Václav Votruba

Tři fáze ve vývoji teorie fysikálního mikrosvěta. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 2, D49--D64

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Tři fáze ve vývoji teorie fysikálního mikrosvěta.

Václav Votruba, Praha.

Fysikálním mikrosvětem rozumíme svět zjevů subatomárních resp. submolekulárních. Obráceně pak užíváme slůvka „makro" (na př. ve výrazech fysikální makrosvět, makroskopická fysikální teorie a pod.) vždy, když chceme naznačiti, že se nepřihlíží k atomické a tím méně k subatomární struktuře hmoty, ani k fysikálním zjevům a faktům nějak s ní souvisícím nebo příbuzným, jako jsou na př. kvanta.

V první kapitole jest pojednáno o základních pojmech a zákonech primitivní klasické teorie fysikálního mikrosvěta. Tato teorie nedovede ještě vysvětliti kvantové zjevy. Je to tedy teorie velmi nedokonalá s hlediska prakticky-fysikálního, je však důležitým stupněm ve vývoji teorie fysikálního mikrosvěta s hlediska formálně-matematického. Proto je třeba se jí zabývati. V druhé kapitole jsou vyloženy principy dnešní kvantové elektrodynamiky; vlnová mechanika hmotného bodu a teorie kvantovaného elektromagnetického pole. V třetí kapitole jsou naznačeny vůdčí myšlenky dvou nejnovějších pokusů o další zdokonalení teorie fysikálního mikrosvěta, totiž nové „Feldtheorie" hmotných částic a korpuskulární teorie elektromagnetického pole.

I. Primitivní klasická teorie.

1. *První základní fikce*: *Klasický hmotný bod.* Každý hmotný bod v této teorii má určitou, konstantní vlastní hmotu m_0 (klidová hmota), dále určitý, konstantní elektrický náboj e, konečně má v každém okamžiku t určitou polohu, kterou můžeme stanoviti průvodičem $\mathfrak{q}$, určitou rychlost $\mathfrak{v}$, zrychlení $\mathfrak{a}$ atd. Čísla m_0 a e jsou relativistické invarianty, t. j. jsou nezávislé na volbě sou-

řadného systému.[1]) Buď e samo, nebo veličiny e i m_0 zároveň, mohou býti rovny nule; není však nikdy zároveň $m_0 = 0$ a $e \neq 0$. Veličina

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

se nazývá (setrvačnou) hmotou hmotného bodu; závisí tedy na absolutní hodnotě v jeho rychlosti $\mathfrak{v}$. Musí býti vždy od nuly různá a positivní; hmotné body s nulovým m_0 se tedy musí vždy pohybovati meznou rychlostí c. (c je rovno rychlosti světla ve vakuu.) Veličina

$$W' = mc^2$$

se nazývá energií hmotného bodu a konečně veličina

$$\mathfrak{p}' = m\mathfrak{v}$$

je jeho impuls. Udáním impulsu se obyčejně nahrazuje udání rychlosti. Mezi W' a $\mathfrak{p}'$ platí identický vztah, který lze snadno potvrditi,

$$W'^2 - c^2\mathfrak{p}'^2 = m_0{}^2c^4.$$

Obě strany poslední rovnice jsou relativistické invarianty. Čtveřina veličin p'_x, p'_y, p'_z, W' (p'_x, p'_y, p'_z jsou složky vektoru $\mathfrak{p}'$) se totiž transformuje stejně, jako čtveřina prostoročasových souřadnic x, y, z, t.

2. *Druhá základní fikce: Klasické elektromagnetické pole.* Klasické elektromagnetické pole je nejjednodušeji popsáno vektorovým potenciálem $\mathfrak{A}$ a skalárním potenciálem Φ. Komponenty vektoru $\mathfrak{A}$ a veličina Φ jsou funkce prostorových souřadnic x, y, z a času t; hoví diferenciálním rovnicím (rovnicím vlnovým)

$$\Delta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \qquad (1')$$

K popisu elektromagnetického pole se užívá též vektorů $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$, které s $\mathfrak{A}$ a Φ souvisí rovnicemi

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \qquad (2)$$
$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$$

[1]) Pro přechod od jednoho přípustného, inerciálního souřadného systému x, y, z, t k druhému takovému $x+, y+, z+, t+$ platí Lorentzova transformace. V dosavadní mikrofysice se užívá jen speciální teorie relativnosti (Einstein-Minkowskiho pseudo-euklidovského prostoročasu). Mikroskopická teorie gravitace jest problémem budoucnosti.

a nazývají se intensita elektrického a magnetického pole. Eliminací $\mathfrak{A}$ a Φ z rovnic (2) plynou pro $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ identické rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 0, \end{aligned} \qquad (2')$$

známé jako t. zv. druhá skupina Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. Dále ještě plynou z (1), (1') a (2) rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right). \end{aligned} \qquad (3)$$

3. *Úplné obecné schema. Celkový obraz fysikálního mikrosvěta podle primitivní klasické teorie.* V prostoru a čase existují dvě fysikální entity, svojí povahou zcela různorodé; klasické hmotné body a klasické elektromagnetické pole. Teorie vzniklá kombinací obou těchto představ má býti schopna vyložiti všecky fysikální zjevy a všecka fysikální fakta, gravitaci vyjímaje.

Hmotné body na jedné a elektromagnetické pole na druhé straně nejsou na sobě fysikálně nezávislé. Hmotné body působí na elektromagnetické pole podle známých základních rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 4\pi\varrho, \end{aligned} \qquad (3')$$

tvořících t. zv. první skupinu Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. ϱ je hustota elektrického náboje, neseného hmotnými body, $\mathfrak{i}$ je hustota konvekčního proudu, vzbuzeného jejich pohybem. Obě veličiny jsou rozpojité funkce prostorových souřadnic i času. Pro jediný hmotný bod s nábojem e je prostorová hustota v bodě x, y, z a v čase t dána rovnicí

$$\varrho(x, y, z, t) = e\,\delta(x - q_x)\,\delta(y - q_y)\,\delta(z - q_z),$$

kdež q_x, q_y, q_z jsou složky průvodiče $\mathfrak{q}$ hmotného bodu. Funkce ϱ musí býti rovna nule všude, s výjimkou bodu $x = q_x$, $y = q_y$, $z = q_z$, v němž je náboj e. V tomto bodě je ϱ nekonečně veliké, a to tak, že integrál

$$\iiint \varrho \, dx \, dy \, dz,$$

vztažený na celý prostor, dává e. Za tím účelem přisuzujeme funkci δ ex definitione tyto vlastnosti:

$$\delta(\varepsilon) = 0, \text{ pro } \varepsilon \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon)\,\delta(\varepsilon)\,d\varepsilon = f(0), \text{ pro jakoukoli funkci } f(\varepsilon). \tag{4}$$

