Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Poznámky o ploše třetího stupně s oskulačním kuželem

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 4, 245--251

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120830

Poznámky o ploše třetího stupně s oskulačním kuželem.

Napsal *L. Seifert* v Brně.

Plocha třetího stupně s oskulačním kuželem vyznamenává se především tím, že lze jí samu v sebe transformovati kolineárními transformacemi. Kdežto obecná plocha takové transformace vůbec nepřipouští, připouští plocha s oskulačním kuželem grupu 54 kolineací. Druhá, neméně pozoruhodná je okolnost, že Sylvestrův pětistěn stává se neurčitým; proto věnoval jí Rodenberg pozornost v obsáhlém svém pojednání, kde studuje plochy patřící určitému pětistěnu.[1]) Jinak není nám známo, že by o ní bylo jednáno, jako vůbec zvláštní plochy třetího stupně těšily se dosud velmi malé pozornosti. Zdá se však, že zde jsou některé podrobnosti, jež pozornosti zasluhují; uvádíme z nich v odst. 4 dva případy plochy obratové, v odst. 5 pak dokazujeme, že kvadratické plochy, jež dvojšestniny převádí v sebe, dotýkají se roviny, podél níž kužel s plochou oskuluje. Tato okolnost zdá se zajímavá, poněvadž ona rovina je částí Hesseovy plochy a souvislost této s řečenými plochami kvadratickými není známa.

V odst. 6 odvozujeme některé vlastnosti svazku křivek kubických, považujíce je za průmět křivek na ploše. Zejména však upozorňujeme na větu odst. 7, o které není nám známo, že byla již někde vytčena a jejíž odvození z prostorového útvaru je tak jednoduché.

1. Buď $K\,(x, y, z) = 0$ rovnice kuželu třetího stupně s vrcholem $V\,(0, 0, 0, 1)$. Pak

$$K\,(x, y, z) + t^3 = 0$$

jest rovnice plochy třetího stupně, která podél křivky $K = 0$, $t = 0$ oskuluje s kuželem $K = 0$. Označujeme křivku krátce K, pišme ji ve tvaru kanonickém a rovnici plochy tedy

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz + t^3 = 0. \tag{1}$$

Pokud K je křivka rodu 1, nemá plocha singulárních bodů. 27 přímek plochy lze bezprostředně napsati, píšeme-li 1. v těchto třech ekvivalentních tvarech,[2]) kde ε značí imaginární třetí odmoc-

---

[1]) Zur Klassifikation der Flächen dritter Ord., Math. Annalen, sv. 14.

[2]) Srovnej Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven, str. 219.

ninu jedné ($\varepsilon^3 = 1$):

$$
\begin{aligned}
&(-2mx + y + z)(-2mx + \varepsilon^2 y + \varepsilon z)(-2mx + \varepsilon y + \varepsilon^2 z) + \\
&\qquad + (8m^3 + 1)x^3 + t^3 = 0 \\
&(x - 2my + z)(\varepsilon x - 2my + \varepsilon^2 z)(\varepsilon^2 x - 2my + \varepsilon z) + \\
&\qquad + (8m^3 + 1)y^3 + t^3 = 0 \\
&(x + y - 2mz)(\varepsilon x + \varepsilon^2 y - 2mz)(\varepsilon^2 x + \varepsilon y - 2mz) + \\
&\qquad + (8m^3 + 1)z^3 + t^3 = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Body obratu křivky K^1 jsou:

$W_1\,(0, 1, -1, 0)$ $\quad W_2\,(0, \varepsilon, -1, 0)$ $\quad W_3\,(0, \varepsilon^2, -1, 0)$
$W_4\,(-1, 0, 1, 0)$ $\quad W_5\,(-1, 0, \varepsilon, 0)$ $\quad W_6\,(-1, 0, \varepsilon^2, 0)$
$W_7\,(1, -1, 0, 0)$ $\quad W_8\,(\varepsilon, -1, 0, 0)$ $\quad W_9\,(\varepsilon^2, -1, 0, 0)$

a leží jak známo po třech na dvanácti osách obratu. Tyto body hrají na naší ploše důležitou úlohu, neboť v každém z nich sbíhají se tři přímky plochy ležící v téže rovině. Body takové zoveme ovální neb Salmonovy body plochy. Na př. v bodě W_1 sbíhají se tři přímky dané rovnicí roviny tritangenciální

$$-2mx + y + z = 0$$

a některou z rovnic

$$\sqrt[3]{8m^3 + 1}\,x + t = 0, \quad \sqrt[3]{8m^3 + 1}\,x + \varepsilon t = 0, \quad \sqrt[3]{8m^3 + 1}\,x + \varepsilon^2 t = 0$$

Můžeme tyto přímky označiti I^a, I^b, I^c, a zachovávajíce tuto úmluvu, podobně označíme II^a, II^b, II^c přímky bodem W_2 v rovině

$$-2mx + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = 0$$

a t. d.

