Václav Jeřábek

O úpatnici ellipsy a některých konstrukcí ellipsy se týkajících

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 3, 321--333

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120854

O úpatnici ellipsy a některých konstrukcích ellipsy se týkajících.

Napsal **V. Jeřábek.**

1. Obr. 1. Je-li O' kterýmkoliv bodem ležícím v rovině ellipsy o daném středu O a poloosách a, b, jest geom. místem paty M' kolmice spuštěné s bodu O' na kteroukoliv tečnu ellipsy úpatnice této ellipsy vzhledem k bodu O' jakožto polu, který jest dvojným bodem úpatnice.

Spustíme-li s bodu O kolmici na $O'M'$, bude geom. místem bodu M kružnice mající OO' za průměr a protínající hlavní osu ellipsy v bodě B a malou v bodě A. Kružnici sestrojenou nad průměrem AB znamenejme (AB). Rozdělme průměr AB bodem S v poměru $\frac{AS}{SB} = \frac{a}{b}$ a vyznačme délku $Sa = a$ na SA a $Sb = b$ na SB. Kruh (ab) *) seče tětivu MN kruhu (AB) jdoucí bodem S v bodech m, n podobně položených s body M, N dle středu S, a $MM' = Sm$, z čehož plyne jednoduché sestrojení bodu M' úpatnice na základě podobné polohy kruhů (AB) a (ab).

Abychom dokázali, že $MM' = Sm$, spusťme se středu O kolmici $OP = p$ na tečnu ellipsy, v níž bod M' úpatnice jest vytčen. Zvolíme-li OB a OA za osy x, y pravoúhlé soustavy souřadnic a je-li φ úhlem, o nějž tečna $M'P$ od kladného směru osy x jest odchýlena, má tečna $M'P$ rovnici

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi - p = 0,$$

ve které

$$p = OP = MM' = \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}. \qquad (1)$$

Snadno lze nahlédnouti, že úhel $mab = MAB = MOB = \varphi$ a že v trojúhelníku amS, v němž $Sa = a$, $Sb = b$, $am = u$,

*) Vůbec značí (XY) kruh, jehož průměr jest XY.

$bm = v$, $mS = m$ a úhel $aSm = \omega$, dle věty Carnotovy

$$u^2 = a^2 + m^2 - 2am \cos \omega$$
$$v^2 = b^2 + m^2 + 2bm \cos \omega.$$

Vyloučíme-li ω z těchto rovnic, obdržíme

$$bu^2 + av^2 = (a + b)(ab + m^2).$$

V trojúhelníku pravoúhlém abm jest

$$u = (a + b) \cos \varphi, \quad v = (a + b) \sin \varphi,$$

vyloučíme-li u, v z posledních tří rovnic, bude

$$m^2 = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi. \qquad (2)$$

Srovnáním rovnic (1) a (2) obdržíme

$$MM' = OP = p = m,$$

jak jsme tvrdili.

Tím jsme vedeni k následující konstrukci úpatnice.

Obr. 1. — *Buďtež dány dva kruhy* (ab), (AB), *jejichž průměry* ab, AB *jsou podobně položeny dle středu* S *položeném na řečených průměrech. Pevným bodem* O', *zvoleným na kružnici* (AB), *jdoucí paprsek protíná kružnici* (AB) *ještě v bodu* M, *jemuž v kruhu* (ab) *přísluší podobně položený bod* m *vzhledem ku středu* S. *Učiníme-li na* $O'M$ *délku* $MM' = MM''$ $= Sm = m$, *jest geom. místem bodů* M', M'' *úpatnice ellipsy pro pol* O'. *Bod* O, *jenž leží v kruhu* (AB) *diametrálně naproti bodu* O', *jest středem ellipsy, jejíž poloosa jedna má na* OB *délku* $a = Sa$ *a druhá na* OB *délku* $b = Sb$.

Přistupme nyní k řešení některých úloh ellipsy se týkajících.

3. *Sestrojiti ellipsu pomocí dvou kruhů* (AB) *a* (ab) *dle středu* S *podobně položených.* (Obr. 1.)

