Josef Fürst

O racionalních poměrech obsahů některých těles soustavy krychlové

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 1, 20--27

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120849`

Rovnice polár příslušných k pólům m_1, m_2, m_3 jsou

$$
\begin{aligned}
&M_1 \equiv b^2\xi_1 x + a^2\eta_1 y - r^2 = 0,\\
(9)\qquad &M_2 \equiv b^2\xi_2 x + a^2\eta_2 y - r^2 = 0,\\
&M_3 \equiv b^2\xi_3 x + a^2\eta_3 y - r^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Resultant této soustavy rovnic

$$
\Delta = \begin{vmatrix} b^2\xi_1, & a^2\eta_1, & -r^2 \\ b^2\xi_2, & a^2\eta_2, & -r^2 \\ b^2\xi_3, & a^2\eta_3, & -r^2 \end{vmatrix} = -a^2b^2r^2 . \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix};
$$

ježto pak determinant tento dle rov. (8) rovná se nulle, jest i $\Delta = 0$, pročež poláry M_1, M_2, M_3 protínají se v bodě společném m. Že bod tento jest pólem poláry M, vysvítá jako při kružnici.

Tytéž věty mají platnosť pro hyperbolu i parabolu, a důkaz vede se zcela analogicky.

(Dokončení.)

O racionalních poměrech obsahů některých těles soustavy krychlové.

Napsal

Josef Fürst,

professor v Opavě.

Tři tvary soustavy krychlové, totiž krychle, čtyrstěn (tetraëder) a osmistěn (oktaëder) jsou jakožto mnohostěny pravidelné z geometrie známy, a proto v krátkosti promluvíme zde o poměrech obsahů jejich, jsou li sobě navzájem vepsány.

Jak známo, mají jmenovaná tělesa po třech rovných, na sobě kolmo stojících osách, které v krychli spojují středy protilehlých stěn, ve čtyrstěnu středy protilehlých hran, v osmistěnu protilehlé vrcholy. Vpíšeme-li do krychle čtyrstěn a zároveň osmistěn, jsou osy krychle všem společny.

Čtyrstěn vpíšeme do krychle vedouce v každém čtverci, krychli omezujícím, po jedné úhlopříčně tak, že každá s následující ve vrchole krychle se sbíhá. Tím vznikne 6 hran čtyrstěnu, které zavírají celkem 4 rovnostranné trojúhelníky čtyrstěn omezující.

Vrcholy osmistěnu jsou ve středech stěn krychlových.

Obsah čtyrstěnu T, jehož hrana $h = a\sqrt{2}$, kdež a jest hranou a zároveň osou krychle, vyjádřen jest vzorcem

$$T = \frac{h^3}{12}\sqrt{2}$$

a proto též

$$T = \frac{a^3}{3}, \tag{1}$$

t. j. *Čtyrstěn do krychle vepsaný zaujímá třetinu obsahu její.*

Hrana osmistěnu do krychle vepsaného $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ a obsah jeho

$$O = \frac{h^2 . a}{3}$$

nebo

$$O = \frac{a^3}{6}, \tag{2}$$

t. j. *Osmistěn do krychle vepsaný zaujímá šestinu obsahu její.*

Z rovnice (1) a (2) jde, že

$$T : O = 2 : 1. \tag{3}$$

Pozorujíce čtyrstěn a do něho vepsaný osmistěn, přesvědčíme se snadno o zvláštnosti obou těchto těles, že totiž jak hrany, tak i povrchy ano i obsahy jejich mají se k sobě jako 2 : 1.

Vpíšeme-li do osmistěnu krychli, jejíž vrcholy spočívají ve středech stěn osmistěnu, takže hrana vepsané krychle $= \frac{a}{3}$ a obsah její $k = \frac{a^3}{27}$, jest

$$O : k = \frac{a^3}{6} : \frac{a^3}{27} = 9 : 2,$$

proto i obsah čtyrstěnu ku obsahu krychle do něho vepsané dle (3)

$$T : k = 9 : 1.$$

Kombinujíce po třech zmíněných tělesích tak, že každé následující do předešlého vepsáno jest, snadno vyvodíme si poměry následující

$$K : T : O = 6 : 2 : 1, \tag{4}$$

$$T : O : k = 18 : 9 : 2, \tag{5}$$

$$O : k : t = 27 : 6 : 2. \tag{6}$$

Z poměrů těchto poznáváme, že

$$K : T = 6 : 2,$$
$$T : k = 18 : 2,$$

z čehož násobením obdržíme

$$K : k = 27 : 1,$$

kdež K značí krychli o čtyrstěn opsanou a k krychli do téhož čtyrstěnu vepsanou. Podobně na př. jest

$$T : O = 2 : 1,$$
$$O : t = 27 : 2,$$

z čehož násobením opět plyne

$$T : t = 27 : 1.$$

Souvisí tedy krychle, osmistěn a čtyrstěn tak, že, jest-li jedno těleso z nich o druhé opsáno a do tohoto s prvním soujmenné vepsáno, poměr obou těles soujmenných je vždy 27 : 1. Hrany těles těch mají se k sobě tudíž jako $3 : 1$.

