Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Lerl

Poznámky k metodice trigonometrie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D163--D170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120744

$$\frac{180^\circ - \varphi'}{\alpha} \leqq x' < \frac{180^\circ - \varphi'}{\alpha} + 1.$$

Počet všech obrazů jest $x + x'$. Výsledek lze vysloviti takto: Rozděluje-li svítící bod dvě zrcadlící přímky v úhlu α na části φ a φ', nalezneme počet vznikajících obrazů tímto způsobem. Doplněk úhlu φ na 180° dělme úhlem α; vyjde-li dělení beze zbytku, zaznamenejme si podíl, nevyjde-li dělení beze zbytku, zaznamenejme pak nejblíže vyšší celé číslo. Stejně tak učiňme s úhlem φ'. Součet obou takto získaných čísel udává počet obrazů.

Diskusi by ovšem zasluhoval též případ, kdy oba poslední obrazy na oblouku $\widehat{CC'}$ se kryjí, což přenecháváme již čtenáři samotnému.

Poznámky k metodice trigonometrie.

Karel Lerl.

1. Mnozí didaktikové zahajujíce novou partii geometrie snaží se konkretními úlohami z praktického života učiniti ji zajímavou a ukázati právě na těchto úlohách důležitost a nutnost této části z důvodů praktických. Zájem žáků se vzbudí jen konkretností, od níž se přechází pozvolna k abstraktním pojmům. Tohoto hlediska musí býti dbáno též na počátku výuky trigonometrie, kdy počínáme pojmem „*goniometrická funkce*“. Zde lze vhodně volenými příklady z prakse ukázati, že funkce ty jsou nutnými. Didaktik *Höfler**) klade na prvé místo funkci *tangens*. Definice goniometrických funkcí pro ostrý úhel spolu s větou Pythagorovou slouží výhradně k praktickým příkladům, zejména k řešení pravoúhlého trojúhelníka. Potom následuje rozšíření pojmu funkce pro každý úhel (tedy i záporný); grafické znázornění průběhu funkcí umožňuje snadnější vniknutí do podstaty tabulek a jejich používání. Z vlastní goniometrie nutno probrati zatím jen nejdůležitější vzorce a vztahy, neboť předčasné jejich hromadění je didakticky závadné. Žáku není dosud totiž z probraného učiva dostatečně známo, jaký budou míti tyto vztahy účel a použití. Přílišné hromadění vzorců vede žáka jen k bezmyšlenkovitému memorování vzorců, jichž pak používá současně toliko ku strohému upravování vyumělkovaných výrazů a pod. Isolovanou abstraktností nevzbuzuje se pražádná činnost, ba spíše naopak zmenšuje se jí duševní pohyblivost a postup vyučování se stává těžkopádným. Na důkladné probrání a doplnění goniometrie je dosti času až ve vlastní trigonometrii. Zakončením tohoto úvodu jest úprava běžných výrazů k logaritmování, při čemž se z týchž důvodů omezujeme na věci podstatné.

*) *A. Höfler*, Didaktik des mathem. Unterrichts, str. 263 a násl.

Vlastní trigonometrie se zabývá řešením trojúhelníka, nechť je dán kterýmikoliv třemi určujícími, nezávislými prvky. Za základní prvky volíme strany a úhly trojúhelníka. Tím dostáváme čtvero základních úloh: 1. a, b, γ; 2. c, α, β; 3. $a, b, (a > b), \alpha$; 4. a, b, c. Mezi těmito šesti základními prvky musí platiti soustava tří nezávislých rovnic, za niž volíme tyto jednoduché vztahy

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c,$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°; \qquad (1)$$

jejich odvození je elementární (sestrojením výšek v trojúhelníku a porovnáním jejich vyjádření ze vzniklých trojúhelníků). Píšeme-li místo postupné úměry prostě

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = d,$$

má též koeficient úměrnosti d jednoduchý význam geometrický (průměr kružnice trojúhelníku opsané). Aby řešení trojúhelníků vůbec bylo pohodlnější, ekonomičtější a mělo elegantnější formy, odvozují se pak základní věty a vzorce, z nichž kosinová věta je po sinové nejdůležitější. Z rovnic (1) lze samozřejmě odvoditi ostatní platné rovnice o základních prvcích trojúhelníka.