Průvodiče ellipsy na OM obsaženého znamenejme $OR = \varrho$ a na ON $OQ = \varrho_1$. Je-li O polem a OB osou polární, má ellipsa rovnici polární

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Násobíme-li rovnici tuto s rovnicí (2) a odmocníme-li zároveň, bude

$$\varrho m = ab. \qquad (3)$$

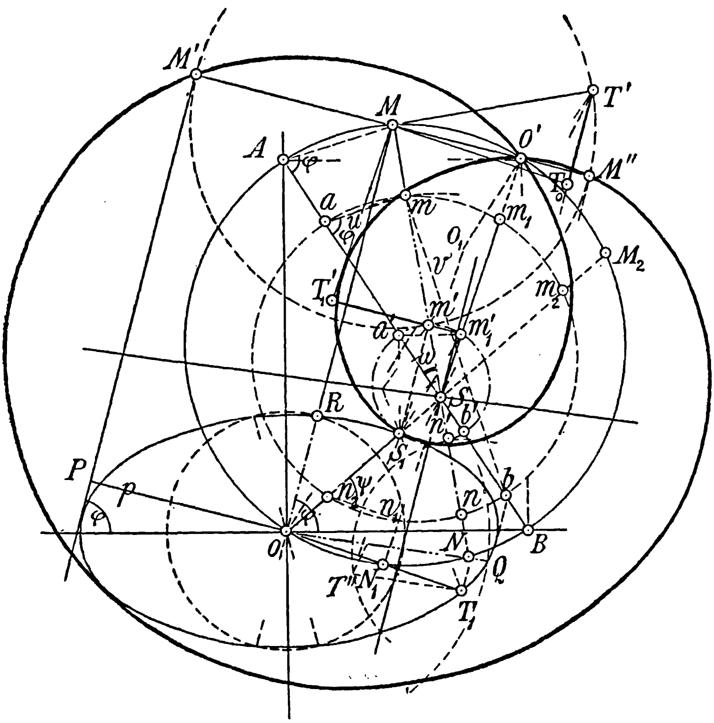
Mocnost bodu S vzhledem ke kruhu (ab) jest

$$Sm \,.\, Sn = Sa \,.\, Sb,$$

čili

$$mn = ab, \tag{4}$$

značíme-li délky $Sm = m$, $Sn = n$, $Sa = a$, $Sb = b$.



Obr. 1.

Dělením rovnic (3) a (4) obdržíme konečně

$$\varrho = n.$$

Poznáváme, že průvodič $OR = \varrho$ na OM rovná se délce $Sn = n$. Obdobně má průvodič OQ na ON délku $OQ = Sm = m$.

Můžeme tedy ellipsu sestrojiti takto:

Jsou dány dva podobně položené kruhy (AB), (ab) dle středu S, jejichž průměry AB, ab leží v jediné přímce obsahující bod S, a buďtež O, O' pevné koncové body průměru OO' kruhu (AB). Spojme bod O s krajními body M, N tětivy MN kruhu (AB) jdoucí středem S, vyznačme v kruhu (ab) podobně položené body m, n k bodům M, N dle středu S, a učiňme na OM průvodiče $OR = Sn$ a na ON průvodiče $OQ = Sm$; tím obdržíme dva body R, Q ellipsy. Splyne-li tětiva MN s průměrem AB, obdržíme analogickou konstrukcí osy ellipsy.

4. Obr. 1. *Jiné sestrojení úpatnice.* Kružnice (M, m) ze středu M poloměrem $MM' = m$ sestrojená protíná tětivu MN v bodě m', a učiníme-li na průměru AB délku $Aa' = aS = a$, $Bb' = bS = b$, bude $Sm' = mM$, $Sa' = aA$, $Sb' = bB$. Ježto poměr

$$\frac{mM}{Sm} = \frac{aA}{Sa} = \frac{bB}{Sb},$$

jest též

$$\frac{Sm'}{Sm} = \frac{Sa'}{Sa} = \frac{Sb'}{Sb},$$

poslední dva poměry jsou však hodnoty stálé, pročež má i poměr $\frac{Sm'}{Sm}$ hodnotu stálou, jest tudíž geom. místem bodu m' kružnice $(a'b')$ podobně položená s kružnicí (ab) i (AB) vzhledem ku středu S, a to první dle poměru $\frac{Sa'}{Sa}$ a druhá dle poměru $\frac{Sa'}{SA}$. Takto dospíváme k novému sestrojení úpatnice ellipsy:

Jsou dány dva podobně ležící kruhy (AB), $(a'b')$ dle středu S, jejichž podobně položené průměry ASB, $a'Sb'$ jsou v téže přímce. Na kružnici (AB) vytkněme pevný bod O', a protněme kružnici $(a'b')$ paprskem MS v bodě m', jenž podobnou polohou přísluší bodu M. Kružnice (M, m) ze středu M sestrojená a jdoucí bodem m' seče spojnici $O'M$ ve dvou bodech M', M'' úpatnice ellipsy vzhledem k polu O'; střed ellipsy leží v kruhu (AB) diametrálně naproti bodu O', osa její na OB má délku $a = Aa'$ a osa na OA délku $b = Bb'$.

