Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Vodička

Theoretický základ Laplaceovy transformace a jejího použití v matematické fysice

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, D119--D131

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120766

Život a působení Strouhalovo konečně dávají i naučení pro dnešní dobu: Je povinností národa, který sám sobě vládne, aby talentu šířky a hloubky Strouhalova talentu umožnil se plně vyžít, a naopak povinností takového talentu je, aby všechno, co činí, prováděl s jediným úmyslem: prospět lidu, z něhož vzešel a který mu umožňuje, aby se plně projevil.

THEORETICKÝ ZÁKLAD LAPLACEOVY TRANSFORMACE A JEJÍHO POUŽITÍ V MATEMATICKÉ FYSICE

Dr VÁCLAV VODIČKA, Plzeň

(Předneseno ve dnech 22. a 29. ledna 1947 na schůzích JČMF v matematickém ústavě Karlovy university v Praze.)

Theoretické počátky Laplaceovy integrální transformace sahají sice do doby alespoň 150 let před námi, přece však jest vzhledem k jejímu netušenému rozvoji a bohatému použití nutno podati alespoň stručný přehled o matematických základech, na nichž celá rozsáhlá stavba stojí.

Ačkoliv představují vývody, obsažené na dalších stránkách, zpravidla jenom postačující (a nikoli zároveň nutné) podmínky pro aplikabilitu operátorových method, přece zahrnují podle autorových zkušeností snad všechny běžné případy technické a fysikální praxe. S matematického hlediska se tu ovšem nabízí nadmíru rozsáhlé pole dalšího bádání, jež by jistě znamenalo veliký užitek i pro naše průmyslové dění.

A) Laplaceova integrální transformace.

Jádrem Laplaceovy transformace jsou dvě fundamentální věty (v dalším je budeme označovat jako větu I. a větu II.). Jejich formulaci a matematickému důkazu je věnována prvá část tohoto pojednání, kdežto druhá má na zřeteli (stále ovšem formou značně abstraktní) použití zmíněné transformace v problémech fysikálně-technických.

I. První hlavní věta.

Při důkazu a formulaci první fundamentální věty i při pozdějších úvahách budeme často používati těchto dvou fakt:

1. Reálnou nebo komplexní funkci $f(t)$ reálné proměnné t budeme nazývati v jistém základním oboru proměnné t funkcí typu (S), jsou-li splněny tyto tři podmínky:

a) Základní obor lze rozděliti na konečný počet intervalů částečných tak, že je $f(t)$ uvnitř každého z nich spojitá a má na jeho koncích — postupujeme-li k nim z jeho nitra — určité konečné limity.

b) V místech rozpojitosti je funkční hodnota rovna aritmetickému průměru obou limit (zleva a zprava), jež tam funkce $f(t)$ má.

c) Derivace $f'(t)$ funkce $f(t)$ existuje v celém základním oboru a splňuje tam tytéž dvě podmínky, které jsme právě žádali od funkce $f(t)$ samotné (v bodech rozpojitosti funkce $f(t)$ máme ovšem na mysli pouze jednostranné limity derivací).

Skupina funkcí vymezených právě uvedenými požadavky je zřejmě tak obsáhlá, že v sobě zahrnuje veliké množství funkčních závislostí, jaké se jen mohou vyskytnouti při skutečných fysikálně-technických problémech (máme tu ovšem na mysli úlohy s počátečními podmínkami a úlohy t. zv. smíšené).

2. Fourierův integrální theorém: Budiž $f(t)$ reálná nebo komplexní funkce reálné proměnné t a to funkce typu (S) v každém konečném intervalu proměnné t a budiž $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ konvergentní. Pak platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-iu(\tau-t)} d\tau.$$

Upozornění. U nevlastních integrálů, vzatých v mezích $-\infty$, $+\infty$, máme v této Fourierově integrální formuli i ve všech dalších úvahách na mysli pouze jejich t. zv. hlavní hodnoty. Na př. integrál od $-\infty$ do $+\infty$ se definuje jako součet limit