V obecném trojúhelníku nemá žádný prvek nějakou přednost před ostatními prvky téhož druhu, takže vyjádření prvků téhož druhu je podobného tvaru; toliko jednotlivé elementy jsou vyměněny. To se děje t. zv. „*cyklickou záměnou*", která vede ke správným vztahům jen tehdy, je-li označení provedeno systematicky, t. j. je-li proti úhlu α strana a, výška bodem A v_a, těžnice t_a, poloměr kružnice připsané ke straně a ϱ_a, atd. Při počátečním používání cyklické záměny možno žákům připustiti i nákres pomocných obrazců (viz *Vojtěch*, Geometrie pro VI. tř., obr. 46). Princip cyklické záměny nelze považovati za zcela evidentní, je to vlastně *úsudek per analogiam*, kde by výpočty potvrdily platnost získaných rovnic. Se záměnou cyklickou se setkáváme hojně i v algebře, zvláště pak v teorii rovnic. Zmíněný princip je téže povahy jako *neúplná indukce* a obou se hojnou měrou používá v přírodovědeckém badání.

2. Základní věty odvozujeme rozmanitým způsobem; avšak přes to se pokládá — zvláště při prvním odvozování — za nejvhodnější onen způsob odvozování, při němž se vychází ze známých planimetrických vět a vztahů a používá se *metody pomocných obrazců*. Vzhledem k tomu je na místě opakování základů planimetrie, obzvláště k pozdějšímu řešení trojúhelníka, daného různými prvky. Ale i konstruktivní řešení je nám často dobrým vůdcem při trigonometrickém řešení, neboť nejen umožňuje přehlédnouti

vnitřní jeho stavbu, ale poskytuje nám i mnoho námětů k diskusi úlohy, obzvláště pokud jde o mnohoznačnost.

Věta sinová, jak již bylo poznamenáno, odvozuje se jednak pomocí výšek trojúhelníka nebo pomocí poloměru kružnice opsané, jak bylo patrno z druhého jejího vyjádření. Platí stejně pro trojúhelník s tupým úhlem jako pro trojúhelník s úhly ostrými. Zahrnuje tím i rozhraní obou druhů, t. j. pravoúhlý trojúhelník, kdy

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{1} = d.$$

Tvar úměry této věty pak nám podává některé planimetrické důsledky, jako na př.: V trojúhelníku proti větší straně leží větší úhel nebo naopak, stejným stranám odpovídají stejné protilehlé úhly a pod. Ze vztahu $\frac{1}{2}\gamma = 90° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ plyne $f(\frac{1}{2}\gamma) = cof\, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Platnost věty pro trojúhelník pravoúhlý zahrnuje tím i definici funkce sin.

Stejně jednoduchou je *věta o průmětech* $c = b \cos\alpha + a \cos\beta$, kde $c = c_1 + c_2$ v trojúhelníku s přilehlými ostrými úhly ku straně c, nebo $c = | c_1 - c_2 |$ v trojúhelníku s jedním tupým úhlem (α nebo β). Elementární důsledek, že součet dvou stran je větší než strana třetí a rozdíl dvou stran menší než strana třetí, získáme dosazením za cosiny mezních hodnot $\pm$ 1. Je $c = b \cos\alpha + a \cos\beta < b + a$, klademe-li $\cos\alpha = \cos\beta = 1$, nebo $c = b \cos\alpha + a \cos\beta > b - a$ pro $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = -1$. Věta sama pro svou jednoduchost může býti východiskem při odvozování dalších vět, jak bude ukázáno v dalším.