Plocha má pouze tři reálné přímky, které tvoří trojúhelník v rovině

$$\sqrt[3]{8m^3 + 1}\,(x + y + z) + t = 0, \tag{3}$$

12 imaginárních prvého druhu (s reálným bodem) a 12 ryze imaginárních. Podle známého Schläfliho rozdělení patří druhu IV.

2. Mezi kolineacemi, které plochu samu v sebe transformují, jest nejvýznačnější ternární centrální kolineace

$$\Phi\,(x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \varepsilon t);$$

každý bod ovální je středem centrální involutorní kolineace. Celkem se grupa G_{54} kolineací naší plochy skládá[3])

a) z 9 centrálních kolineací o středech W_i;

---

[3]) Bobek, Ueber Flächen dritter Ordnung mit Kollineation in sich, Monatshefte für Mathematik und Physik, r. X.

b) z $2 \times 12 = 24$ ternár-planárních kolineací, jichž osy jsou osy obratu. Každé ose patří kolineace složená ze dvou centrálních a její dvojmoc;

c) z $2 \times 9 = 18$ senárních kolineací; každá je složena ze tří centrálních, nejsou-li středy W_i na přímce;

d) ze 2 ternárních centrálních kolineací Φ, Φ^2 a identity.

3. Prvá polára bodu $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ jest

$$x_0x^2 + y_0y^2 + z_0z^2 + 2m\,(x_0yz + y_0xz + z_0xy) + \lambda\,.\,t_0t^2 = 0. \quad (4)$$

Bod P_0 v π $(t_0 = 0)$ má za poláru kužel s vrcholem V, stopa jeho na π jest polára k bodu P_0 ke křivce K. Poláry bodů na přímce PV tvoří svazek ploch dotýkajících se podél k, mezi nimi ovšem tři, které se plochy dotýkají v průsecích s P_0V.

Druhá polára (polární rovina) bodu P jest

$$xx_0^2 + yy_0^2 + zz_0^2 + 2m\,(xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0) + \lambda tt_0^2 = 0, \quad (5)$$

pohybuje-li se bod opět po P_0V, opíše tato druhá polára svazek rovin a osa jeho je druhá polára stopy P_0 ke K.

Hesseova plocha rozpadá se v rovinu $t = o$ a kužel třetího stupně s vrcholem V, jehož stopa na π jest hessienna h křivky K. Parabolická křivka skládá se z K a křivky devátého stupně, jejíž průmět z V na π jest h.

Pohybuje-li se P v povrchové přímce kuželu $V(h)$, tvoří prvé poláry svazek kuželů s vrcholem Q_0, které se podél dvou povrchových přímek v π dotknou. Q_0 leží na h, P_0Q_0 jsou reciproké póly křivky h a ony dvě přímky tvoří poláru bodu P_0.

Pro průmět plochy s centra V do π vychází zajímavá okolnost, že asymptotické tečny bodu P promítnou se jako tečny z P_0 k prvé poláře k bodu P_0 ke křivce K, je-li P na parabolické křivce, splynou obě v tečnu vratu, jež se promítne do spojnice P_0Q_0. Tato spojnice, jak známo, obalí cayleyenu křivky K.

4. Prvá polára bodu P a polární rovina sekou se obecně v kuželosečce. Šest jejich průseků s plochou jsou dotyčné body asymptotických tečen vedených bodem P ku ploše. Pohybuje-li se P po přímce q, opíše řečená kuželosečka plochu obratu a její průsek s plochou třetího stupně je křivka, podél níž oskuluje tato plocha se zborcenou plochou tvořenou asymptotickými tečnami, které sekou p.[4] Obecně je plocha obratu stupně pátého, křivka dotyku stupně 15. Vyšetřme plochu obratu pro případ, že P se pohybuje po přímce VP_0. Vyloučením t_0 z rovnic 4) a 5) vychází rovnice plochy obratu

$$\lambda t^3\,[x\,(x_0^2 + 2my_0z_0) + y\,(y_0^2 + 2mx_0z_0) + z\,(z_0^2 + 2mx_0y_0)] +$$
$$+ [x_0\,(x^2 + 2myz) + y_0\,(y^2 + 2mxz) + z_0\,(z^2 + 2mxy)]^2 = 0; \quad (6)$$

---

4) Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen, dritter Ord., str. 102.

vyloučením t z 6) a 1) dostaneme průmět čáry dotyčné do π.