Je-li v poli n hmotných bodů nesoucích náboje $e_1, e_2, \ldots, e_n$, je hustota ϱ dána součtem

$$\varrho(x, y, z, t) = \sum_k e_k\,\delta(x - q_{xk})\,\delta(y - q_{yk})\,\delta(z - q_{zk})$$

a hustota proudu $\mathfrak{i}$ výrazem

$$\mathfrak{i}(x, y, z, t) = \sum_k e_k\,\mathfrak{v}_k\,\delta(x - q_{xk})\,\delta(y - q_{yk})\,\delta(z - q_{zk}).$$

Nebude jistě zbytečné zmíniti se několika slovy o významu a povaze rovnic (3′). Nejobecnější řešení rovnic (1), (1′) lze sestrojiti takto: Φ je dáno jako libovolná superposice rovinných, harmonických vln, všech možných frekvencí ν, šířících se všemi možnými směry $\mathfrak{n}$. Vektor $\mathfrak{A}$ lze nejprve psáti jako součet $\mathfrak{A}^{tr} + \mathfrak{A}^{l}$. Část $\mathfrak{A}^{l}$ je dána libovolnou superposicí podélných, rovinných, harmonických vln, část $\mathfrak{A}^{tr}$ libovolnou superposicí transversálních, lineárně polarisovaných, harmonických, rovinných vln. (Ke každému směru $\mathfrak{n}$ náleží dvě samostatné, lineárně a vzájemně kolmo polarisované, transversální vlny frekvence ν.) Rovnice (3′) mají nyní zřejmě charakter omezující, vedlejší podmínky. Ze všech právě uvedených myslitelných řešení rovnic (1), (1′) pro $\mathfrak{A}$ a Φ vybírají totiž rovnice (3′) pouze některá, jako skutečně přípustná. Omezující rovnice (3′) zůstávají ovšem v platnosti, i když v prostoru nejsou žádné hmotné body, resp. jsou-li jejich elektrické náboje vesměs rovny nule.

Obráceně působí i elektromagnetické pole na hmotné body. Pohyb k-tého hmotného bodu je dán pohybovou rovnicí Newtonovou

$$\frac{d}{dt}\,\mathfrak{p}'_k = \frac{d}{dt}\,(m_k\mathfrak{v}_k) = e_k\left\{\mathfrak{E}(\mathfrak{q}_k, t) + \frac{1}{c}\,(\mathfrak{v}_k \times \mathfrak{H}(\mathfrak{q}_k, t))\right\}. \tag{5}$$

První člen v závorce na pravé straně této rovnice vyjadřuje účinek pole elektrického, druhý člen — vektorový součin[2]) vektorů $\mathfrak{v}_k$ a $\mathfrak{H}(\mathfrak{q}_k, t)$ — účinek pole magnetického. Z rovnic (5) plyne rovnice energie pro k-tý hmotný bod

$$\frac{d}{dt}\,W'_k = \frac{d}{dt}\,(m_k c^2) = e_k\,.\,(\mathfrak{E}(\mathfrak{q}_k, t)\,.\,\mathfrak{v}_k). \tag{5'}$$

Použitím rovnic (3′) a (4) lze z (5) a (5′) odvoditi další rovnice

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{p}'_k + \frac{1}{4\pi c}\int(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\,d\mathfrak{r}\right\} = 0, \tag{5a}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{n} W'_k + \frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\,d\mathfrak{r}\right\} = 0, \tag{5'a}$$

$$(d\mathfrak{r} = dx\,dy\,dz)$$

---

[2]) Vektorový součin (libovolných) vektorů $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ budeme označovati $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$.

vyjadřující zákony zachování souhrnného impulsu a souhrnné energie našeho fysikálního světa, t. j. impulsu a energie hmotných bodů a pole. Integrály

$$\frac{1}{4\pi c}\int (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})\,\mathrm{d}\mathfrak{r}, \qquad \frac{1}{8\pi}\cdot\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\,\mathrm{d}\mathfrak{r}$$

definují impuls a energii pole; výrazy

$$\frac{1}{4\pi c}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}), \qquad \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$$

jsou příslušné hustoty.

Prakticky důležitý jest ještě tento způsob psaní pohybových rovnic (5) a (5'). Zavedeme si čistě formálně nové pomocné veličiny

$$W_k = W'_k - e_k\,\Phi(\mathfrak{q}_k, t), \tag{6}$$

$$\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}'_k - \frac{e_k}{c}\,\mathfrak{A}(\mathfrak{q}_k, t), \tag{6'}$$

které budeme nazývati celkovou energií a celkovým impulsem k-tého hmotného bodu.[3]) Mezi W a $\mathfrak{p}$ platí vztah

$$(W + e\Phi)^2 - c^2\left(\mathfrak{p} + \frac{e}{c}\,\mathfrak{A}\right)^2 = m_0{}^2c^4. \tag{7}$$

(Viz identickou relaci mezi W' a $\mathfrak{p}'$ v odst. 1.) Pohybové rovnice (5), (5') lze pak spolu s definičními rovnicemi (6') pro $\mathfrak{p}_k$ psáti ve tvaru Hamiltonově

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial t} = -\frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{q}_k}, \tag{5b}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{q}_k}{\partial t} = \frac{\partial W_k}{\partial \mathfrak{p}_k}, \tag{6'a}$$

$$\frac{\mathrm{d} W_k}{\mathrm{d} t} = \frac{\partial W_k}{\partial t}. \tag{5'b}$$

Také pohybové rovnice (5) mají charakter omezující vedlejší podmínky. Ze všech myslitelných pohybů hmotného bodu vybírají totiž pouze některé, jako skutečně možné. Také podmínka (5) zůstává v platnosti, i když není v okolí hmotného bodu žádného elektromagnetického pole, nebo když je náboj hmotného bodu roven nule. (T. zv. isolovaný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po přímce.)