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} f(x)\,dx,$$

t. j. jako limita

$$\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{-a}^{b} f(x)\,dx, \tag{*}$$

kde a, b navzájem nezávisle vzrůstají nade všechny meze. V tomto smyslu na př. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ neexistuje, neboť výraz

$$\int\limits_{-a}^{b} x\,dx = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

nemá limitu pro $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Jestliže však mezi a, b předepíši nějaký vztah, na př. $b = a$, může se státi, že limita (vlastní)

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx \tag{**}$$

existuje, ač limita (*) neexistuje. Existuje-li vlastní limita (**), nazýváme ji hlavní hodnotou integrálu $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Na př. hlavní hodnota integrálu

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ existuje a rovná se nule, neboť

$$\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} x\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\tfrac{1}{2}(a^2 - a^2) = \lim_{a\to+\infty} 0 = 0.$$

V tomto smyslu mluvíme o hlavních hodnotách.

T. zv. hlavní hodnoty se vyskytují také při konečných mezích. Např. $\int\limits_{-a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ $(a > 0, b > 0)$ neexistuje, ježto neexistuje limita výrazu

$$\int\limits_{-a}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int\limits_{\delta}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \log\frac{\varepsilon}{a} + \log\frac{b}{\delta},$$

když ε, δ navzájem nezávisle konvergují kladnými hodnotami k nule. Ale existuje limita tohoto výrazu pro $\delta = \varepsilon$, t. j. limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-a}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{b}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\log\frac{\varepsilon}{a} + \log\frac{b}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\log\frac{b}{a} = \log\frac{b}{a},$$

a tu potom nazýváme hlavní hodnotou integrálu $\int\limits_{-a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Věta I. *Funkce $f(t)$, definovaná pro všechna reálná t, budiž v každém konečném oboru proměnné t typu (S) a integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$ budiž absolutně konvergentní pro všechna λ splňující nerovnosti $\alpha < \lambda < \beta$ (α, β pevná reálná čísla).*

Pro všechna $p = \lambda + \mathrm{i}\varrho$, u nichž jest $\alpha < \Re p = \lambda < \beta$, existuje pak integrál

$$F(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

a pro funkci $F(p)$, jím definovanou, platí vztah

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\lambda-\mathrm{i}\infty}^{\lambda+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p = f(t), \tag{2}$$

kde jest λ libovolné pevné číslo z (α, β).

Důkaz: Existence integrálu ve vztahu (1) plyne přímo z předpokládané konvergence integrálu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}|f(t)|\,dt$ a ze vztahu $|e^{-pt}f(t)| = = e^{-\lambda t}|f(t)|$.

Platnost relace (2) pak ověříme přímým výpočtem. Jest totiž

$$\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = ie^{\lambda t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\varrho t}F(\lambda+i\varrho)\,d\varrho = ie^{\lambda t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\varrho t}\,d\varrho \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda+i\varrho)\tau}f(\tau)\,d\tau =$$

$$= ie^{\lambda t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\varrho \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\tau}e^{-i\varrho(\tau-t)}f(\tau)d\tau = ie^{\lambda t}.2\pi e^{-\lambda t}f(t) = 2\pi i f(t).$$

Bohaté použití při řešení problémů fysikálně technických vnucuje ovšem ihned otázku, nejsou-li požadavky, v předpokladech na funkci $f(t)$ kladené, příliš omezující, takže by jen málo funkcí $f(t)$ bylo jimi zahrnuto: Příslušnost k typu (S) ponechává — jak už bylo při definici tohoto typu podotknuto — funkci $f(t)$ velikou volnost; ostatně se dá tento požadavek v jistém ohledu ještě uvolniti a neznamená pak technicky žádné omezení.

Velmi vážné nesnáze by naopak vznikly v souvislosti s požadovanou existencí integrálu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t}|f(t)|\,dt$. Rozumíme-li však pod proměnnou t v dějích fysikálně-technických čas, jsou poměry zpravidla takové, že v určitém okamžiku (bez újmy obecnosti lze do něho položiti časovou nulu) byly pro děj položeny fysikálně-technické podmínky a nás zajímá jeho budoucí průběh, tedy stavy pro kladné hodnoty t. Pro $t < 0$ klademe $f(t) \equiv 0$ a náš integrální požadavek přechází v jednodušší, totiž v požadavek existence $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}|f(t)|\,dt$. V technické praxi se snad vůbec nevyskytují funkce, které by jej alespoň pro vhodná λ (jak žádá věta I.) nesplňovaly.