5. *Sestrojiti jeden z bodů R, ve kterém ellipsa a s ní soustředný kruh (O, n) se protínají, je-li ellipsa dána poloosami a, b.* (Obr. 1.)

Sestrojme kteroukoliv kružnici (AB) protínající velkou osu ellipsy v bodě B a malou v bodě A, rozdělme její průměr AB bodem S v poměru $\frac{AS}{SB} = \frac{a}{b}$, nanesme na SA délku $Sa = a$ a na Sb délku $Sb = b$, a sestrojme kruh (ab). Ze středu S poloměrem daným $OR = n$ opišme kružnici (S, n), protínající kružnici (ab) na př. v bodě n, a prodlužme nS až k bodu M kružnice (AB), pak kružnice daná (O, n) protíná OM v hledaném bodě R. Sestrojení ostatních společných bodů ellipsy a kružnice (O, n) vyplývá ze souměrnosti středové a osové ellipsy.

6. *Sestrojiti kruh* (M, m) *o daném poloměru* m, *který jest s danou ellipsou v osové affinitě, je-li ellipsa dána poloosami* a, b. (Obr. 1.)

Narýsujme kterýkoliv kruh (AB) jdoucí středem ellipsy a protínající vedlejší osu ellipsy v bodě A a hlavní v bodě B. Sestrojme bod S a kruh (ab) jako v úloze předešlé, a protněme daným poloměrem $Sm = m$ ze středu S kružnici (ab) na př. v bodě m, prodlužme Sm k bodu M kružnice (AB) a narýsujme kruh (M, m); tím obdržíme affinní polohu mezi kruhem a ellipsou, jejichž příbuzné body jsou M a O.

Přijde-li bod M po kružnici (AB) do bodu O', dospěje bod N do polohy N_1, jenž jest bodem koncovým tětivy $O'SN_1$ kruhu (AB) jdoucí bodem S. Buďtež m'_1, m_1 a O' body podobně položené kružnic $(a'b')$, (ab) a (AB) vzhledem ku středu S. Naneseme-li na ON_1 délku OT_1, jenž se rovná stejným délkám m'_1O' a Sm_1, bude OT_1 poloměrem ellipsy, na němž v bodu N_1 stojí tětiva N_1SO' kolmo z důvodu, že obvodový úhel ON_1O' jest pravý.

Uvedeme-li tětivu MSN v kruhu (AB) do polohy M_2SO, přijde její bod n' po kružnici $(a'b')$ a zároveň s ním bod R po ellipse do bodu S_1, který jest podobně položen s bod O kružnice (AB) vzhledem ku středu S a poměru $\frac{SS_1}{SO} = \frac{Sm'}{SM'}$, pročež jest spojnice S_1m' rovnoběžna se směrem affinity OM, a bodu S ellipsy přísluší polohou affinní bod m' kružnice (M, m). Bod S, ve kterém protínají se příbuzné přímky OS_1 a Mm', jest jedním bodem osy affinity, která, jak později ukážeme, jest rovnoběžna s poloměrem OQ.

7. *OS_1 a OT_1 jsou sdružené poloměry ellipsy.* (Obr. 1.)

Bodům O', M_2, N_1, O kružnice (AB) nechť přísluší v kružnici (ab) resp. body m_1, m_2, n_1, n_2 podobně položené dle středu S. Mocnost bodu S v kruhu (ab), absolutně vzato, jest

$$Sn_1 \, . \, Sm_1 = Sa \, . \, Sb = ab,$$

a že $Sm_1 = OT_1$, jest též

$$Sn_1 \, . \, OT_1 = ab, \tag{5}$$

avšak v trojúhelníku pravoúhlém Sn_1n_2, znamená-li ψ úhel $Sn_2n_1 = SON_1$, jest

$$Sn_1 = Sn_2 \sin \psi = OS_1 \sin \psi,$$

neboť $Sn_2 = OS_1$; dosadíme-li za Sn_1 hodnotu $OS_1 \sin \psi$ do rovnice (5), bude

$$OS_1 \, . \, OT_1 \sin \psi = ab.$$

Z rovnice této vysvítá, že OS_1 a OT_1 jsou sdružené poloměry ellipsy.