Odvození *věty kosinové* se děje několikerým způsobem. Připomeňme si onen způsob, kdy je východiskem věta o průmětech a kterého se zhusta používá (Viz *Vojtěch*, Geom. pro VI. tř. r., str. 74, *Vinš*, Geometrie pro VI. tř. g., str. 87). Odvození toto však nepodává cenný význam věty o průmětech a je typickým příkladem důkazů, kde sice žáci mohou sledovati krok za krokem jednotlivé články postupu, avšak uniká jim geometrická povaha důkazu. Ježto nebylo použito věty Pythagorovy, je tudíž i jejím důkazem. — Jiný důkaz téhož druhu by byl tento: Z rovnice $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$ umocněním a úpravou plyne $\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2 \sin\beta \sin\gamma\,.$ $.\cos\alpha$. Dělíme-li $\sin^2\beta$ a použijeme-li věty sinové $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, získáme kosinovou větu. — Věty Pythagorovy se používá v důkaze, jenž má postup obdobný postupu při odvozování Heronova vzorce (viz Vinš, str. 87). Vyjádří se v_c^2 dvojím způsobem z trojúhelníků vzniklých vedením výšky v_c a oba výrazy se porovnají; platí:

$$b^2 - c_2^2 = a^2 - (c - c_2)^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb_2,$$

kde b_2, c_2 jsou úseky na stranách b, c a tedy je $b_2 = c \cos \alpha$, $c_2 = b \cos \alpha$. Získali jsme vlastně *rozšířenou větu Pythagorovu*, která je též vhodným doplňkem výkladů z nižšího stupně. Vzhledem k důležitosti této věty provádíme totéž odvození krok za krokem i pro trojúhelník tupoúhlý a všimneme si, proč na místě záporných členů $-2bb_2$, $-2cc_2$ ($90° < \alpha < 180°$) nastupují zde členy kladné. Věta ta je východiskem pro odvození vzorců funkcí polovičních úhlů, nechceme-li použíti přímého odvození pomocí poloměru kružnice trojúhelníku vepsané.

Při odvození *věty tangentové* jakož i *rovnic Cagnoliových* neboli *Mollweidových* vycházíme z věty sinové, na niž použijeme vět o úměrách a goniometrických formulí. Samozřejmě, že i konstruktivní řešení udávají nám z obrazců postup odvození. Vyumělkovaných těchto obrazců právě pro důkazy obou druhů vět je dosti a můžeme se rozhodnouti pro to nebo ono odvození. Doporučuje se odvození, při kterém získáme i větu kosinovou a jež jest uvedeno v učebnici *Vinšově* (Geom. pro VI. tř., str. 90). Není však ani třeba znáti poslední dva druhy vzorců, neboť kdo je jen poněkud sběhlý v úpravě výrazů k logaritmování, sám musí během řešení k těmto vzorcům samostatně dospěti.

3. Všechny tyto typické úlohy procvičíme ve tř. VI. tak, že žáci ovládají postup skoro „mechanicky“. Pak možno přičleňovati krok za krokem další prvky v trojúhelníku. Jakého pořadí bylo by třeba dodržovati, aby postup probíhal co nejkratší cestou, ekonomicky a aby bylo dbáno co nejvíce *metody genetické*, bude probráno v jiném článku. Na tomto místě dlužno se ještě krátce zmíniti o formě postupu a o psaní řešené úlohy. Na prvém místě podáváme obecné řešení, jehož výsledkům hledíme dáti tvar co nejjednodušší a nejvhodnější. Dávno již minuly doby, kdy byly předkládány úlohy vedoucí k nepřehledným výrazům, kde pro strohý formalismus ztrácel se drahocenný čas a kde geometrické jádro úlohy unikalo žákům pro samé počítání. Dále mnohdy dbáme toho, abychom získali výsledky v takovém tvaru, aby byly schopné k logaritmování a obsahovaly vyjádření toliko danými prvky. Poslední podmínku není třeba vždy splniti. Hledíme z daných prvků postupně získati ony, jichž lze dosáhnouti co nejjednodušeji, a těchto můžeme pak použíti i ve výsledcích. Tím je míněn vždy již vypočtený prvek vzhledem k numerickým výpočtům. Výsledky podrobíme rozboru, aby nám vynikla jednak omezení jednotlivých elementů (zvláště daných), dále mnohoznačnost a popřípadě nemožnost řešení. Že konstruktivní řešení úlohy mnohdy přispívá ke kratšímu řešení, netřeba připomínati. Provedení takové bývá bez zbytečných oklik a usnadňuje rozbor. Jde konečně ještě o formu vypisování při numerickém výpočtu. Zde se doporučuje po obecném