Chceme-li vypočítati obsah *dvanáctistěnu kosočtverečného (dodekaëder)* D,*) jehož osa $= a$, a srovnati obsah jeho s obsahem krychle téže osy a, třeba uvážiti, že D jest osmistěn, na jehož každé stěně jest trojboký jehlan kolmý o pravidelné základně. Obsah osmistěnu osy a jest dle (2) $O = \frac{a^3}{6}$.

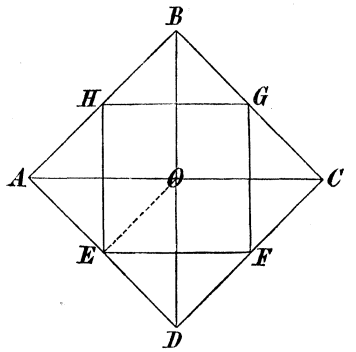
Delší úhlopříčna d stěny dvanáctistěnu kos. jsouc hranou osmistěnu a tedy $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, jest zároveň spodní hranou jehlanu nad stěnou osmistěnu. Abychom určili výšku jehlanu tohoto, třeba uvážiti, že vodorovný průmět dvanáctistěnu kos. jest čtverec ABCD — obr. 1. — jehož strany jsou delšími úhlopříčnami stěn a jehož úhlopříčny AC, BD rovnají se ose dvanáctistěnu. Strany čtverce EFGH odpovídají kratším úhlopříčnám, jejichž délka $d' = EH = \frac{a}{2}$.

Proto větší úhlopříčna ku menší úhlopříčně dvanáctistěnu kos. má se jako $\sqrt{2} : 1$.

Z obou úhlopříčen vypočítáme hranu

$$h = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d'}{2}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{3},$$

*) Tělesa, o nichž v článku tomto se pojednává a kteráž zde vyobrazena nejsou, najde laskavý čtenář v každém nerostopise.



Obr. 1.

načež snadno shledáme, že výška jehlanu $v = \frac{a}{12}\sqrt{3}$, a tedy obsah jehlanu

$$J = \frac{a^3}{96} \text{ a osmi jehlanů } = \frac{a^3}{12}.$$

Proto jest obsah dvanáctistěnu kos.

$$D = O + 8J = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{4}, \tag{7}$$

t. j. *Dvanáctistěn kosočtverečný do krychle vepsaný zaujímá čtvrtinu obsahu její.*

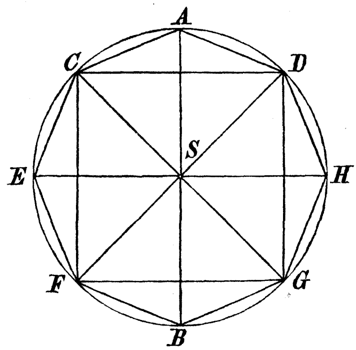
Naopak lze do dvanáctistěnu kosočtverečného vepsati krychli, jejíž hrana rovna jest kratší úhlopříčně stěny jeho a jejíž hodnota jest $\frac{a}{2}$; proto obsah krychle vepsané $k = \frac{a^3}{8}$, což uvedeno v poměr s obsahem D, dá

$$D : k = \frac{a^3}{4} : \frac{a^3}{8} = 2 : 1.$$

Obsah čtyřiadvacetistěnu krychlového (tetrakishexaëder) M. Tento vzniká z krychle co prvotvaru jakožto plnoměrný tvar dvouplochým přikrojením hran, takže omezen jest 24 rovnoramennými trojúhelníky. Při tom může se přikrojení státi tak, že průmět vodorovný jest pravidelným osmiúhelníkem — obr. 2. —

V osmiúhelníku tom jest úhlopříčna středem jdoucí rovna ose krychle i ose čtyřiadvacetistěnu kr. $AB = a$, a zároveň rovna průměru kružnice opsané.

Čtyřiadvacetistěn kr. možno rozložiti v krychli k a šest



Obr. 2.

na stěnách její spočívajících jehlanů J. Značíme-li půl osy AS krátce $r = \frac{a}{2}$, jest hrana krychle

$$CD = h = r\sqrt{2},$$

a výška jehlanu

$$v = r - \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{r}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Z uvedeného plyne, že obsah krychle

$$k = 2r^3\sqrt{2},$$

a obsah jehlanu

$$J = \frac{h^2 . v}{3} = \frac{2r^2}{3} . \frac{r}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right) = \frac{r^3}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right),$$

a

$$6J = 2r^3(2 - \sqrt{2});$$

proto obsah čtyřiadvacetistěnu krychlového

$$M = 2r^3\sqrt{2} + 2r^3(2 - \sqrt{2}) = 4r^3.$$

Dosadíme-li za $r = \frac{a}{2}$,

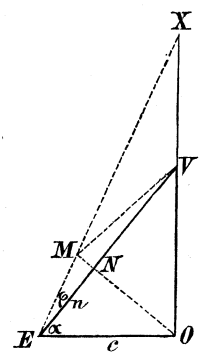
$$M = \frac{a^3}{2}. \tag{8}$$

Čtyřiadvacetistěn krychlový jest polovičkou krychle, do níž jest vepsán.