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz)\,[x\,(x_0^2 + 2my_0z_0) + y\,(y_0^2 + 2mx_0z_0) +$$
$$+ z\,(z_0^2 + 2mx_0y_0)] +$$
$$+ [x_0\,(x^2 + 2myz) + y_0\,(y^2 + 2mxz) + z_0\,(z^2 + 2mxy)]^2 = 0.$$

Docházíme tedy k pozoruhodnému výsledku, že *plocha obratu přímky P_0V je stupně čtvrtého* (oddělí se π) *a má polární kuželosečku bodu P_0 za dvojnou úvratovou (kuspidální). Křivka oskulační je stupně 12 a promítne se do π jako křivka stupně čtvrtého, která se K dotkne v bodech prvé poláry a druhou poláru má za dvojnou tečnu, jejíž dotyčné body leží na prvé poláře. Bod P_0 je dvojným bodem křivky a průměty obou asymptotických tečen jsou tečnami dvojného bodu.*

Hledejme podobně plochu obratovou přímky p, ležící v π. Pišme ji

$$x_0 = x_1 + \lambda x_2, \quad y_0 = y_1 + \lambda y_2, \quad z_0 = z_1 + \lambda z_2, \quad t_0 = 0,$$

dostaneme prvou a druhou poláru ve tvarech

$$M + \lambda N = 0, \quad A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0,$$

kde M, N jsou druhého stupně, A, B, C stupně prvého v x, y, z. Vyloučením λ jde

$$A \,.\, N^2 - 2B \,.\, M \,.\, N + M^2 \,.\, C = 0. \tag{7}$$

Plocha obratová přímky v π ležící je tedy kužel pátého stupně s vrcholem V, který má čtyři dvojné hrany; stopy jejich jsou póly přímky p ke K $(M = N = 0)$.

5. Je známo, že na obecné ploše třetího stupně jest 36 dvojšestnin. Dvojšestninou rozumíme konfiguraci dvanácti přímek

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{matrix}$$

takovou, že všechny přímky v jedné řadě jsou vzájemně mimoběžné, jednotlivá přímka prvé (druhé) řady protíná všechny přímky druhé (prvé) vyjma onu, která jest pod (nad) ní. Přímky v témž sloupci budeme nazývati p r o t i l e h l é.

V našem případě každá přímka plochy jde bodem W_i, musí tedy některými W_i jíti vždy dvě přímky určité dvojšestniny. Nechť I^b, I^c, jsou dvě takové bodem W_1; pak v rovině (I^b, I^c) jest další přímka I^a a ta musí býti protata oběma protilehlými přímkami. Je-li jedna II^a, musí další býti toliko III^a. Volíme-li II^a za protější k I^c, jest dvojšestnina určena a lze ji snadno doplniti na

$$\begin{matrix} I^c & III^a & II^b & IV^b & VI^a & V^c \\ II^a & I^b & III^c & V^a & IV^c & VI^b. \end{matrix}$$

Vidíme, že stopy přímek zúčastněných jsou na dvou osách obratu $W_1W_2W_3$, $W_4W_5W_6$. Poněvadž podobným způsobem lze vybrati 12 dvojin os, které nemají společného W_i a dvojšestnina přechází transformacemi Φ, Φ^2 opět v jinou dvojšestninu, jest všech 36 dvojšestnin vyčerpáno a všechny jsou typu podobného.