Výrazu $pF(p)$ budeme říkati Laplaceův obraz originálu $f(t)'$ a první hlavní věta nám tedy dovoluje zobraziti většinu technických funkcí času. Obrazem je právě funkce $pF(p)$ komplexní proměnné p.

II. Druhá hlavní věta

řeší úlohu obrácenou ukazujíc, za jakých podmínek lze pokládati danou funkci $pF(p)$ komplexní proměnné p za obraz jistého originálu a jak se potom onen originál určí.

Věta II.- *Vzorec*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp \tag{3}$$

s libovolným pevným λ z (α, β) definuje pro všechna reálná t funkci $f(t)$, o níž platí v oboru $\alpha < \lambda < \beta$ vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = F(p) \tag{4}$$

za těchto předpokladů:

a) *Daná funkce $F(p)$ komplexní proměnné $p = \lambda + i\varrho$ je regulární v pruhu $\alpha < \lambda < \beta$ roviny p.*

b) *Existuje kladná funkce $\Phi(\omega)$ reálné proměnné ω tak, že:*

α) $\int_0^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega$ *konverguje;*

β) *v oboru $\alpha < \lambda = \Re p < \beta$ roviny p platí odhad*

$$|F(p)| \leqq \Phi(|\varrho|).$$

Důkaz: Za daných předpokladů jest $p = \lambda + i\varrho$, $dp = i\, d\varrho$ a proto zaručuje vztah

$$\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} e^{pt} F(p)\, dp = i e^{\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varrho t} F(p)\, d\varrho$$

se zřetelem k odhadu

$$|e^{i\varrho t} F(p)| = |F(p)| \leqq \Phi(|\varrho|)$$

a vzhledem ke konvergenci integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|\varrho|)\, d\varrho = 2 \int_0^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega$$

přímo existenci integrálu ze vztahu (3) pro všechna $\alpha < \lambda < \beta$.

Závislost integrálu (3) na λ — kterou ovšem zprvu musíme očekávati — neexistuje. Abychom to dokázali, vezměme při libovolných $\lambda_1 < \lambda_2$ z (α, β) a při libovolném reálném R v úvahu obdélník (C) s vrcholy $\lambda_1 - iR$, $\lambda_2 - iR$, $\lambda_2 + iR$, $\lambda_1 + iR$. Tento leží celý v oboru regularity funkce $e^{pt} F(p)$ a proto je

$$\int_{(C)} e^{pt} F(p)\, dp = 0.$$

Při každém pevném ϱ však platí odhad

$$\left|\int_{\lambda_1 + i\varrho}^{\lambda_2 + i\varrho} e^{pt} F(p)\, dp\right| = \left|e^{i\varrho t} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{\lambda t} F(p)\, d\lambda\right| < e^{\lambda_2 |t|} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi(|\varrho|)\, d\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{\lambda_2 |t|} \Phi(|\varrho|),$$

z něhož plyne vztah

$$\lim_{|\varrho| \to \infty} \int_{\lambda_1 + i\varrho}^{\lambda_2 + i\varrho} e^{pt} F(p)\, dp = 0$$

za přepokladu, že $|\varrho|$ roste do nekonečna probíhajíc posloupnost $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ těchto dvou vlastností: $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}\Phi(\omega_n) = 0$. Existence alespoň jedné takovéto posloupnosti je pak zaručena předpokládanou konvergencí integrálu $\int_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega$.

Probíhá-li nyní číslo R, jehož jsme výše užili při konstrukci obdélníka (C), tuto posloupnost (ω_n), platí pro tento speciální (a v důsledku obecné theorie Cauchyho integrální věty tedy též pro každý) způsob vzrůstu R do nekonečna vzorec

$$0 = \lim_{R\to\infty}\int_{(C)} e^{pt}F(p)\,dp = \int_{\lambda_2-i\infty}^{\lambda_2+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp - \int_{\lambda_1-i\infty}^{\lambda_1+i\infty} e^{pt}\,F(p)\,dp.$$

Ten ovšem ukazuje, vzhledem k libovolnosti čísel $\lambda_1 < \lambda_2$, právě nezávislost integrálu (3) na λ; formulí (3) je tedy vskutku definována funkce $f(t)$ pouze proměnné t.