8. *Affinní poloha mezi ellipsou, určenou dvěma poloměry sdruženými OS_1, OT_1, a kruhem (M, m) geometricky dokázaná.* (Obr. 1.)

Spusťme s bodu S_1 kolmici na OT_1 a učiňme na ní v kterémkoliv směru $S_1O_1 = OT_1$. Na spojnici OO_1 vytkněme kdekoliv bod O', veďme jím stejnosměrku $O'm'_1$ s O_1S_1, nanesme na ní $O'm'_1 = O_1S_1 = OT_1$, a sestrojme kruh $(S_1m'_1)$ nad průměrem $S_1m'_1$. Bodem S, v němž OS_1 a $O'm'_1$ se protínají, veďme některý paprsek, jenž seče kružnici $(S_1m'_1)$ v bodě m', a předpokládejme, že kruh (M, m) má svůj střed na paprsku Sm', že prochází bodem m' $(Mm' = m)$ a jest s ellipsou v affinní poloze ve směru OM. Sdruženým poloměrům OS_1, OT_1 ellipsy nechť přísluší affinní polohou v kruhu (M, m) kolmé poloměry Mm' a MT', pak jsou OM, S_1m' a T_1T' navzájem rovnoběžny. Dokážeme nyní, že bod M leží na kruhu (OO') nad průměrem OO' sestrojeném. K tomu cíli veďme $MT_0 = OT_1$ stejnosměrně s OT_1 a spusťme $MT'_1 = O'm'_1 = OT_1 = MT_0$ kolmo na OT_1. Trojúhelník MT'_1m' jest otočenou polohou trojúhelníka MT_0T' kolem vrcholu M o úhel pravý, pročež stojí T'_1m' kolmo na paprsku T_1T_0T', tedy též na OM i na S_1m', a prochází bodem

m'_1, neboť obvodový úhel $S_1m'm'_1$ v kruhu $(S_1m'_1)$ jest pravý. Ježto ve čtyřúhelníku $MT'_1m'_1O'$ strany MT'_1 a $O'm'_1$ ve stejných směrech mají stejné délky, jest čtyřúhelník ten rovnoběžníkem, jehož strana T'_1m' stojí kolmo na OM; pročež stojí též protější strana MO' na OM kolmo, a ježto úhel OMO' jest pravý, leží bod M na kružnici (OO'). Tedy:

Kruh (OO') jest geom. místem středu M kruhu (M, m), který jest v affinní poloze s ellipsou ve směru OM vzhledem k ose bodem S procházející.

9. *O třech útvarech U_1, U_2, U_3, z nichž jsou U_1, U_2 podobně a U_1, U_3; U_2, U_3 affinně položeny.*

Buďtež útvary U_1, U_2 *) podobně položeny dle středu S. Kterémukoliv bodu A_1 útvaru U_1 nechť přísluší podobně položený bod A_2 útvaru U_2. Sestrojíme-li úsečky A_1A_3 a A_2A_3 ve dvou daných směrech, pak jest A_3 kterýmkoliv bodem A_3 útvaru U_3. Předpokládejme, že útvary U_1, U_3 jsou v affinní poloze dle směru A_1A_3 a útvary U_2, U_3 ve směru A_2A_3; hledejme osy těchto dvou affinit. Především jest patrno, že osy affinit pocházejí středem S, neboť s bodem tímto splývají body S_1, S_2, S_3. Vytvoří-li bod A_1 v útvaru U_1 některou přímku a_1, popíše bod A_2 v útvaru U_2 přímku a_2 podobně položenou s přímkou a_1 dle středu S a bod A_3 vytvoří v útvaru U_3 affinně položenou přímku a_3 s a_1 ve směru A_1A_3 a s a_2 ve směru A_2A_3. Přijde-li paprsek SA_1A_2 do polohy rovnoběžné s A_1A_3, splyne strana A_1A_2 v trojúhelníku proměnlivém $A_1A_2A_3$ se stranou A_1A_3 a bod A_2 stotožní se s bodem A_3, čímž stává se rovnoběžka vedená středem S k A_1A_3 osou affinity útvarů U_2, U_3. Z téže příčiny jest i přímka jdoucí rovnoběžně s A_2A_3 osou affinity útvarů U_1, U_3. Můžeme tudíž vysloviti větu:

Jsou-li dva útvary podobně položeny dle středu a je-li útvar třetí v affinní poloze s útvarem jedním ve směru jednom a s útvarem druhým ve směru druhém, procházejí osy obou affinit středem podobnosti, a osa affinity jedné jest rovnoběžna se směrem affinity druhé a naopak.

Větu tuto lze též pronésti takto:

Jsou-li dva útvary U_1, U_2 podobně položeny dle středu

*) Sestrojení obrazce ponechává se čtenáři.

*S a vedeme-li podobně položenými body A_1, A_2 rovnoběžky ve dvou směrech, protnou se rovnoběžky tyto v bodě A_3 útvaru U_3, který jest v affinní poloze s útvarem U_1 dle směru A_1A_3, a s útvarem U_2 dle směru A_2A_3; osa affinity mezi U_1 a U_3 jest rovnoběžna s A_2A_3 a mezi U_2, U_3 s A_1A_3 a obě procházejí středem podobnosti S.**)

10. *Konstrukce ellipsy.* (Obr. 1.) Sestrojíme-li ze středu N poloměrem $Nn' = n$ kruh (N, n), jsou kruhy (M, m), (N, n) dle středu S podobně položeny a každý z nich jest v affinní poloze s ellipsou danou. Směr affinity mezi kruhem (M, m) a ellipsou jest OM, a affinita kruhu (N, n) a ellipsy má ON za směr; procházejí tudíž dle věty čl. 9. osy obou affinit středem podobnosti S a to tak, že osa příbuznosti jedné jest rovnoběžna se směrem příbuznosti druhé a naopak, o čemž jsme již v čl. 6. zmínku učinili. Narýsujeme-li kruh (N, n) a vedeme-li středem S rovnoběžku s OM, protne rovnoběžka kružnici (N, n) ve dvou bodech ellipsy.

Body ellipsy lze též sestrojiti, když v kruhu (M, m) vyznačíme kterýkoliv bod na př. T', jemuž v kruhu (N, n) přísluší podobně položený bod T'' a pak vedeme $T'T_1$ rovnoběžně

---

*) Věta tato jest zvláštním případem věty obecnější: Je-li dán trojúhelník $O_1O_2O_3$ a jsou-li A_1, A_2 body příslušné homologických útvarů U_1, U_2 dle středu O_3 a osy O_1O_2, protnou se spojnice A_1O_2, A_2O_1 v bodě A_3 útvaru U_3, jenž jest homologicky s útvarem U_1 dle středu O_2 a osy O_3O_1 a s útvarem U_2 vzhledem ku středu O_1 a ose O_2O_3. Neboť popíše-li bod A_1 v útvaru U_1 přímku a_1, vytvoří bod A_2 v útvaru U_2 přímku a_2 a přímky a_1, a_2 protínají se na ose homologie O_1O_2 v bodě samodružném. Řada bodů A_1 na a_1 jest perspektivní s řadou bodů A_2 na a_2; řada bodů A_1 promítá se z bodu O_2 svazkem paprskovým $O_2(A_1 \ldots)$ a řada bodů A_2 z O_1 svazkem $O_1(A_2 \ldots)$, svazky tyto jsou projektivní a poněvadž paprsek O_1O_2 jest oběma svazkům společný, jsou svazky dotčené perspektivní a výtvarem jejich jest přímka a_3 jakožto geom. místo průsečíku A_3 příslušných paprsků O_1A_2, O_2A_1. Strana O_3O_1, do níž zapadá zvláštní poloha proměnlivého paprsku $O_3A_1A_2$, protíná homologické přímky a_1, a_2 v homologických bodech X_1, X_2, a poněvadž paprsky O_2X_1 a O_1X_2 mají společný bod X_3, který splývá s bodem X_1, mají přímky a_1, a_3 společný bod ležící na O_1O_3, a útvary U_1, U_3 jsou tudíž homologické vzhledem ku středu O_2 a ose O_1O_3. Obdobně jsou útvary U_2, U_3 homologické pro střed O_1 a osu O_2O_3. Stanou-li se body O_2, O_1 ve stranách O_3O_2, O_3O_1 nekonečně vzdálenými, obdržíme větu v čl. 9. vyslovenou.

k MO a $T''T_1$ rovnoběžně s ON; přímky tyto protínají se v bodě T_1 na ellipse.