O dvojšestnině platí Schurova věta:[5]) Existuje plocha druhého stupně taková, že protilehlé přímky jsou reciproké poláry. V našem případě bod $W_1 \equiv (I^a, I^c)$ má polární rovinu (II^a, III^a), $W_2 \equiv (II^a, II^b)$ má polární rovinu (I^c, III^c), bod $W_3 \equiv (III^a, III^c)$ má polární rovinu (I^b, II^b). Tyto tři polární roviny jdou přímkou $W_1 W_2 W_3$. Podobně bodům $W_4 \equiv (IV^b, IV^c)$, $W_5 \equiv (V^a, V^c)$, $W_6 \equiv (VI^a, VI^b)$ patří polární roviny (V^a, VI^a), (IV^b, VI^b), (IV^c, V^c) osou $W_4 W_5 W_6$. Přímky $W_1 W_2 W_3$, $W_4 W_5 W_6$ v π patří tedy Schurově ploše a tato se π dotýká. Dospíváme tedy k zajímavému výsledku:

Plochy druhého stupně, jichž polární systémy převádějí dvojšestninu samu v sebe, dotýkají se roviny π. Dvojinou os obratu, jež se na křivce neprotínají, jdou tři plochy, které přecházejí v sebe transformacemi Φ, Φ^2.

Ostatně je velmi snadno napsati rovnice těchto ploch. Pro uvedenou dvojšestninu zní:

$$xy + zt \,.\, k + m \,.\, k^2 t^2 = 0, \tag{8}$$

kde $k = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8m^3 + 1}}$.

6. Pišme nyní rovnici křivky K ve tvaru

$$xyz + k\,(x + y + z)^3 = 0,$$

kde $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ jsou tečny obratu, $x + y + z = 0$ osa obratu. Pak rovnice plochy jest

$$xyz + k\,(x + y + z)^3 + t^3 = 0. \tag{9}$$

Protněme plochu rovinou

$$t = Ax + By + Cz;$$

průmět rovinného průseku do π jest

$$xyz + k\,(x + y + z)^3 + \lambda\,(Ax + By + Cz)^3 = 0, \tag{10}$$

tedy křivka, která s K oskuluje ve třech bodech přímky $o \equiv Ax + By + Cz = 0$. Otáčí-li se rovina kol této přímky, dostaneme v průmětu svazek křivek, které mají v bodech A, B, C této přímky dotyk druhého stupně. Každá křivka svazku je průmětem tří křivek plochy, z nichž jedna je reálná. Poněvadž přímkou o jde 12 tečných rovin, ale body dotyčné jsou po třech na přímkách vrcholem V, můžeme vysloviti větu:

Ve svazku křivek třetího stupně, které v průsecích přímky o oskulují s křivkou K, jsou čtyři s dvojným bodem. Dvojné body jsou póly přímky o ke K.

---

[5]) Schur, Mathemat. Annalen, sv. 18. Baker, London M. S. Proc. ř. 2, sv. 9.

Dané přímky m dotknou se dvě křivky svazku, neboť z bodu (o, m) vychází ke křivce v rovině (mV) šest tečen, jejichž dotyčné body jsou však na dvou přímkách bodem V. Máme na mysli ovšem jen vlastní křivky svazku a nikoli třikráte čítanou přímku o $(\lambda = \infty)$.

Z věty odst. 4. plyne okamžitě:

Geometrické místo bodů obratu křivek uvažovaného svazku jest křivka pátého stupně, která 4 póly přímky o má za dvojné body.

Nechť dva z bodů na o splynou $A \equiv B$, o jest tečnou v A, tečnový bod je C. Křivky svazku mají v A styk šestibodový, v C tříbodový. Ve svazku jsou tři křivky s dvojným bodem.

Prochází-li o jedním bodem W_i rozpadá se jedna křivka v tečnu obratu a kuželosečku, mimo to jsou dvě s dvojným bodem.

Dvojný bod může přejíti v bod vratu jen tehdá, když o se dotkne hessieny v bodě na př. A. Jedna z křivek svazku má pak bod vratu v reciprokém pólu A', $A'A$ jest tečna bodu vratu.

7. Jsou-li a_1, b_2 c_{12} přímky v jedné tritangenciální rovině plochy třetího stupně a vedeme-li jimi libovolné roviny, tu, jak známo, další průseky jejich s plochou jsou tři kuželosečky na téže ploše druhého stupně. Poněvadž však kuželosečky v rovinách svazku (a_1) sekou a_1 v involuci, dostáváme odtud okamžitě tyto věty:[6])

Vezmeme-li na každé straně trojúhelníka $a_1b_2c_{12}$ jeden pár involuce dotyčných bodů bitangenciálních rovin, leží těchto 6 bodů na kuželosečce.

Spojíme-li bod na jedné straně s bodem na druhé straně přímkou a rovněž body v involucích přiřaděné, vytínají spojnice na třetí straně také pár involuce.