Že plní tato funkce vztah (4), nahlédneme snadno tak, že píšeme podle Fourierova teorému

$$F(\lambda - i\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda - i\tau)\,e^{-it(\tau-\bar{\varrho})}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\varrho}t}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda - i\tau)\,e^{-it\tau}\,d\tau$$

a že vzorci (3) dáme tvar

$$e^{-\lambda t} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varrho t}\,F(\lambda + i\varrho)\,d\varrho = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau}\,F(\lambda - i\tau)\,d\tau.$$

Dosazením pak máme přímo

$$F(\lambda - i\bar{\varrho}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\varrho}t}\,.\,2\pi\,e^{-\lambda t}f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda-i\bar{\varrho})t}f(t)\,dt,$$

čili

$$F(\lambda + i\varrho) = F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Tím jest druhá fundamentální věta úplně dokázána a ukážeme si ještě, jak používá obou hlavních vět I. a II. matematická fysika a vědy technické.

B) Řešení problémů matematické fysiky pomocí Laplaceovy transformace.

Budeme se zde zcela stručně zabývati tímto parciálním diferenciálním problémem (A): Pro obor $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ hledáme řešení $u(x, t)$ diferenciální rovnice

$$a(x)u_{tt}(x, t) + b(x)u_t(x, t) = f(x)u_{xx}(x, t) + g(x)u_x(x, t) + h(x)u(x, t) = \\ = L[u], \tag{5}$$

s podmínkami okrajovými:

$$u(0, t) = u_0(t), \quad \alpha u_x(l, t) + \beta u_t(l, t) + \gamma u(l, t) = 0 \tag{6}$$

a s podmínkami počátečními:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{7}$$

Při tom předpokládáme: Koeficienty $a(x), \ldots, h(x)$ rovnice (5) spojité v $\langle 0, l\rangle$; $a(x)$, $f(x)$ stále nezáporné v $\langle 0, l\rangle$, pro $a(x) \equiv 0$ pak $b(x) > 0$ v $\langle 0, l\rangle$; daná funkce času $u_0(t)$ jest pro všechna $t \geqq 0$ typu (S), $\int\limits_0^\infty |u_0(t)|\, e^{-\lambda t}\, dt$ pro všechna dostatečně veliká λ konvergentní; α, β, γ jsou libovolné reálné konstanty, vázané jen podmínkou $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$; $\varphi(x), \psi(x)$ spojité funkce proměnné x v intervalu $\langle 0, l\rangle$.

Daný problém (A) nyní zobrazíme čistě formálně pomocí první hlavní věty; že jsou splněny všechny předpoklady k tomu postačující, dokážeme dodatečně až na hotovém řešení $u(x, t)$.

Zavedeme-li označení

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(x, t)\, dt = U(x, p),$$

dává formální počítání předně

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}u_x(x, t)\, dt = U_x(x, p), \quad \int\limits_0^\infty e^{-pt}u_{xx}(x, t)\, dt = U_{xx}(x, p)$$

a za druhé

$$\int\limits_0^\infty u_t(x, t)\, e^{-pt}\, dt = u(x, t)\, e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty u(x, t)\, e^{-pt}\, dt = pU(x, p) - \varphi(x),$$

$$\int\limits_0^\infty u_{tt}(x, t)\, e^{-pt}\, dt = p^2U(x, p) - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Z těchto výsledků je zřejmo, že úloha (A) přejde Laplaceovou transformací v tento jednodušší diferenciální problém (B) s jedinou proměnnou x:

$$L[U]-p[pa(x)+b(x)]U=-[pa(x)+b(x)]\varphi(x)-a(x)\psi(x); \quad (8)$$

$$U(0,p)=\int_0^\infty u_0(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,\ \alpha U_x(l,p)+(\beta p+\gamma)U(l,p)=\beta\varphi(l). \quad (9)$$

Těsný vztah mezi originálním problémem (A) a jeho obrazem (B) vede k otázce, zdali je možno použíti řešení $U(x,p)$ snazší úlohy (B) k nalezení řešení $u(x,t)$ původní úlohy (A). O tom nás poučuje druhá fundamentální věta — vždyť je $U(x,p)$ vlastně obrazem hledané funkce $u(x,t)$ — a tuto hlavní větu zde formulujeme z důvodů pozdější potřeby v poněkud změněném tvaru jako větu III.