4. *Diskuse obecné teorie.* Začneme s Maxwellovými rovnicemi

[3]) Jaký je důvod pro toto pojmenování, o tom nelze se zde šířiti. W, $\mathfrak{p}$ je nutno rozlišovati od veličin W', $\mathfrak{p}'$, které jsme nazvali prostě energií a impulsem hmotného bodu. Pro isolovaný hmotný bod jest, jak v dalším poznáme, $W = W'$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

(3'), (2') resp. rovnicemi (1) (1') a (3'). Řešení těchto rovnic, odpovídající t. zv. volným elektromagnetickým vlnám ($e_k = 0$; $k = 1, 2, \ldots, n$), popisují světlo ve vakuu. Z optiky je dobře známo, že tento popis jest skutečně naprosto bezvadný, pokud se týče t. zv. klasických vlastností světla, na př. polarisace, interference atd. Nesouhlas však se jeví již při určení energie a impulsu záření. Podle této teorie může míti na př. stojatá monochromatická světelná vlna, uzavřená v nějakém omezeném prostoru, zcela libovolnou energii. Ale zkušenost nás učí, že ve skutečnosti je ta energie vždy celistvým násobkem kvanta $h\nu$, kdež h je universální konstanta a ν frekvence vlny.

Maxwellovy rovnice (3') popisují též emisi elmagn. záření způsobenou pohybujícím se elektrickým hmotným bodem. Lze z nich odvoditi, že energie záření emitovaného v době dt při libovolném pohybu bodového náboje e jest dána výrazem

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)^2 dt.$$

Také spektrální rozdělení energie emitovaného záření vychází spojité. Zkušenost však zase učí, že záření emitované hmotnými částicemi, jako jsou elektrony, protony a podobné, se objevuje vždy v monochromatických kvantech o konečné velikosti energie. Tuto skutečnost tedy nedovede primitivní klasická teorie vysvětliti.

Nyní přistupme k pohybovým rovnicím (5) resp. (5b). Tyto rovnice mají především jednu vadu zcela zásadní povahy. Veličiny $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ a Φ, $\mathfrak{A}$ vystupující v těch rovnicích mají totiž obecně vesměs nekonečně veliké hodnoty, neboť bod o souřadnicích q_x, q_y, q_z jest v čase t singulárním místem elektromagnetického pole. Podobně integrály v rovnicích (5a), (5'a) jsou obecně divergentní. Aby tedy výše vyložená teorie mohla míti vůbec smysl, je třeba nějakým vhodným způsobem definovati „správné" hodnoty všech uvedených veličin. V rámci této primitivní teorie lze to učiniti v podstatě jedině tímto předpisem: Zvolíme si souřadný systém, v němž má uvažovaný hmotný bod v okamžiku t nulovou rychlost. Kolem onoho bodu jako středu si myslíme opsánu kouli malého poloměru R. Vypočteme střední hodnoty veličin $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, ... na povrchu té koule a rozvedeme je v řady podle rostoucích mocnin poloměru R. Zmenšujeme-li nyní R do nekonečna, rostou členy se zápornými mocninami R do nekonečna. Tyto členy prostě vynecháme! Zbude tedy po té limitaci pouze člen s R^0. Ten udává „správné" hodnoty veličin $\mathfrak{E}(\mathfrak{q}, t)$ a dalších. Zcela podobně nutno tu postupovati při výpočtu „správných" hodnot integrálů v rovnicích (5a), (5'a). Jest jistě zbytečné podotýkati, že teorie, která si musí takovýmto způsobem pomáhati z nesnází, nemůže býti pokládána za logicky naprosto bezvadnou a dokonalou.

Podrobným skutečným výpočtem lze nyní ukázati, že za veličiny $\mathfrak{E}(q, t)$ atd. možno vzíti hodnoty příslušné vnějšímu poli, zůstává-li zrychlení hmotného bodu trvale malé, což zase nastává, je-li vnější pole slabé. V tomto případě lze zanedbati vyzařování. Při experimentálním zkoumání pohybu elektrických hmotných částic (elektronů, α-částic) v rozsáhlých (makroskopických) elektromagnetických polích byly tyto přibližné pohybové rovnice skvěle potvrzeny. Aby však bylo možno v rámci primitivní klasické teorie vyložiti empirická fakta, týkající se existence a nejdůležitějších vlastností molekul a atomů, bylo by třeba, aby teorie připouštěla možnost energeticky exaktně stabilních dynamických soustav elektrických hmotných bodů, jejichž souhrnná energie by byla schopna nabývati pouze diskretní řady hodnot, t. j. byla kvantována. Místo toho se ukazuje, že energeticky přesně stabilní soustavy hmotných bodů jsou v této klasické teorii nemožné, neboť podle přesných pohybových rovnic jest zrychleně se pohybující elektrický hmotný bod brzděn vlastním zářením, které podle Maxwellových rovnic (3′) uvolňuje. Ale ani „stabilní" soustavy, které dostaneme, když zanedbáme vyzařování a pohyb hmotných bodů počítáme podle přibližných pohybových rovnic, v nichž je hnací síla odvozena jen z vnějšího pole (tak se postupovalo ve známé Bohrově-Sommerfeldově atomové mechanice), nesplňují výše uvedené požadavky. Jejich souhrnná energie totiž může nabývati spojité řady hodnot a není žádného teoretického důvodu pro nějaké kvantování. Proto bylo nutno zavésti v B.-S. atomové mechanice dodatečné kvantové podmínky.

Při popisu působení cizího záření na elektrický hmotný bod teorie také není v úplném souhlase se zkušeností, která učí, že se energie a impuls záření přenášejí na hmotné částice nespojitě, po konečných kvantech. (Absorpce, fotoefekt, Comptonův zjev.) Tuto skutečnost nedovede primitivní klasická teorie vyložiti.

Při t. zv. přímých srážkách mezi elektricky neutrálním a nějakým jiným hmotným bodem žádá teorie v souhlase se zkušeností, aby součet energií a impulsů obou hmotných bodů byl stejný po srážce jako před srážkou.