Spojíme-li asymptotické body dvou stran, prochází spojnice také asymptotickým bodem třetí strany. Šest asymptotických bodů tří stran tvoří tedy vrcholy úplného čtyřstranu, strany trojúhelníka jsou jeho úhlopříčny.

Mezi plochami druhého stupně, jež jdou třemi kuželosečkami jest ∞^2 kuželů. Vrcholy jejich vyplňují plochu čtvrtého stupně a průsek její s rovinou a_1, b_2, c_{12} je identický s průsekem této roviny a Hesseovy plochy.

Všimněme si nyní naší plochy a její projekce s V do π. Mějme na mysli tritangenciální rovinu s reálnými přímkami, jichž stopy jsou W_1, W_4, W_7. Vedeme-li jedním, na př. W_1, přímku m, určuje s I^a rovinu, ve které jest I^a a kuželosečka plochy. I^a se promítne jako tečna obratová, kuželosečka má v průmětu dvakráte tříbodový dotyk v bodech přímky m. Máme tedy větu:

Jsou-li W_1, W_4, W_7 body obratu na téže ose obratu křivky K, a, b, c jejich tečny a m, n, p libovolné přímky prvým, druhým a třetím z nich, pak kuželosečka k_M jež v bodech na m má s křivkou dotyk tříbodový, seče a ve dvou bodech M_1, M_2, podobně kuželosečky k_N k_P s dotykem tříbodovým v bodech na n a p, sekou b a c

[6]) Viz Cremona, Opere matematiche, t. III, str. 83 a také Humbert, Sur les surfaces desmiques, Journal de mat., s. 4, šv. 7.

v bodech N_1, N_2; P_1, P_2. Šest bodů M_1, M_2, N_1, N_2, P_1, P_2 leží na nové kuželosečce l. Existuje ještě další kuželosečka (zdánlivý obrys plochy druhého stupně) z, která se dvakrát dotýká každé kuželosečky k_M, k_N, k_P, l.

Jest ∞^3 kuželoseček l a z, k jednomu l patří jedno z a obráceně. Mezi l jest ∞^2 dvojin přímkových a rovněž mezi z. Bod v π jest středem čtyř dvojin z.

Sestrojíme-li k W_1 harmonický bod T_1 podle vrcholů B, C trojúhelníka a, b, c, podobně k W_2, W_3 body T_2, T_3, pak W_1, T_1; W_2, T_2; W_3, T_3 jsou po každé dvojné body involuce, jejímiž dvojinami procházejí kuželosečky l.

*

Remarque sur la surface du troisième ordre au cône osculateur.

(Extrait de l'article précédent.)

Cette surface appartient à la IVe espèce, d'après la classification de Schläfli. Ses droites sont données par les équations 2); parmi elles il y en a 3 situées dans le plan 3), toutes réelles. On peut trouver un groupe de 54 transformations collinéaires qui transforment cette surface en elle-même. Sa surface hessienne est composée du plan d'osculation π et d'un cône du 3e degré.

Il y a deux cas intéressants de la surface inflexionelle d'une droite, c'est à dire de la surface engendrée par les coniques d'intersection de la première et de la seconde polaire de tous les points d'une droite. A une droite menée par le sommet du cône osculateur appartient une surface inflexionelle du 4e degré à la conique cuspidale 6), à une droite située dans le plan de la courbe d'osculation appartient un cône 7) du 5e ordre.

Si l'on construit les quadriques de Schur, c'est à dire les surfaces quadratiques qui transforment un double-six en lui-même de sorte que les droites opposées soient polaires réciproques, toutes ces surfaces touchent le plan d'osculation.

De ces faits, on peut déduire plusieurs résultats pour un faisceau de cubiques (l'équation 10); il y a 4 cubiques à point double, deux sont tangentes à une droite arbitraire, les points d'inflexion de toutes les courbes du faisceau remplissent une courbe (7) du 5e ordre.

Un second résultat:

Soient W_1, W_2, W_3 trois points d'inflexion d'une cubique K, situés sur une droite, a, b, c les tangentes en ces points. Si l'on mène, par ces points, trois droites m, n, p et si l'on construit les trois coniques qui ont dans les deux autres points d'intersection un contact du deuxième ordre, ces coniques coupent les tangentes a, b, c aux points M_1, M_2, N_1, N_2; P_1, P_2; ces six points sont situés sur une conique l et ces quatre coniques touchent une autre conique z, chacune en deux points.