Řešení $pU(x,p)$ problému (B) nechť má tyto vlastnosti:

a) *Funkce $pU(x,p)$, $pU_x(x,p)$, $pU_{xx}(x,p)$ jsou spojité pro $0\leqq x\leqq l$;*

b) *$pU(x,p)$ je regulární pro všechna p, u nichž je $\Re p=\lambda>\lambda_0$;*

c) *existují positivní funkce $\Phi_\nu(\omega)$ ($\nu=0,1,2$) reál. prom. ω tak, že: α) $\int_0^\infty\Phi_\nu(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ jsou konvergentní;*

β) pro každé $p=\lambda+\mathrm{i}\varrho$, u něhož $\Re p=\lambda>\lambda_0$ (s vyloučením $p=0$ pro $\lambda_0<0$) a pro všechna $0<x\leqq l$ platí nerovnosti

$$|U(x,p)|\leqq\Phi_0(|\varrho|),\ |U_x(x,p)|\leqq\Phi_1(|\varrho|),\ |U_{xx}(x,p)|\leqq\Phi_2(|\varrho|).$$

Je-li vedle toho ještě funkce

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{(C)}U(x,p)\,\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p, \quad (10)$$

i se svými derivacemi až do druhého řádu spojitá v oboru $0\leqq x\leqq l$, $t\geqq0$, představuje nám řešení původního problému (A). Integrační cesta (C) je přímka $\Re p=\lambda$ roviny p (λ libovolné pevné číslo větší nežli λ_0); v případě $\lambda_0<0$ se pak vyhýbá (C) bodu $p=0$ způsobem naznačeným na obrázku 1.

K provedení důkazu budeme potřebovati věty Jordanovy, známé z funkční theorie:

Je-li $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$ komplexní konstanta, p komplexní proměnná, A číslo nezáporné, $F(p)$ funkce regulární v oboru $|p-a|\geqq A$ a $F(p)\to0$ pro $|p-a|\to\infty$, platí pro libovolné reálné nenulové t vztah

$$\lim_{R\to\infty}\int_{(K)}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0.$$

Integrační cestou (K) je půlkružnice se středem a, s poloměrem R a ležící od přímky $\Re p=\alpha$ napravo resp. nalevo podle toho, zda je $t<0$ nebo $t>0$.

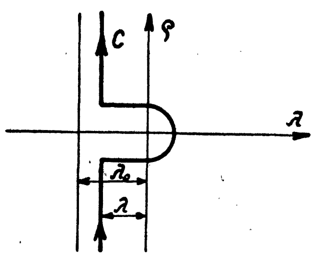
Pomocí této věty vypočteme hodnoty integrálů

$$K_n = \int\limits_{(C)} \frac{e^{pt}}{p^n} dp,$$

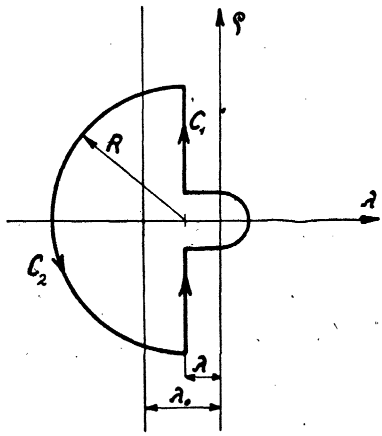
$$n \geqq 1 \text{ celistvé, } t > 0.$$

Pro integrál (v obr. 2)

$$\overline{K_n} = \int\limits_{(\Gamma = C_1 + C_2)} \frac{e^{pt}}{p^n} dp = \int\limits_{\lambda - iR}^{\lambda + iR} + \int\limits_{(C_2)}$$



Obr. 1.