T. zv. materiální paprsky (na př. katodové paprsky, α-paprsky a podobné) jsou podle této teorie jen proudem uspořádaně se pohybujících, prakticky isolovaných hmotných bodů. Známé mlžné stopy ve Wilsonově komoře souhlasí s touto představou. Ale na materiálních paprscích byla pozorována též skupina zjevů (na př. interference a ohyb), které jsou se stanoviska primitivní klasické teorie naprosto nesrozumitelné.

II. Kvantová elektrodynamika.

Trvalo skoro dvacet let, než se podařilo nahraditi primitivní klasickou mikrofysikální teorii teorií prakticky lépe vyhovující, t. j. lépe souhlasící se zkušeností, a po stránce matematicko-formální stejně uspokojivou, t. j. tvořící stejně logicky uzavřený systém pojmů a vět, jako teorie klasická. Tato nová teorie se nazývá kvantová elektrodynamika. Vlnová mechanika (mechanika „nového hmotného bodu") je v ní obsažena tak, jako je klasická mechanika (mechanika „klasického hmotného bodu") organicky obsažena v teorii vyložené v předcházející kapitole. Nejdokonalejší úplnou formulaci kvantové elektrodynamiky podali r. 1932 Dirac, Fock a Podolský. (Viz II 3.)

1. *První základní fikce: Hmotný bod* Diracovy *relativistické vlnové mechaniky.* Rozebíráme-li teoreticky možnosti libovolně přesných měření polohy, t. j. souřadnic q_x, q_y, q_z bodové hmotné částice — na př. elektronu, protonu a podobně — v určitém čase t, nenalezneme žádných zásadních překážek, které by mohly státi v cestě provedení tohoto úkolu. Stejně jest v zásadě možno, stanoviti libovolně přesně složky impulsu p'_x, p'_y, p'_z hmotné částice v určitém nějakém čase. Naproti tomu rozbor nejrozmanitějších experimentálních uspořádání navržených pro současné stanovení souřadnic i komponent impulsu vede k výsledku odlišnému, totiž k tomu, že je zásadně nemožno stanoviti s libovolnou přesností současně polohu i impuls bodové hmotné částice. Zásadní hranice přesnosti měření je dána nerovností

$$\delta\overline{p}'_x\,\delta\overline{q}_x \geqq h \tag{8}$$

a podobně pro ostatní komponenty (h je Planckova konstanta). Při tom značí $\delta\overline{p}'_x$, $\delta\overline{q}_x$, ... atd. pravděpodobné chyby naměřených hodnot $\overline{p}'_x$, $\overline{q}_x$ atd.

Je to způsobeno jednak vlivem výše zmíněných, empiricky zjištěných, neklasických vlastností světla (projevujících se na př. ve zjevu fotoelektrickém a zjevu Comptonově tím způsobem, že se energie i impuls záření přenáší na hmotné částice po konečných kvantech, nespojitě), jednak vlivem rovněž uvedených, empiricky zjištěných, neklasických vlastností hmotných částic (projevujících se na př. tím, že materiální paprsky jeví interferenci a ohyb). Při odvozování relací (8) se používá známých kvantitativních zákonitostí ovládajících zjev Comptonův a ohyb materiálních paprsků. Ty zákonitosti byly nalezeny empiricky. Jsou proto relace (8) také relace čistě empirické, tedy naprosto spolehlivé.

Z toho, co bylo právě řečeno, plyne v podstatě toto poučení: Není možno přímo empiricky ověřiti, že skutečné jednoduché

D 56

hmotné částice mají všecky charakteristické vlastnosti klasických hmotných bodů. Nemohl by nám ovšem nikdo bräniti, abychom činili takový předpoklad, přes to, že je přímo prakticky neověřitelný, kdybychom na základě toho předpokladu dovedli podati uspokojivý výklad všech mikrofysikálních zjevů. Ale to se dosud nepodařilo. (Viz I.) Proto musíme býti nakloněni k přesvědčení, že základní předpoklad primitivní klasické teorie — klasický hmotný bod — jest nejen logicky nedostatečně odůvodněný, ale i fakticky nesprávný, t. j. že klasické hmotné body skutečně nejsou v přírodě realisovány.[4])

Praktický neúspěch hypotesy klasického hmotného bodu musí nás přiměti k tomu, abychom se snažili nahraditi tuto fikci nějakou fikcí, řekněme obecnější, při níž by bylo přímo využito volnosti dané nerovninou (8). Lze doufat, že tak bude možno dospěti zcela přirozeně k výkladu kvantových zjevů. Ovšem, že nemusí býti nový pojem, který nastoupí na místo pojmu klasického hmotného bodu (pojem hmotného bodu vlnové mechaniky) nikterak pojmem názorným. Postačí, když budeme uměti vlastnosti a chování nového hmotného bodu matematicky popsat, a když tento popis, v náležité interpretaci, bude ve shodě se zkušeností.

K pojmu hmotného bodu vlnové mechaniky dospějeme tímto formálním zobecněním pojmu klasického hmotného bodu: Komponenty průvodiče $\mathfrak{g}$ a impulsu $\mathfrak{p}'$ jakož i energii W' isolovaného hmotného bodu nebudeme pokládati za obyčejná prostá čísla, nýbrž za čísla obecnější, pro něž neplatí zákon o komutativnosti násobení, ale jsou splněny tyto zaměňovací relace

$$p'_x \cdot q_x - q_x \cdot p'_x = \frac{h}{2\pi i} \cdot \mathsf{1} \text{ a cykl.} \tag{9}$$

Při tom $\mathsf{1}$ značí jednotku v oboru nekomutativních čísel. Všecky ostatní podvojné součiny veličin q_x, q_y, q_z, p'_x, . . ., W' jsou záměnné. Z teorie klasického hmotného bodu převezmeme do teorie hmotného bodu vlnové mechaniky pouze ještě relativistický vztah

$$W'^2 - c^2\mathfrak{p}'^2 - m_0^2c^4 = 0. \tag{10}$$

Přihlédněme nyní, jaké jsou bližší teoretické důsledky hypotesy (9), a jaká je prakticko-fysikální interpretace celého toho