11. *Sestrojení společných bodů ellipsy a s ní soustředné kružnice.* (Obr. 1.)

Myslíme-li si kruh (M, m) ve směru MO pošinutý až M přijde do středu O, stane se ON osou příbuznosti ellipsy a kruhu pošinutého; bod Q, ve kterém pošinutý kruh protíná přímku ON jest bodem ellipsy.

12. *Narýsovati kruh (M, m), který jest v affinní poloze s ellipsou určenou sdruženými poloměry OS_1, OT_1, je-li dána osa affinity.*

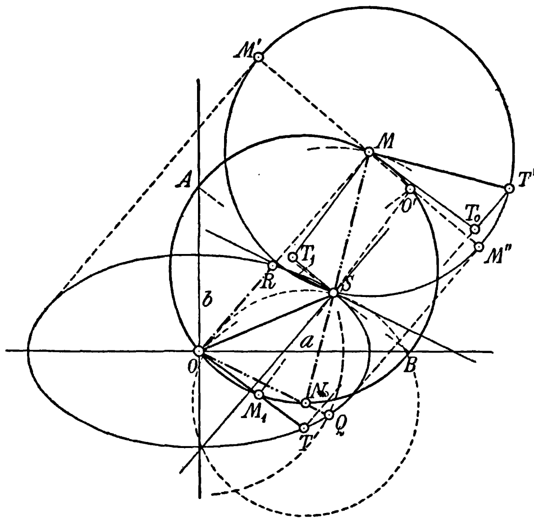
Spusťme s bodu S, v němž seče daná osa poloměr OS_1, kolmici na poloměr OT_1 a nanesme na ní od bodu S v kterémkoliv směru délku $SO' = OT_1 \cdot \frac{OS}{OS_1}$, pak střed M kruhu $(M$ $m)$ jest na kružnici (OO'). Vedeme-li v kruhu (OO') tětivu ON rovnoběžně s danou osou affinity, protne spojnice NS kružnici (OO') v hledaném středu M. Sestrojíme-li bodem S_1 rovnoběžku s OM, jest průsečík m' rovnoběžky této s přímkou MS affinně položen s bodem S_1, pročež jest kružnice (M, m), bodem m' jdoucí, hledanou kružnicí*).

13. Splyne-li bod O' s bodem O_1, (obr. 1.) sjednoti se kruh (ab) s kruhem (AB) a kruh $(a'b')$ přechází v bod S, jenž splývá s bodem S_1 ellipsy. (Obr. 2.) Je-li tedy dána ellipsa sdruženými poloměry OS, OT a učiníme-li na kolmici spuštěné s bodu S na OT délku $SO' = OT$ v jednom nebo druhém směru, jest kruh (OO') totožný s kruhem (ab) i (AB), jak již dříve bylo ukázáno. Průměr OO' rovná se buďto součtu nebo rozdílu poloos ellipsy dle toho, je-li bod O' dál neb blíž k poloměru OT položen, než bod S. Dle věty na konci čl. 8. vyslovené platí věta:

---

*) Jiné jednodušší řešení podává prof. Dr. J. Sobotka ve své »Deskriptivní geometrii« na straně 256 v obr. 193. pomocí kruhu sestrojeného nad průměrem, který sdružené poloměry na dané ose affinity omezují. Řešení svrchu uvedeného lze však s výhodou užíti, když se průměr pomocného kruhu stane příliš dlouhým, což se přihodí vždy, když osa affinity jest o malý úhel na př. od poloměru OT_1 odchýlena.

Kruh (OO') jest geom. místem středu M kruhu (M, m), který bodem S ellipsy prochází a jest v affinní poloze s ellipsou ve směru OM, jímž lze od bodu O k affinně položenému bodu M dospěti.



Obr. 2.