Obr. 2.

máme podle residuové věty hodnotu

$$\overline{K_n} = \frac{2\pi i t^{n-1}}{(n-1)!}$$

a z ní dostaneme limitním přechodem $R \to \infty$ pomocí věty Jordanovy přímo

$$\frac{2\pi i t^{n-1}}{(n-1)!} = K_n + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{(C_2)} \frac{e^{pt}}{p^n} dp = K_n.$$

Jako další krok si uvědomíme stejnoměrnou konvergenci integrálů

$$\int\limits_{(C)} \frac{U(x, p)}{p^n} e^{pt} dp, \quad \int\limits_{(C)} \frac{U_x(x, p)}{p^n} e^{pt} dp, \quad \int\limits_{(C)} \frac{U_{xx}(x, p)}{p^n} e^{pt} dp,$$

$$n \geqq 0 \text{ celistvé, v oboru } \varepsilon \leqq x \leqq l,\ t \geqq 0.$$

Dokážeme si ji na příklad pro

$$\int_{(C)} \frac{U_x(x, p)}{p^n} e^{pt} dp = ie^{\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_x(x, p)}{p^n} e^{i\varrho t} d\varrho$$

a pro $\lambda_0 > 0$ tím, že odhadneme veličinu

$$S = \int_{-\infty}^{-R} \frac{U_x(x, p)}{p^n} e^{i\varrho t} d\varrho + \int_{R}^{\infty} \frac{U_x(x, p)}{p^n} e^{i\varrho t} d\varrho.$$

Pro všechna dostatečně veliká R totiž při libovolném $\eta > 0$ platí

$$|S| \leqq \int_{R}^{\infty} \frac{|U_x(x, \lambda - i\bar{\varrho})|}{(\lambda^2 + \bar{\varrho}^2)^{\frac{n}{2}}} d\bar{\varrho} + \int_{R}^{\infty} \frac{|U_x(x, \lambda + i\varrho)|}{(\lambda^2 + \varrho^2)^{\frac{n}{2}}} d\varrho \leqq$$

$$\leqq \frac{2}{|\lambda|^n} \int_{R}^{\infty} \Phi_1(|\varrho|) d\varrho < \eta.$$

Pro $\lambda_0 < 0$ je stejnoměrná konvergence oněch integrálů také zřejmá; o ní totiž rozhoduje jen chování výrazu analogického k S pro veliká R, takže není nutno bráti zřetel k okolí bodu $p = 0$, kde by vlivem deformované integrační cesty byly poměry složitější.

Dokázaná stejnoměrná konvergence nám dovoluje derivovati dané integrály v oboru $\varepsilon \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ jak podle x, tak i podle t za integračním znaménkem, pokud tím ovšem dospíváme k integrálům opět stejnoměrně konvergentním.

Nyní už můžeme přikročiti k důkazu věty III. Ze vztahu (8) plyne

$$\int_{(C)} \frac{L[U]}{p^2} e^{pt} dp = 2\pi i a(x) u(x, t) + b(x) \int_{(C)} \frac{U(x, p)}{p} e^{pt} dp - 2\pi i a(x) \varphi(x) -$$

$$- 2\pi i t[a(x)\psi(x) + b(x)\varphi(x)]$$

a tuto rovnici derivujeme dvakrát podle t; dostaneme tak

$$2\pi i a(x) u_{tt}(x, t) + 2\pi i b(x) u_t(x, t) = \int_{(C)} L[U] e^{pt} dp = L[\int_{(C)} U e^{pt} dp] =$$

$$= L[2\pi i u(x, t)] = 2\pi i L[u(x, t)],$$

t. j.

$$a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + b(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L[u].$$

Tento vztah ukazuje, že jest za daných předpokladů funkce $u(x, t)$, definovaná vzorcem (10), vskutku integrálem diferenciální rovnice (5).

Z definičního vzorce dostáváme pomocí druhé hlavní věty hodnotu $U(0, p)$ a porovnáním s prvou z podmínek (9) problému (B) vzhledem k jednoznačnosti Laplaceovy transformace ihned

$$u(0, t) = u_0(t);$$

splňuje tedy funkce (10) okrajovou podmínku dané úlohy v místě $x = 0$.

