $a'S_1$ a má délku úsečky $Ob' = b$ *).

Ježto ellipsa jest v affinní poloze s kruhem (O, m) ve směru S_1m' a s kruhem (O, n), jehož poloměr $On' = n$, ve směru S_1n', a poněvadž kruhy zmíněné jsou podobně položeny dle středu O, lze sestrojiti body P ellipsy takto: V kruzích (O, m), (O, n) vyznačí se podobně položené body m'_I, n'_I dle poměru

$$\frac{m'_I O}{n'_I O} = \frac{m'O}{n'O}$$

vzhledem ke středu O, pak sestrojí se skrze body m'_I, n'_I rovnoběžky s tětivami $m'S_1$ resp. $n'S_1$, a vyznačí se bod P, v němž se dotčené rovnoběžky sekou.

Konstrukce uvedené jsou na úhlu S_1OT_1 nezávislé a zůstávají tudíž i v platnosti, jsou-li $OT_1 = a$, $OS_1 = b$ poloosy ellipsy.

V Telči dne 26. května 1908.

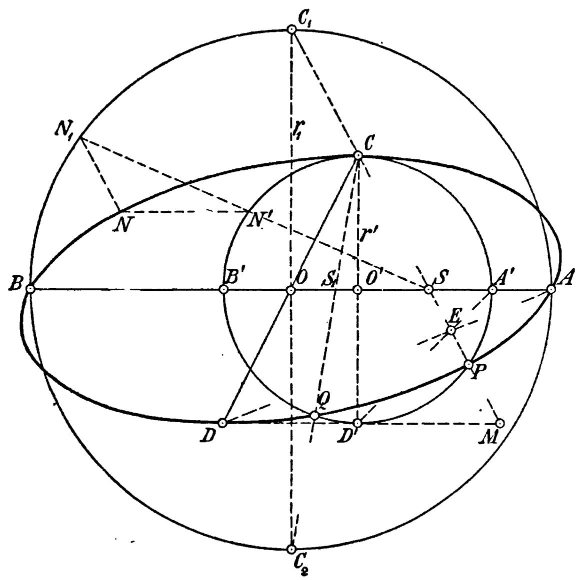
O jisté affinní poloze mezi ellipsou a kruhem.

Napsal **V. Jeřábek.**

Budiž dána ellipsa sdruženými průměry AOB a COD; sestrojme kruh (O, r_1) ze středu O poloměrem $OA = r_1$ a v kruhu tomto vyznačme průměr C_1OC_2 kolmý ku AB. Narýsujme dále kruh (O', r') mající svůj střed O' na průměru AB a dotýkající se ellipsy v bodě C. Poloměr $O'C = r'$ tohoto kruhu stojí kolmo na AB a paprsek C_1C protíná průměr AB ve středu podobnosti S kruhů (O, r_1), (O', r') a to tak, že podobně položené body A, A'; B, B' kruhů (O, r_1), (O', r') dle středu S jsou body příslušnými affinní polohy mezi ellipsou a

*) Touž konstrukci, jiným způsobem odvozenou, podává prof. J. Sobotka ve své »Deskriptivní geometrii« na str. 270 v obr. 205. a na str. 271 v obr. 206.

kruhem (O', r') dle směru AA' nebo BB'. Prodloužíme-li poloměr CO' až k bodu D' kružnice (O', r'), jsou též body D a D' affinně přidruženy. Jedním bodem osy affinity jest bod C, neboť s ním splývá affinně přidružený bod C' ve směru AA', a ve druhém bodě E protínají se příbuzné přímky AD, $A'D'$. Dokážeme, že bod E leží na paprsku C_1C, čili, že C_1C jest osou



affinity. Přímka DD' nechť protne C_1C v bodě M, i jest potom v podobně položených kruzích (O, r_1), (O', r')

$$\frac{OS}{O'S} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{r_1}{r'},$$

tedy

$$\frac{DM}{D'M} = \frac{AS}{A'S} = \frac{r_1}{r'},$$

protínají se tudíž AD a $A'D'$ na C_1C v bodě E; C_1C jest osou affinity, a bod P, v němž tato osa protíná kružnici (O', r'), náleží též ellipse.

Dle analogie paprsek CC_2 jdoucí vnitřním středem podobnosti S_1 kruhů (O, r), (O', r') jest osou druhé affinní polohy mezi ellipsou a kruhem (O', r'), pročež protíná osa CC_2 kružnici (O', r') v bodě Q, který též přináleží ellipse.

Kruhy (O, r_1), (O', r') jsou podobně položeny dle středu S a ellipsa jest v affinní poloze s kruhem (O, r_1) ve směru CC_1 vzhledem k ose AB a s kruhem (O', r') ve směru AA' a dle osy CC_1. Vytkneme-li tedy v kruzích (O, r_1), (O', r') podobně položené body N_1, N', protne dle čl. 9. na str. 327. rovnoběžka vedená bodem N_1 k CC_1 rovnoběžku, jdoucí bodem N' k AB, v bodě N ellipsy.

Obdobně lze sestrojiti body ellipsy pro vnitřní střed podobnosti S_1 kruhů (O, r_1), (O', r') a vzhledem ku směrům AB' a CC_2,

Kdybychom pošinuli kruh (O', r') ve směru $O'O$ do polohy (O, r'), stal by se bod O středem podobnosti kruhů (O, r_1), (O, r'), paprsek jdoucí středem O protínal by kruhy (O, r_1), (O, r') v podobně položených bodech L_1, L', na př. po téže straně středu O, a rovnoběžka L_1L k C_1C protínala by rovnoběžku $N'N$ k AA' v bodě L ellipsy. Kdyby body N_1, N' ležely po různých stranách středu O, pak by místo směru C_1C nastoupil směr CC_2*). Též vysvítá, že koncové body průměrů kruhu (O, r') rovnoběžné k CC_1 a CC_2 přináležejí ellipse, ježto průměry tyto jsou osy příslušných affinit mezi kruhem (O, r') a ellipsou.

Kterak lze sestrojiti průsečné body ellipsy s kružnicí mající s ellipsou jeden průměr společný.

Napsal **V. Jeřábek.**

Dříve, než k vlastnímu úkolu přikročíme, připomeňme si některých vlastností affinní polohy, ellipsy a s ní soustředné kružnice, o které při řešení úkolu budeme se opírati:

Ellipsa (M) budiž dána průměrem AB a sdruženou tětivou MN v bodu M_0 rozpůlenou průměrem AB. Kružnice (M_1) nad průměrem AB sestrojená protíná kolmici postavenou v bodu M_0 ku AB v bodech M_1, M_2.

---

*) Viz Dr. J. Sobotka: Deskriptivní geometrie str. 262, obr. 198.