Větu tuto lze též přímo dokázati takto*):

Předpokládejme opět, že kruh (M, m), jdoucí bodem S, jest v affinní poloze s ellipsou danou ve směru OM a že sdruženým poloměrům OS, OT ellipsy přináležejí v kruhu (M, m) kolmé sdružené poloměry MS resp. MT', potom jest spojnice TT' rovnoběžna se směrem affinity OM. Veďme bodem M rovnoběžku s OT až k bodu T_0 přímky TT'. Jest patrno, že stejné strany SM a MT', SO' a MT_0 trojúhelníků SMO' a $MT'T_0$ stojí vzájemně na sobě kolmo a že úhly řečených trojúhelníků při vrcholech S a M jsou stejné, pročež jsou dotčené trojúhelníky shodny a jejich třetí stejné strany MO' a $T'T_0$ stojí vzájemné na sobě kolmo. Ježto OM a TT' jsou

*) Na analogický a poněkud složitější důkaz byl jsem upozorněn prof. I. české státní reálky v Brně panem Ant. Kvítkem.

spolu rovnoběžny, stojí též $O'M$ kolmo na OM, z čehož soudíme, že bod M leží na kružnici (OO').

Kruh (N, n) jdoucí bodem S a mající svůj střed v bodu N, v němž MS ještě kružnici (OO') seče, jest též v affinní poloze s ellipsou ve směru ON, a ježto kruhy (M, m), (N, n) jsou podobně položeny vzhledem ku středu S, prochází osa affinity mezi kruhem (M, m) a ellipsou bodem S rovnoběžně s ON, a osou affinní polohy kruhu (N, n) a ellipsy jest rovnoběžka vedená bodem S se směrem affinity OM. Budiž ještě podotknuto, že osy affinit protínají příslušné kružnice (M, m), (N, n) v bodech ellipsy.

Myslíme-li si kruh (M, m) rovnoběžně pošinutý ve směru MO, až jeho střed M přijde do středu O ellipsy, pak stane se ON osou affinity pošinutého kruhu a ellipsy, pročež pošinutý kruh protíná osu ON v bodu Q ellipsy. Tím znova vysvítá, že na ON poloměr $OQ = SM$ a na OM poloměr $OR = SN$.

14. *Sestrojiti ellipsu, je-li dán kruh (OO') a bod S.* (Obr. 2.)

Veďme v kruhu bodem S kteroukoliv tětivu MSN a naneseme na OM délku $OR = NS$ a na ON délku $OQ = MS$; body R, Q přináležejí ellipse jdoucí bodem S, jež má svůj střed v bodě O. Touž konstrukcí pro průměr ASB obdržíme na OB nejdelší poloměr (poloosu) $a = AS$ a na OA nejkratší poloměr (poloosu) $b = BS$. Zároveň poznáváme, že $OO' = AB = a \pm b$ dle toho, má-li bod O' větší nebo menší vzdálenost od poloměru OT než bod S. Konstrukce v tomto čl. uvedené vysvítají z čl. 13.

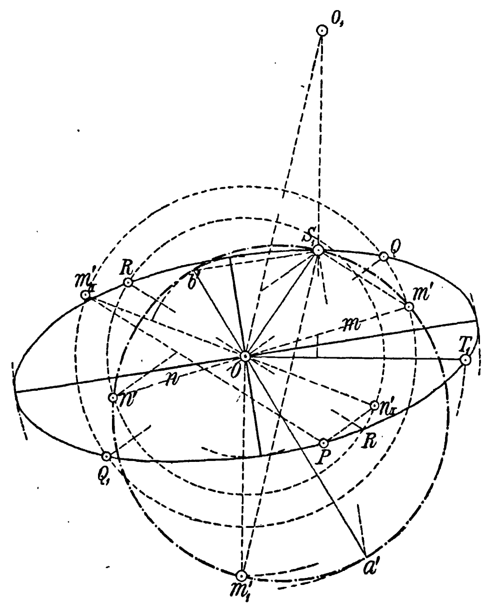
15. *Jsou dány v ellipse sdružené poloměry OS, OT, sestrojiti kruh (AB), ellipsu a její osy.* (Obr. 2.)

Spusťme s bodu S kolmici SM_1 na OT, učiňme na M_1S délku $SO' = OT$ po jedné nebo druhé straně průměru, potom jest (OO') kruhem hledaným a jeho průměr OO' rovná se buďto součtu nebo rozdílu poloos ellipsy. V obrazci $OO' = a + b$. Body ellipsy a její osy sestrojí se dle úlohy čl. 14. Tím přicházíme ke známé konstrukci os ellipsy dané sdruženými poloměry.