[4]) Že hypotesa klasického hmotného bodu je skutečně logicky nedostatečně odůvodněna a že naprosto není nutná, jak by snad bylo možno se domnívati vzhledem k tomu, že je zásadně možno stanoviti s libovolnou přesností polohu jednoduché hmotné částice v čase t_1, jakož i impuls v jiném čase t_2, dokazuje právě okolnost, že je možno vybudovati logicky bezespornou vlnovou mechaniku, v níž se ona hypotesa popírá, kdežto obě právě zmíněná empirická fakta akceptují. Tím je též vyloučena eventualita, že by se mohlo podařiti dokázat správnost resp. nutnost hypotesy klasického hmotného bodu nějak nepřímo.

formalismu. V experimentální fysice jsou souřadnice, komponenty impulsu a také energie hmotné částice, jakožto výsledky fysikálních měření, samozřejmě obyčejná čísla. Úkolem fysikální teorie pak jest, tyto výsledky fysikálních měření s největší zásadně možnou přesností — viz na př. relace (8) — předpovídati. Aby tedy formální zobecnění pojmu hmotného bodu dané rovnicemi (9) mohlo míti vůbec nějaký smysl, musí býti především možno, převésti všecky výpovědi o abstraktních nekomutativních číslech (po případě vztahy mezi nimi) na jisté výpovědi o nějakých obyčejných číslech. To skutečně je možno učiniti, a to jak nás algebra učí, v podstatě jedině (jednoznačně) tímto způsobem: Každé z veličin W', p'_x, q_x atd. přiřadíme — čistě formálně — jistou operaci, provedenou na obyčejných reálných nebo komplexních funkcích jistých obyčejných reálných čísel (plynulých parametrů) x, y, z, t; jinými slovy, zobrazíme si každou z veličin W', $p'_x, \dots$ pomocí jistého operátoru, působícího na funkce proměnných x, y, z, t.[5]) Učiníme to podle této tabulky (značku $\rightarrow$ čtěte slovy „je přiřaděn operátor"):

$$\begin{aligned} W' &\rightarrow -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}, \\ p'_x &\rightarrow \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} \text{ a cykl.}, \\ q_x &\rightarrow x \text{ a cykl.}, \\ \mathsf{I} &\rightarrow 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Veličina W' je tedy zobrazena operátorem, který působí na libovolnou funkci proměnných x, y, z, t tak, že ji derivuje parcielně podle t a násobí faktorem $-h/2\pi i$, operátor zobrazující q_x násobí ji prostě číslem x, operátor zobrazující I násobí jedničkou.[6]) Důvod, proč jsme přiřadění abstraktních nekomutativních veličin a konkretních operátorů provedli právě podle tabulky (11), poznáme v dalším. Součtu dvou veličin, na př. $p'_x + p'_y$ odpovídá operátor, který působí na libovolnou funkci $\omega(x, y, z, t)$ tak, že z ní utvoří funkci

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega, \text{ čili } \frac{h}{2\pi i}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right).$$

Součinu dvou veličin odpovídá operátor, který provádí obě částečné operace po sobě. Na př. operátor odpovídající součinu $p'_x q_x$ mění funkci ω ve funkci

[5]) Pojem operátoru je dobře známý na př. z vektorového počtu.

[6]) Vektor $\mathfrak{p}'$ je podle tabulky (11) zobrazen (až na faktor $h/2\pi i$) pomocí operátoru grad, známého z vektorového počtu. Proměnné parametry x, y, z, t mají význam — a také transformační vlastnosti — plynulých prostorových souřadnic a času.

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}(x\omega),$$

kdežto operátor odpovídající součinu $q_x p'_x$ mění ω ve výraz

$$x \cdot \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\omega}{\partial x}, \text{ čili } \frac{h}{2\pi i} \cdot x \frac{\partial\omega}{\partial x},$$

a podobně pro jiné součiny. Na základě obou právě uvedených pravidel lze nyní ke každému výrazu F, utvořenému pomocí sčítání a násobení z veličin W', p'_x, q_x, atd. udati příslušný operátor Θ.

Zobrazení nekomutativních veličin pomocí operátorů má tento význam resp. následek: Každý vztah tvaru $F = 0$ mezi nekomutativními veličinami lze okamžitě proměniti v podmínku $\Theta\omega = 0$ pro jistou funkci ω proměnných x, y, z, t, tedy ve vztah mezi obyčejnými čísly, což je právě účel toho zobrazení. Jediné vztahy typu $F = 0$, které nevedou k žádným podmínkám pro funkci ω, jsou relace (9) a vztahy z nich plynoucí. Operátory (11) byly totiž právě tak zvoleny, aby relace (9) vedly k identitám.

Nyní si všimněme blíže fundamentálního vztahu (10); je to vztah typu $F = 0$. Dirac nalezl, že kvadratický výraz na levé straně této rovnice lze rozložiti na součin dvou výrazů lineárních ve veličinách W', p'_x, p'_y, p'_z, totiž výrazu

$$W'\alpha_4 + c(p'_x\alpha_1 + p'_y\alpha_2 + p'_z\alpha_3 + m_0c\alpha_0), \tag{12}$$

a výrazu lišícího se pouze opačným znaménkem členu v závorce, jestliže za koeficienty α zvolíme nekomutativní čísla splňující tyto záměňovací relace:

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i &= 2\delta_{ik} \,.\, \mathsf{I}, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \\ \alpha_i\alpha_4 - \alpha_4\alpha_i &= 0, \quad\quad\;\; (i = 0, 1, 2, 3), \\ \alpha_4^2 &= \mathsf{I}, \end{aligned}$$

kde I je jednotka v oboru veličin α a δ_{ik} je známý symbol Kroneckerův ($\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$). S veličinami W', p'_x, q_x, atd. jsou veličiny α záměnné. O správnosti Diracova tvrzení lze se snadno přesvědčiti roznásobením. Veličiny α nelze zobraziti, ve smyslu výše vyloženém, pomocí operátorů působících na jedinou libovolnou funkci proměnných x, y, z, t, nýbrž pouze pomocí operátorů působících na čtveřici takových funkcí. Je-li $\psi_\sigma(x, y, z, t)$, ($\sigma = \mathrm{I, II, III, IV}$), taková čtveřice, jest dáno přiřadění operátorů veličinám α touto tabulkou.