řešení sestaviti „*plánek*", v němž možno i řadu výpočtů provésti. Tvary takových plánků uváděny jsou v učebnicích trigonometrie. Třeba však vždy dbáti, aby pořadí výpočtů prvků se dálo od nejjednodušších. Na učiteli je pak, aby bezpodmínečně vždy trval na sestavení plánku a tím žáky uvaroval od zlozvyku, kdy celá úloha je rozepsána zcela nesouvisle, pomocné výpočty umístěny na právě nepopsaných částech stránky atd. Způsob ten, hojně se objevující, zaviňuje nepřehlednost postupu řešení a znemožňuje často provedení zkoušky. Není třeba trvati na nějakém zcela určitém rozmístnění údajů a výpočtů, avšak vždy nutno dbáti pořádku!

Další fází — jako u všech výpočtů — je provádění *zkoušky správnosti*. Nelze zde udati nějaký předpis. Nejčastěji provádíme výpočet znova jiným postupem nebo z výsledků výpočtem kontrolujeme dané veličiny, sčítáme úhly, abychom se přesvědčili, zda se vyplňují na 180°, atd. Během výpočtů usuzujeme na pravděpodobnost výsledků, popřípadě zkusmo se zaokrouhlenými čísly opatřujeme si hrubé výsledky. Při všech výpočtech samozřejmě dbáme pravidel o operacích se zkrácenými čísly.

Numerický výpočet v této části geometrie není než neustálé používání logaritmických tabulek, čímž i velmi jednoduché úlohy se časově dosti prodlužují. Zvláště předčasné používání logaritmů goniometrických funkcí při vyučování mládeže, v praktickém počítání ještě málo zběhlé, nemůže jinak než zdržovati veškerý pokrok ve výuce a učiniti předmět méně přístupným. Zlo toto se stane povážlivějším, dáme-li do rukou nováčků tabulky vícemístné, které se hodí jedině pro zkušené praktiky.*) Tím se žáci z teorie nenaučí ničemu více, nežli z tabulek trojmístných nebo čtyrmístných. Dříve — méně než před sto lety**) — používalo se ve školách docela tabulek sedmimístných z důvodů zcela nevěcných. Francouzský matematik *Hoüel* v Giornale di matematiche (t. XIII.) trefně o tom praví: „Zdaž by nebylo lépe, kdyby učitelé na místo, aby zaměstnávali ubohé žáky po tolik smrtelných hodin opisováním čísel o sedmi desetinných místech a topili myšlenky jejich v proudech cifer, častěji se dovolávali jejich rozumu a úsudku, a ukázali jim, že počtářské umění není nijak pouhou, slepou a otupující routinou, že naopak podává matematikovi neustále příležitost, aby cvičil svou vynalézavost tím, že nabude mnohých, právě tak rozmanitých jako zajímavých zkušeností a naučí se používati způsobů početních více méně přesných a jasných. Avšak i v knihách co nejvíce vychvalovaných neupozorňuje se začátečník ani slovem, že

*) Ježto podle nových osnov probírají žáci logaritmy čísel již ve tř. V. a logaritmy goniometrických funkcí až ve tř. VI., budou uvedené obtíže jistě značně menší. *(Poznámka redakce.)*

**) V Rakousku se počaly zaváděti pětimístné tabulky teprve až r. 1865!

je to holé zabíjení času, béře-li se logaritmus čísla, známého určitě pouze s dvěma nebo třemi ciframi, se sedmi desetinnými místy, a že je to nesmyslné, podržeti při sčítání více desetinných míst, nežli jich má číslo nejméně přibližné. A přece není k tomu potřebí dlouhého přemýšlení, abychom se přesvědčili o nesmyslnosti takového počínání!" — Dnes používá se tabulek pětimístných a v posledních desetiletích vnikají do škol i tabulky čtyrmístné, jež úplně postačí. Přednost pětimístným tabulkám dává se proto, že žák, který se již naučil zacházeti s tabulkami pětimístnými, snadno pochopí i používání tabulek čtyrmístných, nikoliv však naopak. V mnohých astronomických a nautických úlohách jsou výpočty provedené pětimístnými tabulkami tak přesné, že výsledky postačí k vědeckým účelům. Tím jest odůvodněno zavádění čtyrmístných tabulek na školách. Kdyby se používalo tabulek třímístných, bylo by ještě lépe. V dnešní době proniká též používání logaritmického pravítka a nomogramů, čímž se usnadňují výpočty; hledí se tím k výchově pro praktický život a nijak to není v rozporu s duchem reformních myšlenek dneška. Nejen v praktickém životě, ale i ve škole nelze plýtvati časem, nýbrž nutno si upřímně přiznati, že princip ekonomie jest i zde důležitým faktorem!