Pro druhý koncový bod $x = l$ základního intervalu máme napřed

$$\left[\alpha \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{(C)} \frac{U(x, p)}{p^2} e^{pt}\, dp + \beta \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{(C)} \frac{U(x, p)}{p^2} e^{pt}\, dp + \gamma \int\limits_{(C)} \frac{U(x, p)}{p^2} e^{pt}\, dp\right]_{x=l} =$$

$$= \int\limits_{(C)} \frac{e^{pt}}{p^2} [\alpha U_x + (\beta p + \gamma) U]_{x=l}\, dp = \beta \int\limits_{(C)} \frac{e^{pt}}{p^2} \varphi(l)\, dp =$$

$$= 2\pi i \beta \varphi(l) t$$

a odtud dvojnásobným derivováním podle t přímo relaci

$$\alpha u_x(l, t) + \beta u_t(l, t) + \gamma u(l, t) = 0,$$

jak žádá podmínka na okraji $x = l$.

K ověření podmínek počátečních si uvědomíme, že:

a) Integrační cestu (C) je možno ve všech dosud se vyskytnuvších integrálech nahraditi rovnoběžkou (D) s imaginární osou roviny p a to libovolnou rovnoběžkou ležící v pravé půlrovině roviny p. Důkaz se provádí zcela stejně, jako se ve druhé hlavní větě zjistila nezávislost výrazu $\int\limits_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} e^{pt} F(p)\, dp$ na veličině λ.

b) Pro všechna celistvá $n \geqq 1$ a pro každé $x > 0$ platí

$$\int\limits_{(D)} \frac{U(x, p)}{p^n}\, dp = \int\limits_{(D)} \frac{U_x(x, p)}{p^n}\, dp = \int\limits_{(D)} \frac{U_{xx}(x, p)}{p^n}\, dp = 0.$$

To jest jednoduchý důsledek předpokládané konvergence integrálů $\int\limits_0^\infty \Phi_\nu(\omega)\, d\omega$ $(\nu = 0, 1, 2)$ a odhadů tohoto druhu:

$$\left|\int\limits_{(D)} \frac{U_x(x, p)}{p^n}\, dp\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{U_x(x, p)}{p^n}\, d\varrho\right| \leqq \frac{1}{\lambda^n} \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(|\varrho|)\, d\varrho\right| = \frac{2}{\lambda^n} \int\limits_0^\infty \Phi_1(\omega)\, d\omega;$$

ježto jest podle definice cesty (D) číslo λ libovolné kladné, je odhadovaný integrál nutně roven nule. ■

Nyní lze už snadno ověřiti počáteční podmínky: Výše jsme použili relace

$$2\pi i a(x)\varphi(x) + 2\pi i t[a(x)\psi(x) + b(x)\varphi(x)] = 2\pi i a(x) u(x, t) +$$
$$+ b(x) \int\limits_{(D)} \frac{U(x, p)}{p} e^{pt} \, dp - \int\limits_{(D)} \frac{L[U]}{p^2} e^{pt} \, dp, \tag{a}$$

která přejde pro $t = 0$ v jednoduchou rovnici

$$2\pi i a(x)\varphi(x) = 2\pi i a(x) u(x, 0) + b(x) \int\limits_{(D)} \frac{U(x, p)}{p} \, dp - \int\limits_{(D)} \frac{L[U]}{p^2} \, dp =$$
$$= 2\pi i a(x) u(x, 0),$$

t. j.

$$a(x)[\varphi(x) - u(x, 0)] = 0. \tag{b}$$

Derivujeme-li relaci (a) podle t a dosadíme pak $t = 0$, vychází

$$a(x)\psi(x) + b(x)\,\varphi(x) = a(x) u_t(x, 0) + b(x) u(x, 0). \tag{c}$$

V parabolickém případě je $a(x) \equiv 0$, $b(x) > 0$ v $\langle 0, l \rangle$ a ze vztahu (c) ihned plyne

$$u(x, 0) = \varphi(x);$$

u hyperbolického problému je v technické praxi vždy $a(x) > 0$, takže rovnice (b) dává