Operátor odpovídající veličině

$$\begin{array}{lllll} \alpha_0 \text{ mění } \psi_{\mathrm{I}} \text{ v } \psi_{\mathrm{I}}, & \psi_{\mathrm{II}} \text{ v } \psi_{\mathrm{II}}, & \psi_{\mathrm{III}} \text{ v } -\psi_{\mathrm{III}}, & \psi_{\mathrm{IV}} \text{ v } -\psi_{\mathrm{IV}}, & \\ \alpha_1 \text{ mění } \psi_{\mathrm{I}} \text{ v } \psi_{\mathrm{IV}}, & \psi_{\mathrm{II}} \text{ v } \psi_{\mathrm{III}}, & \psi_{\mathrm{III}} \text{ v } \psi_{\mathrm{II}}, & \psi_{\mathrm{IV}} \text{ v } \psi_{\mathrm{I}}, & \\ \alpha_2 \text{ mění } \psi_{\mathrm{I}} \text{ v } i.\psi_{\mathrm{IV}}, & \psi_{\mathrm{II}} \text{ v } -i\psi_{\mathrm{III}}, & \psi_{\mathrm{III}} \text{ v } i\psi_{\mathrm{II}}, & \psi_{\mathrm{IV}} \text{ v } -i\psi_{\mathrm{I}}, & (13) \end{array}$$

α_3 mění ψ_{I} v ψ_{III}, ψ_{II} v $-\psi_{\mathrm{IV}}$, ψ_{III} v ψ_{I}, ψ_{IV} v $-\psi_{\mathrm{II}}$,
α_4 mění ψ_{I} v ψ_{I}, ψ_{II} v ψ_{II}, ψ_{III} v ψ_{III}, ψ_{IV} v ψ_{IV}.[7])

Je-li L operátor odpovídající výrazu na levé straně rovnice (10), jest jasné, že čtyři funkce ψ_σ, ($\sigma = \mathrm{I, II, III, IV}$), splňující soustavu čtyř diferenciálních rovnic

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\alpha_4 + \frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3 + \frac{2\pi i m_0 c}{h}\alpha_0\right)\psi_\sigma = 0, \quad (12')$$

hoví též rovnicím $L\psi_\sigma = 0$. Rovnice (12′) jsou základní rovnice Diracovy vlnové mechaniky isolovaného hmotného bodu. Jejich nejdůležitější vlastnosti budou vyloženy ještě v dalším. Nyní se však musíme obrátiti k prakticko-fysikální interpretaci celého dosud vyloženého teoretického formalismu.

Předpokládejme, že jsme nalezli nějaké řešení $\psi_{\mathrm{I}}, \psi_{\mathrm{II}}, \psi_{\mathrm{III}}, \psi_{\mathrm{IV}}$ rovnic (12′). Každé takové řešení popisuje určitý stav hmotného bodu. Pomocí funkcí ψ lze určiti t. zv. pravděpodobné hodnoty (Erwartungswerte) veličin $W', q_x, p'_x, \ldots$ i výrazů $G(q_x, p'_x, \ldots)$ z nich utvořených, příslušné hmotnému bodu v dotyčném stavu. Obecný vzorec pro pravděpodobnou hodnotu $\overline{G}$ veličiny G jest

$$\overline{G} = \int \sum_{\sigma=\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} \psi^*_\sigma G \psi_\sigma \mathrm{d}\mathfrak{r}, \quad (\mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \quad (14)$$

kdež ψ^*_σ je funkce komplexně sdružená s ψ_σ a výraz G si myslíme nahrazen příslušným operátorem. Integrace se vztahuje na celý obor proměnných x, y, z. Pro $\overline{q}_x, \overline{q}_y, \overline{q}_z$ a $\overline{p}'_x, \overline{p}'_y, \overline{p}'_z$ máme specielně tyto výrazy

$$\overline{q}_x = \int \sum_{\sigma=\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} \psi^*_\sigma x \psi_\sigma \,\mathrm{d}\mathfrak{r} = \int x \,.\, Q(\mathfrak{r}, t)\,\mathrm{d}\mathfrak{r}, \text{ atd.,} \quad (15)$$

$$\overline{p}'_x = \int \sum_{\sigma=\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} \psi^*_\sigma \,.\, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\psi_\sigma \,\mathrm{d}\mathfrak{r}, \text{ atd.} \quad (15')$$

Pravděpodobné hodnoty $\overline{q}_x, \overline{p}'_x$ atd. udávají pravděpodobné výsledky měření souřadnic, komponent impulsu atd., provedených na uvažované hmotné částici, která je v dotyčném stavu ψ.

Ze vzorce (15) vidíme ihned, že výraz $Q(\mathfrak{r}, t)\,\mathrm{d}\mathfrak{r}$ musíme interpretovati jako pravděpodobnost, že hmotný bod bude v čase t nalezen v prostorovém elementu $\mathrm{d}\mathfrak{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, ležícím na místě $\mathfrak{r}$ (když bude proveden experiment resp. měření, dovolující určení polohy hmotného bodu s potřebnou přesností). Funkci

[7]) Je tedy vlastně $\alpha_4 \equiv 1$. Operátory příslušné podle (13) abstraktním veličinám α budeme označovati stejně, jako veličiny α samotné.

$$Q(\mathfrak{r}, t) = \Sigma\, \psi^*{}_\sigma \psi_\sigma = \Sigma\, \psi^*{}_\sigma \, \mathrm{I} \, \psi_\sigma = \Sigma\, \psi^*{}_\sigma \alpha_4 \psi_\sigma$$

lze tedy nazvati hustotou pravděpodobnosti polohy. Protože je vždy $Q \geqq 0$, jest splněna samozřejmá nutná podmínka, kterou musíme na hustotu pravděpodobnosti klásti. Kromě toho lze normováním funkcí ψ_σ docíliti, aby integrál

$$\int Q \, d\mathfrak{r} = 1. \tag{16}$$

Výpočtem lze dále obecně dokázati, že v každém možném stavu hmotného bodu je správná nerovnina

$$\overline{(q_x - \overline{q_x})^2} \cdot \overline{(p'_x - \overline{p'_x})^2} \geqq h^2, \tag{8'}$$

a podobně pro ostatní komponenty. To však je právě přesný význam „empirické" nerovnosti (8). Nepatrná velikost Planckovy konstanty h je vysvětlením pro fakt, že pojem klasického hmotného bodu je pojmem názorným. Jest samozřejmě třeba dokázati, že všecky známé fysikální zjevy, k jejichž výkladu bylo dosud třeba fikce klasického hmotného bodu (na př. Wilsonovy mlžné dráhy) lze teoreticky stejně dobře vyložiti i na základě pojmu hmotného bodu vlnové mechaniky. To skutečně učiniti lze.[8])