4. Výše bylo vytčeno, že nejvhodnější metodou je právě odvozování základních vět ze známých planimetrických poznatků a že tudíž je na místě, aby všechny věty byly odvozeny systematicky z určitého hlediska. Za původní systém rovnic mezi šesti základními prvky zvoleny byly vztahy plynoucí z věty sinové, a stejně bylo připomenuto, že z nich lze odvoditi všechny rovnice platné mezi zmíněnými prvky. Odvození z věty sinové — ovšem kromě věty o průmětech — bylo též naznačeno. Je však radno přistoupiti též k určité systematice, která by udávala jakousi užší souvislost mezi jednotlivými větami a vzorci, čímž by vystoupilo zřetelněji geometrické jádro vět a vzorců. Uvedeme jeden z takových způsobů, který je z různých hledisek poučný. Způsob ten se doporučuje probírati při opakování v nejvyšší třídě, pokud tomu dovoluje ovšem volný čas, neboť jím se zopakuje v krátké době trigonometrie i soustavy rovnic. Tím, že jsme použili poněkud jiný základ než obvykle, je postup zajímavější.

V obecném trojúhelníku ABC sestrojme výšky, jejichž paty označme po řadě A_1, B_1, C_1. Tím se trojúhelník ABC rozdělí (vždy jednou výškou) celkem na šest různých trojúhelníků; jejich plochy označme p_i tak, že $p_1 = \triangle ABA_1$, $p_2 = \triangle AA_1C$, $p_3 = \triangle BCB_1$, $p_4 = \triangle BB_1A$, $p_5 = \triangle CAC_1$, $p_6 = \triangle CC_1B$ a posléze $p = \triangle ABC$. Zřejmě platí $p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p_5 + p_6$. Vzhledem k větě, že plocha trojúhelníka je přímo úměrná čtverci jeho strany, lze psáti dále $p_1 = \lambda_2 c^2$, $p_2 = \lambda_3 b^2$, $p_3 = \lambda_3 a^2$, $p_4 = \lambda_1 c^2$, $p_5 = \lambda_1 b^2$, $p_6 = \lambda_2 a^2$; koeficienty λ_1, λ_2, λ_3 dají se lehce určiti trigonometricky.

Jest

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha,\ \lambda_2 = \tfrac{1}{4}\sin 2\beta,\ \lambda_3 = \tfrac{1}{4}\sin 2\gamma.$$

Dosazením za p_1, p_2, p do rovnice $p = p_1 + p_2$ obdržíme

$$\frac{ab}{2}\,.\,\sin\gamma\left(= \frac{ac}{2}\sin\beta\right) = \tfrac{1}{2}c\sin\beta\,.\,c\cos\beta + \tfrac{1}{2}b\sin\gamma\,.\,b\cos\gamma.$$

Dělíme-li tento vztah $\frac{1}{2}b\sin\gamma = \frac{1}{2}c\sin\beta$, získáme

$$a = c\cos\beta + b\cos\gamma. \tag{2}$$

Z dalších dvou rovnic $p = p_3 + p_4\ (= p_5 + p_6)$ získáme rovnice cyklicky vytvořené; není to nic jiného než věta o průmětech. Z toho plyne, že rovnice

$$p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p_5 + p_6,$$
$$p_1 = \lambda_2 c^2,\ p_2 = \lambda_3 b^2, \ldots, p_6 = \lambda_2 a^2$$

jsou plošnými interpretacemi věty o průmětech v trojúhelníku.