Čtyřiadvacetistěn osmistěný (*triakisoktaëder*) N skládá se z osmistěnu O a 8 jehlanů J, jichž základnou jest stěna osmistěnu a jejichž výška závisí na veličině m, t. j. oné úsečce osy, kterou prodloužená stěna čtyřiadvacetistěnu osm. na ose utíná. (Viz označení Naumannovo mO.)

Značí-li a osu osmistěnu, jest obsah jeho $O = \frac{a^3}{6}$, hrana osmistěnu $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, a stěna jeho jakožto základna jehlanu $z = \frac{h^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Jedná se tedy pouze o stanovení výšky jehlanu v. Za tou příčinou protneme čtyřiadvacetistěn osm. rovinou vedenou osou tělesa a vrcholem jehlanu, takže obdržíme (majíce pouze čtvrtinu celého řezu na zřeteli) $\triangle$ EOX — obr. 3. — kdež O jest střed tělesa, X bod, v němž prodloužená stěna tělesa osu protíná, tedy OX $= m$, V pak vrchol jeho a M vrchol jehlanu, při čemž přirozeně OM $\perp$ EV. Strana EO odpovídá úsečce EO v obr. 1.



Obr. 3.

Z obrazce 3. plyne

$$m = c\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi) = c\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\varphi}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi},$$

tedy

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{m - c\,\mathrm{tg}\,\alpha}{c + m\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Poněvadž $c = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, jest $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{2} : \frac{a}{4}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Dosadíme-li za c a $\mathrm{tg}\,\alpha$ hodnoty do vzorce pro $\mathrm{tg}\,\varphi$, obdržíme konečně

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(2m - a)\sqrt{2}}{4m + a}.$$

Na hodnotě m závisí hodnota $\operatorname{tg}\varphi$; proto dosaďme za m postupně některé hodnoty, na př.

$$\text{pro } m_1 = a, \quad \text{jest } \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{5};$$

$$\text{„} \quad m_2 = \frac{3}{4}a \quad \text{„} \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{8};$$

$$\text{„} \quad m_3 = \frac{3}{2}a \quad \text{„} \quad \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{2\sqrt{2}}{7}.$$

Abychom stanoviti mohli výšku, třeba znáti úsečku $EN = n$, která se určí ze spojité úměry

$$EV : c = c : n$$

a poněvadž $$EV = \frac{h}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{6},$$

jest $$n = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad v = n \operatorname{tg}\varphi.$$

Dosadíme-li postupně do posledního vzorce hodnoty za $\operatorname{tg}\varphi$ i za n, obdržíme příslušné výšky

$$v_1 = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{a\sqrt{3}}{30},$$

$$v_2 = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{a\sqrt{3}}{48},$$

$$v_3 = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{7} = \frac{a\sqrt{3}}{21},$$

a dle toho též obsahy jehlanů k výškám uvedeným příslušných

$$J_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{30} = \frac{a^3}{8.30} \text{ a } 8J_1 = \frac{a^3}{30}.$$

$$J_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{48} = \frac{a^3}{8.48} \text{ a } 8J_2 = \frac{a^3}{48}.$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{21} = \frac{a^3}{8.21} \text{ a } 8J_3 = \frac{a^3}{21}.$$

Budeť pak obsah čtyřiadvacetistěnu osm. v případě prvém

(9) $$N = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{30} = \frac{a^3}{5}$$

v případě druhém $\quad N = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{48} = \frac{3a^3}{16}$;

v případě třetím $\quad N = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{21} = \frac{3a^3}{14}$.

Prohlédajíce ku vzorci (9) můžeme říci:

Čtyřiadvacetistěn osmistěnný jest pětinou krychle, do níž jest vepsán.

Kdyby m nabylo hodnoty ∞, jest $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\underset{m=\infty}{v} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12},$$

$$\underset{m=\infty}{J} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^3}{8.12},\ 8J = \frac{a^3}{12}$$

a $$N = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{4},$$

t. j. pro $m = \infty$ přejde čtyřiadvacetistěn osm. ve dvanáctistěn kosočtverečný, pro $m = \frac{a}{2}$ v osmistěn, neboť $\operatorname{tg} \varphi = 0$.

Ježto hodnota osmistěnu $= \frac{a^3}{6}$ a hodnota dvanáctistěnu kosočtv. $= \frac{a^3}{4}$, pozorujeme, že obsah čtyřiadvacetistěnu osm. pohybuje se v mezích od $\frac{1}{6}$ do $\frac{1}{4}$ krychle osy a.

Uvedouce v poměr hodnoty zde vypočtené a srovnajíce je s obsahem krychle $= 1$, obdržíme

$K : M : T : D : N : O = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = 60 : 30 : 20 : 15 : 12 : 10.$

V Opavě, v květnu 1887.