Je-li čtveřina ψ_σ taková, že platí pro jistý operátor G vztah

$$G\psi_\sigma = C \cdot \psi_\sigma, \tag{17}$$

kdež C je (obyčejná) konstanta, jest vzhledem k (14) a (16)

$$\overline{G} = C.$$

V případě (17) nazýváme stav ψ_σ hmotného bodu stavem charakteristickým, příslušným k hodnotě C veličiny G. Hodnota $\overline{G} = C$ je v tomto případě hodnotou jistou veličiny G. Každá pravděpodobná hodnota $\overline{G}$ libovolné veličiny G může býti — ve zvláštním stavu hmotného bodu — též hodnotou jistou. Teorie je tedy ve shodě s výše zmíněnou zásadní možností absolutně přesného určení buď polohy nebo impulsu hmotné částice. Tak na př. hmotná částice, pro niž jsme v čase t určili přesně třebas x-ovou souřadnici, jest v tom čase v charakteristickém stavu příslušném k naměřené hodnotě veličiny q_x. Určování pravděpodobných hodnot, které, jak uvedeno, mohou býti ve zvláštních případech též hodnotami jistými mechanických veličin (na př. souřadnic, komponent impulsu, impulsmomentu, energie hmotného bodu atd.) jest základní úkol a vlastně celý obsah vlnové mechaniky, neboť předpovídání pravděpodobných hodnot jest nyní jediný zásadně možný způsob fysikálního předpovídání budoucnosti. Tím je dáno též dnešní nové pojetí fysikální kausality.

[8]) Při Wilsonových mlžných drahách ovšem nejde nikdy o isolovaný hmotný bod. K jejich výkladu je proto třeba úplné teorie z odst. 3.

O Diracových rovnicích lze dokázati, že nemění svůj tvar při Lorentzově transformaci plynulých souřadnic x, y, z a času t, přiřadíme-li ji jistou lineární transformaci funkcí ψ_σ.

Rovnice (12') mají ještě další vlastnosti zcela zásadní důležitosti. K výše uvedeným nutným podmínkám pro pravděpodobnostní hustotu Q přistupuje v relativistické teorii ještě podmínka další. Je totiž nutné, má-li nový pojem hmotného bodu míti vůbec smysl, aby pravděpodobnost Q dr byla relativistickým invariantem. K tomu je však třeba, aby z funkcí ψ_σ bylo možno kromě výrazu Q sestrojiti ještě tři výrazy S_x, S_y, S_z, které by se společně s Q transformovaly stejně, jako se transformují plynulé souřadnice x, y, z společně s časem t, nebo komponenty vektoru $\mathfrak{p}'$ společně s energií W'. Ukazuje se, že vzhledem k výše zmíněným transformačním vlastnostem funkcí ψ_σ jest tato velmi obtížná podmínka skutečně splněna. Komponenty S_x, S_y, S_z vektoru $\mathfrak{S}$ jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} S_x &= \Sigma\, \psi_\sigma{}^* \alpha_1 \psi_\sigma \\ S_y &= \Sigma\, \psi_\sigma{}^* \alpha_2 \psi_\sigma \\ S_z &= \Sigma\, \psi_\sigma{}^* \alpha_3 \psi_\sigma\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Dokonce platí na základě rovnic (12') pro vektor $\mathfrak{S}$ a veličinu Q známá rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{19}$$

Veličina $e\,.\,Q$ udává pravděpodobnou hustotu (pravděpodobnou hodnotu hustoty) elektrického náboje. Je tedy $e\,.\,Q = \bar{\varrho}$. Podobně můžeme vzhledem k (19) psáti

$$e\,.\,c\,.\,\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{i}}.$$

Přirozeně je rovnicemi (12') docíleno i náležitého souhlasu se zkušeností. Charakteristický stav hmotného bodu, v němž máme jistotu nalézti určitý impuls $\bar{\mathfrak{p}}'$, je popsán čtveřicí funkcí ψ_σ tohoto tvaru:

$$\psi_\sigma(x, y, z, t) = a_\sigma\,.\,e^{\frac{2\pi i}{h}(\bar{p}'_x.x + \bar{p}'_y.y + \bar{p}'_z.z - \bar{W}'.t)}.$$

Představují rovinnou vlnu o frekvenci

$$\nu = \frac{1}{h}\,.\,\bar{W}' = \frac{1}{h}\,.\,\sqrt{c^2\bar{\mathfrak{p}}'^2 + m_0{}^2c^4}$$

a délce vlny $\lambda = h/\bar{p}'$, kdež $\bar{p}'$ je absolutní hodnota vektoru $\bar{\mathfrak{p}}'$. Pomocí těchto vln lze kvantitativně vyložiti interferenci a ohyb materiálních paprsků. K danému $\bar{\mathfrak{p}}'$ existují dokonce čtyři lineárně nezávislé čtveřice charakteristických funkcí, které všechny mají tvar rovinné vlny postupující ve směru vektoru $\bar{\mathfrak{p}}'$. Dvěma z nich odpovídá kladná hodnota energie

$$\bar{W}' = +\sqrt{c^2\bar{\mathfrak{p}}'^2 + m_0{}^2c^4},$$

druhým dvěma hodnota $-\bar{W}'$. Přesný fysikální význam těch „záporných" řešení není ještě úplně jasný. V případě elektronu jsou v souvislosti s positrony. Dosud se však nepodařilo tu souvislost zcela uspokojivě matematicky formulovati. Oba dva stavy hmotného bodu odpovídající „kladným" vlnám se vzájemně liší různou (opačnou) orientací t. zv. spinu. Tak nazýváme vektor $\mathfrak{s}$, jehož komponentám odpovídají operátory: $s_x \to \alpha_2\alpha_3$, $s_y \to \alpha_3\alpha_1$, $s_z \to \alpha_1\alpha_2$. O jeho významu se zmíním příležitostně v dalším.