Rovnice (2) udávají vztahy mezi šesti veličinami, které umožňují z daných tří veličin (vyjma případu α, β, γ) stanoviti zbývající. Přidružme k těmto ještě rovnici

$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma \tag{3}$$

a další dvě cyklicky vytvořené, jež snadno odvodíme z rovnice $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ pomocí addičního teorému pro cos úhlů α, β, γ. Abychom ukázali, jakým způsobem lze rovnic (2), (3) použíti, uvažujme základní úlohy řešení trojúhelníka. Jest zajímavé, že při řešení zmíněných úloh dostaneme ze soustavy výsledky v onom tvaru, kterého obvykle používáme. Proto je tento způsob vhodný při opakování.

a) *Jest dána strana a a přilehlé úhly* β, γ. Ze systému

$$b - c\cos\alpha = a\cos\gamma$$

a

$$b\cos\alpha - c = -a\cos\beta$$

plyne

$$b\sin^2\alpha = a(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta),$$
$$c\sin^2\alpha = a(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)$$

a vzhledem ku (3) pak: $b\sin\alpha = a\sin\beta$, $c\sin\alpha = a\sin\gamma$, což je věta sinová.

b) *Dány jsou dvě strany a, b a jimi sevřený úhel* γ. Vzhledem k neznámým c, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ máme kvadratické rovnice tvaru

$$c\cos\alpha = b - a\cos\gamma,$$
$$c\cos\beta = a - b\cos\gamma.$$

Poněvadž třetí rovnice (2) $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$ je lineární a homogenní v neznámých, získáme po jejím znásobení c rovnici $c^2 = ac\cos\beta + bc\cos\alpha$; použitím prvních dvou rovnic přechází tato rovnice v rovnici $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Sečtením a odečtením dostaneme po vhodné úpravě Cagnoliovy rovnice; jejich podíl je věta tangentová.

c) *Dány jsou dvě strany a, b a úhel* α (omezení zatím pomíjíme). Řešení nevede k žádnému novému základnímu vzorci (věta sinová a kosinová) a všimněme si toliko, že řešení $a \sin \beta = b \sin \alpha$ skýtá omezení $b \sin \alpha \leq a$ a tím $b < a$. Rozbor na tomto místě nutno důsledně provésti!

d) Jsou-li *dány tři strany*, plyne ze systému lineárních rovnic

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \quad \text{atd.}$$

Východiskem uvedeného řešení byla věta o průmětech.*)

Nové tabulky úmrtnosti.

Václav Skalický, Pardubice.

1. Desáté vydání našich nejrozšířenějších tabulek Valouchových obsahuje řadu podstatných změn; ve spojení s mnoha úpravami podružnými po stránce obsahové i vnější vyzvedly tyto změny tabulky téměř na vrcholný stupeň účelnosti. Jednou z nejpodstatnějších změn obsahových je náhrada starších tabulek úmrtnosti tabulkami novými, jež byly zpracovány již podle československé statistiky. Podkladem tabulek předešlých vydání byla rakouská statistika z let 1906—1910, podle níž byl též vypracován podklad čs. zákona o sociálním pojištění. Nové tabulky jsou vypracovány podle dat z let 1929—1932 a podle sčítání lidu z roku 1930. Třebaže podklad těchto tabulek neodpovídá již dnešním státoprávním poměrům, jsou jistě bližší skutečnosti než původní, aspoň svým pozdějším datem. Není bez významu všimnouti si toho, jaký význam může míti tato změna pro matematické vyučování na střední škole.

Tabulky byly především rozšířeny o řadu veličin odvozených ze základní funkce l_x. Všechny tyto veličiny mohou býti rozděleny ve dvě skupiny, jichž význam je poněkud různý. První skupina vyjadřuje biologické zákonitosti týkající se délky lidského života, druhá pak obsahuje čísla, jež se týkají finanční stránky životního pojišťování. Tato skupina byla pozměněna po vnější stránce jen málo; pojednáme o ní proto na prvním místě.

2. Tabulka veličin pojistné matematiky obsahuje známá čísla D_x, N_x, a_x a mimo to nově připojený sloupec $S_x = N_x + N_{x+1} + \ldots$ Čísel S_x může býti ve vyučování využito k tomu,

*) Viz *K. Zahradník*, Příspěvek k trigonometrii. Čas. r. VII., str. 245 až 248.