16. *Ellipsa jest dána sdruženými poloměry OS, OT; sestrojiti kruh (M, m) o daném poloměru m jdoucí bodem S tak, aby byl s ellipsou v affinní poloze.*

Dle úlohy čl. 15. sestrojí se kruh (OO') a protne se z daného bodu S kružnicí o poloměru m v bodě M; kruh (M, m) jest příbuzný s ellipsou ve směru OM.

Je-li N koncovým bodem tětivy MSN, jest rovnoběžka sestrojená bodem S k ON osou příbuznosti a tedy bod, v němž rovnoběžka kružnici (M, m) seče, přináleží ellipse.



Obr. 3.

17. Zvolíme-li (obr. 3.) bod O' na OO_1 ve středu O ellipsy, přijde $O'm'_1 = OT_1$ (viz též obr. 1.) do polohy kolmé $Om'_1 = OT_1$ k OT_1 a průměr $S_1m'_1$ kruhu $(S_1m'_1)$ rovná se součtu nebo rozdílu poloos ellipsy, neboť $m'_1S_1 = OO_1$. (V obr. 3. $S_1m'_1 = a + b$.) Bod S jest v bodu O a kruh (OO') (viz obr. 1.) přechází též v bod O.

Jde-li na př. o sestrojení bodů, v nichž kruh (O, m) ze středu $O \equiv M$ sestrojený ellipsou protíná, vyznačme napřed kruhem tímto v kružnici $(S_1m'_1)$ na př. bod m', veďme v kruhu $(S_1m'_1)$ tětivu $m'On'$ a protněme kruh (O, m) osou příbuznosti, jež prochází bodem O rovnoběžně s tětivou $n'S_1$, v bodech

Q, Q_1. Podobně protíná rovnoběžka jdoucí středem O s tětivou S_1m' kruh (On) $[On' = n]$ ve dvou bodech R, R_1 ellipsy.

Stane-li se tětiva $m'On'$ průměrem $a'Ob'$ kruhu $(S_1m'_1)$, lze obdržeti analogickou konstrukcí osy ellipsy, z nichž jedna jest rovnoběžná s $b'S_1$ a polovice její rovná se délce $Oa' = a$ a druhá jde rovnoběžně k $a'S_1$ a má délku úsečky $Ob' = b$ *).

Ježto ellipsa jest v affinní poloze s kruhem (O, m) ve směru S_1m' a s kruhem (O, n), jehož poloměr $On' = n$, ve směru S_1n', a poněvadž kruhy zmíněné jsou podobně položeny dle středu O, lze sestrojiti body P ellipsy takto: V kruzích (O, m), (O, n) vyznačí se podobně položené body m'_I, n'_I dle poměru

$$\frac{m'_IO}{n'_IO} = \frac{m'O}{n'O}$$

vzhledem ke středu O, pak sestrojí se skrze body m'_I, n'_I rovnoběžky s tětivami $m'S_1$ resp. $n'S_1$, a vyznačí se bod P, v němž se dotčené rovnoběžky sekou.

Konstrukce uvedené jsou na úhlu S_1OT_1 nezávislé a zůstávají tudíž i v platnosti, jsou-li $OT_1 = a$, $OS_1 = b$ poloosy ellipsy.

V Telči dne 26. května 1908.

O jisté affinní poloze mezi ellipsou a kruhem.

Napsal **V. Jeřábek.**

Budiž dána ellipsa sdruženými průměry AOB a COD; sestrojme kruh (O, r_1) ze středu O poloměrem $OA = r_1$ a v kruhu tomto vyznačme průměr C_1OC_2 kolmý ku AB. Narýsujme dále kruh (O', r') mající svůj střed O' na průměru AB a dotýkající se ellipsy v bodě C. Poloměr $O'C = r'$ tohoto kruhu stojí kolmo na AB a paprsek C_1C protíná průměr AB ve středu podobnosti S kruhů (O, r_1), (O', r') a to tak, že podobně položené body A, A'; B, B' kruhů (O, r_1), (O', r') dle středu S jsou body příslušnými affinní polohy mezi ellipsou a

---

*) Touž konstrukci, jiným způsobem odvozenou, podává prof. J. Sobotka ve své »Deskriptivní geometrii« na str. 270 v obr. 205. a na str. 271 v obr. 206.