2. *Druhá základní fikce: Kvantované elektromagnetické pole.* Rovnice klasického elektromagnetického pole ve vakuu popisují i kvantované pole. Také výrazy pro hustotu energie a impulsu pole zůstávají přirozeně v platnosti. Veličiny A_x, A_y, A_z, Φ (viz I, 2) však již nepokládáme za obyčejná čísla, nýbrž (podobně jako v předcházejícím odstavci veličiny $q_x, \ldots$) za čísla obecnější, pro jejichž násobení neplatí zákon komutativnosti, ale platí tyto zaměňovací relace:

$$\Phi'\Phi - \Phi\Phi' = -\frac{ch}{2\pi i} \cdot D(l, \tau) \cdot 1 \tag{20}$$

$$A'_x \cdot A_x - A_x A'_x = \frac{ch}{2\pi i} \cdot D(l, \tau) \cdot 1 \text{ a cykl.,} \tag{20'}$$

$$\Phi' A_x - A_x \Phi' = 0 \text{ a cykl.,} \tag{20''}$$

$$A'_x A_y - A_y A'_x = 0 \text{ a cykl.} \tag{20'''}$$

Při tom je $\Phi = \Phi(\mathfrak{r}, t)$ a $\Phi' = \Phi(\mathfrak{r}', t')$; analogicky pro ostatní veličiny. Dále funkce D má tento význam:

$$D(l, \tau) = \frac{1}{l} \{\delta(l + c\tau) - \delta(l - c\tau)\},$$

kdež $l = |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'|$, $\tau = t - t'$ a $\delta(\varepsilon)$ je definováno rovnicemi (4). Ukážeme v tomto odstavci pouze na nejjednodušším případě důsledky a fysikální interpretaci zaměňovacích relací (20)—(20‴).

Budiž dána lineárně polarisovaná světelná vlna, postupující ve směru osy z, rovnicemi

$$\begin{aligned} A_x &= \nu \cdot \sqrt{\frac{h}{2\pi c}} \left(B e^{-\frac{2\pi i \nu}{c}(z - ct)} + B^* e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(z - ct)} \right) \\ A_y &= A_z = \Phi = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Faktor před závorkou byl zvolen jen pro pohodlí. Pro energii této vlny, obsaženou v krychli, která má hrany rovnoběžné s osami a délku hrany rovnu c/ν (je to nejmenší a nejjednodušší dutina, v níž mohou interferencí vlny (21) a vlny postupující v opačném směru vzniknouti stojaté vlny), plyne výraz

$$T = \frac{1}{8\pi} \cdot \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, d\mathfrak{r} = \frac{h\nu}{2} (BB^* + B^*B). \tag{22}$$

Amplitudy B, B^* nejsou tu obyčejná komplexní čísla, nýbrž veličiny nekomutativní. Po dosazení za A_x z rovnice (21) do rovnice (20′) a jednoduché úpravě, kterou zde netřeba prováděti,[9]) dostaneme pro ně tuto zaměňovací relaci:

[9]) Zahrnuje též prostorovou integraci přes zvolenou krychli o hraně c/ν.

$$BB^* - B^*B = 1. \tag{23}$$

Veličina T daná rovnicí (22) také ovšem není obyčejné číslo. V experimentální fysice však jest energie elektromagnetického pole, jakožto výsledek měření, nutně obyčejným číslem. Vysvětlení jest zase toto: Nekomutativní veličiny, jako A_x (rov. (21)), B, B^* a podobné lze zobraziti pomocí operátorů, působících na funkce jisté proměnné u. Existuje nyní funkce $\chi(u)$, která charakterisuje kvantový stav pole (21), a pomocí níž lze stanoviti pravděpodobné hodnoty (Erwartungswerte) oněch veličin v příslušném stavu pole. Obecný předpis pro jejich výpočet jest zase tento: Je-li U operátor působící na funkce proměnné u, jest jeho pravděpodobná hodnota

$$\overline{U} = \int \chi^* U \chi \, du \tag{24}$$

(Srovnej formuli (14) z odst. 1.) Analogicky s (16) musí též platit

$$\int \chi^* \chi \, du = 1. \tag{25}$$

Pravděpodobné hodnoty udávají zase pravděpodobné výsledky fysikálních měření. Tím je dána praktická fysikální interpretace kvantování pole pomocí nekomutativních čísel.

Budiž Ω (resp. Ω^*) operátor, který působí na každou funkci proměnné u tak, že ji mění v touž funkci proměnné $u + 1$ (resp. $u - 1$). Operátory $\Omega\Omega^*$ a $\Omega^*\Omega$ tedy nemění vůbec onu funkci. Veličiny B, B^*, splňující relaci (23), lze zobraziti takto:

$$B \rightarrow \sqrt{u + 1} \,.\, \Omega, \quad B^* \rightarrow \sqrt{u} \,.\, \Omega^*. \tag{26}$$

Aby teorie mohla býti v souhlase se zkušeností, jest nutno, aby každá pravděpodobná hodnota $\overline{T}$ energie T světelné vlny (21) byla zároveň hodnotou jistou. Tento požadavek stačí k tomu, abychom mohli určiti jak tvar funkce $\chi(u)$, tak i všecky naměřitelné hodnoty veličiny T. Podle (24), (22), (26) platí předně

$$\overline{T} = \tfrac{1}{2}h\nu \,.\, \int \chi^* \,.\, (BB^* + B^*B)\, \chi \, du = \tfrac{1}{2}h\nu \,.\, \int \chi^* \, (2u + 1)\, \chi \, du.$$ [10]

Aby $\overline{T}$ byla hodnota jistá, musí býti

$$u \,.\, \chi = N \,.\, \chi, \tag{27}$$

kdež N je konstanta. Z (27) a (25) plyne, že χ musí býti tvaru $\sqrt{\delta(u - N)}$, kdež δ je funkce definovaná rovnicí (4). Pak je prostě

$$\overline{T} = N \,.\, h\nu + \tfrac{1}{2}h\nu. \tag{28}$$

(Příště dokončení.)

---

[10]) Operátor příslušný výrazu $BB^* + B^*B$ jest totiž

$$\sqrt{u+1}\Omega \sqrt{u}\Omega^* + \sqrt{u}\Omega^* \sqrt{u+1}\Omega = (2u + 1)\, \Omega\Omega^*.$$