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

a relace (c) pak přímo

$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Tím jsou ověřeny také počáteční podmínky a k dokončení důkazu naší věty III. je jenom ještě nutno ukázati, že jsme byli oprávněni zobrazovati daný problém (A) podle první fundamentální věty. V tom nám prokáží platné služby odhady

$$|u(x, t)| \leqq M_0 \, e^{\lambda t}, \quad |u_x(x, t)| \leqq M_1 \, e^{\lambda t}, \quad |u_{xx}(x, t)| \leqq M_2 \, e^{\lambda t}, \tag{11}$$

kde jsou M_0, M_1, M_2 pevná čísla kladná a λ ovšem je rovno reálné části bodů na integrační cestě (D), o níž jsme svrchu mluvili. Důkazy odhadů (11) probíhají podle vzoru

$$|u_x(x, t)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(D)} U_x(x, p) \, e^{pt} \, dp \right| \leqq \frac{e^{\lambda t}}{2\pi} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |U_x(x, p)| \, d\varrho \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{e^{\lambda t}}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \Phi_1(\omega) \, d\omega = M_1' \, e^{\lambda t}.$$

Ježto je možno volit $\lambda > 0$ libovolně veliké, plyne z odhadů (11) pro $t < 0$

$$u(x, t) = u_x(x, t) = u_{xx}(x, t) \equiv 0$$

a příslušnost funkce $u(x, t)$ k typu (S) je evidentní. Absolutní konvergence integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Lambda t} u(x, t)\, dt$$

je pak pro všechna $\Lambda > \lambda$ patrna z odhadu

$$\int_{-\infty}^{-\infty} |e^{-\Lambda t} u(x, t)|\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\Lambda t} |u(x, t)|\, dt \leqq M_0 \int_0^{\infty} e^{-\Lambda t + \lambda t}\, dt = M_0 \int_0^{\infty} e^{-(\Lambda - \lambda)t}\, dt.$$

Je tedy zobrazení původního problému (A) tak, jak nás vedlo k úloze (B), opravdu oprávněno.

LITERATURA.

S theoretického hlediska jednají o Laplaceově transformaci nejlépe spisy:

G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937.

COURANT-HILBERT: Methoden der mathematischen Physik II., Berlin 1937. (Vyšlo též rusky r. 1945.)

Stručné poučení o Fourierových integrálech najde čtenář třeba v knihách:

V. I. SMIRNOV: Kurs vysšej matematiki II (str. 463—473), Leningrad-Moskva 1948.

W. ROGOSINSKI: Fouriersche Reihen, Berlin-Leipzig 1930 (str. 72—77).

*

La base théorique de la transformation de Laplace avec une application dans la physique mathématique. Ingénieurs, physiciens et même les mathématiciens se servent de plus en plus du calcul opératoire. La première partie de cet article donne la démonstration de deux théorèmes fondamentaux qui forment la base de cet instrument mathématique, dans la seconde partie nous nous occuperons d'application des résultats obtenus à la solution d'un problème d'équation aux dérivées partielles — problème renfermant un grand nombre de cas qui peuvent se présenter dans la physique mathématique. Il s'agit ici des choses bien connues et nos considérations ne sont pensées que pour l'information.

O POLÁRNÍCH KŘIVKÁCH PROSTOROVÉ KUBIKY.

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

1.

Definice [1,1]. *Budiž dána prostorová kubika c. Nechť její bisekanta bodem Y neincidentním s kubikou c ji seče v bodech ${}^1C$, ${}^2C$.*

Bod $\mathbf{Y}$ *určený vztahem*

$$({}^1C, {}^2C, Y, \mathbf{Y}) = -1$$

nazveme pólem bodu Y (vzhledem ke kubice c*).*

Budiž $T \neq C$ bod tečny t_{cC}.[1])

Pólem $\mathbf{T}$ bodu T nazveme bod C; $\mathbf{T} \equiv C$.

---

[1]) Tečnu resp. oskulační rovinu křivky q v jejím bodě R značíme $t_q{}^R$ resp. $\omega_q{}^R$.