Jan Schuster

Příspěvky ke geometrii kuželoseček. [III.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D185--D196

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120732

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Příspěvky ke geometrii kuželoseček.

Dr. Jan Schuster, Praha.

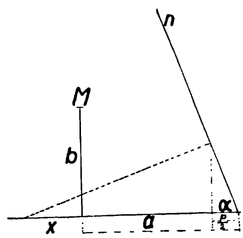
(Dokončení.)

24. Dosavadní úvahy nikterak nevyčerpávají všech možných případů.

Na důkaz toho uvažujme další případ, kdy dána přímka nesoucí osu paraboly, bod a normála.

Daný bod měj od osy vzdálenost b, stopa normály od jeho průmětu vzdálenost a a její odchylka buď α. Ohnisko F od průmětu daného bodu vzdáleno o x. Potom dává normála pro parametr rovnici

$$(a + x) \cos^2 \alpha = \frac{p}{2}.$$



Obr. 12.

Má-li tečna v daném bodě od osy odchylku β, pak platí

$$(b \operatorname{cotg} \beta - x) \sin^2 \beta = \frac{p}{2}.$$

Z vlastnosti, že tečna půlí úhel průvodičů, plyne

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{b}{x}.$$

Srovnáním prvních dvou rovnic obdržíme

$$(a + x) \cos^2 \alpha = \frac{b}{2} \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}} - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

a odtud

$$2 (a + x) \cos^2 \alpha = \sqrt{b^2 + x^2} - x.$$

Odtud

$$4x^2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1) + 4ax \cos^2 \alpha (2 \cos^2 \alpha + 1) + 4a^2 \cos^4 \alpha - b^2 = 0$$

a

$$x_{1,2} = \frac{-a \cos\alpha\,(2\cos^2\alpha + 1) \pm \sqrt{(a^2 + b^2)\cos^2\alpha + b^2}}{2\cos\alpha\,(\cos^2\alpha + 1)}.$$

Stejně by byly upraveny rovnice, kdyby bylo určit parabolu daného směru osy, jež jde daným bodem a má dvě dané normály.

Zvolíme za základ rovnoběžku k ose skrze průsečík obou normál, takže má bod danou kotu b, od jeho průmětu vzdálen průsek normál o a_1 a jejich odchylky od osy jsou α_1, α_2. Je-li η kota hledané osy paraboly, přetvoří se rovnice předešlé úlohy na:

$$(a + x - \eta \operatorname{cotg} \alpha_1)\cos^2\alpha_1 = \frac{p}{2},$$

$$(a + x - \eta \operatorname{cotg} \alpha_2)\cos^2\alpha_2 = \frac{p}{2},$$

$$[(b - \eta)\operatorname{cotg}\beta - x]\sin^2\beta = \frac{p}{2},$$

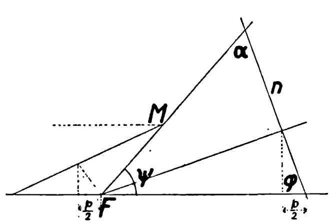
$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{b - \eta}{x}.$$

Když z posledních dvou rovnic vyloučíme β, obdržíme

$$\sqrt{(b - \eta)^2 + x^2} - \frac{x}{2} = \frac{p}{2}.$$

Tato rovnice s prvními dvěma dovoluje určit p, x, η. Úkol je stupně čtvrtého.

Kdyby naopak byly dány směr osy, normála a dva body, zvolme za základ libovolnou rovnoběžku osy paraboly. Dané body mějte od ní vzdálenosti b_1, b_2 a jejich průměty od průsečíku normály se základní přímkou buďte vzdáleny o a_1, a_2. Je-li x vzdálenost průmětu ohniska od téže stopy normály a η vzdálenost osy paraboly od základní přímky, platí rovnice:



Obr. 13.

$$(x - \eta \operatorname{cotg} \alpha)\cos^2\alpha = \frac{p}{2},$$

$$[(b_1 - \eta)\operatorname{cotg}\beta_1 - a_1 + x]\sin^2\beta_1 = \frac{p}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\beta_1 = \frac{b_1 - \eta}{x - a_1}.$$

Vylučme z posledních dvou β_1, čímž obdržíme

$$\sqrt{(b_1-\eta)^2+(x-a_1)^2}-\frac{x-a_1}{2}=\frac{p}{2}$$

a podobně

$$\sqrt{(b_2-\eta)^2+(x-a_2)^2}-\frac{x-a_2}{2}=\frac{p}{2}.$$

Řešení těchto dvou rovnic s první dává hledané x, η, p.

Jiný jednoduchý úkol by byl určit směr osy paraboly, dáno-li ohnisko F (obr. 17), bod M, vzdálený o b od F, a normála n. Osa buď od normály odchýlena o úhel φ.

Je-li α úhel normály a přímky FM, ψ odchylka osy od téže přímky, a vzdálenost normály od ohniska, máme pro parametr rovnice

$$\frac{p}{2}=a\operatorname{cotg}\varphi\cos\varphi=b\sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Ježto $\varphi+\psi+\alpha=180°$, platí

$$2a\cos^2\varphi=b\sin\varphi\,[1+\cos(\alpha+\varphi)]$$

nebo

$$(2a-b\sin\alpha)\cos^2\varphi+b\sin\alpha=b\sin\varphi\,(1+\cos\alpha\cos\varphi),$$

Rationalisací této rovnice vznikne rovnice čtvrtého stupně podle $\cos\varphi$.

Tyto ukázky mohou postačit, abychom viděli, jaká rozmanitost různých kombinací dat se zde naskytuje k případnému výběru úloh řešitelných, neb aspoň poněkud přístupných podrobnější analyse.

25. Ve 48. ročníku tohoto časopisu str. 1, udal dr. V. Jarolímek jednoduché konstrukce elipsy z bodů, tečen a polohy obou os. Tato úloha dovoluje metrické rozšíření na další.

Především konstrukci, kterou udal jmenovaný pro elipsu určenou polohou os a dvěma body, založenou na sestrojení střední měřické úměrné, nelze přenést na hyperbolu. Proto připomenu jinou konstrukci, jíž lze stejně provést i pro hyperbolu.

Z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

obdržíme po dosazení souřadnic bodů $M(x_1, y_1)$ a $N(x_2, y_2)$ a když obě rovnice odečteme od sebe,

$$\frac{b^2}{a^2}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}.$$

Je-li tedy P střed úsečky MN, Q jeho průmět na osu úseček a O střed křivky, platí

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{QP}{OQ}.$$

Vedeme-li pak bodem O rovnoběžku ke spojnici MN, která protne přímku QP v bodě L, bude

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{QL}{OQ},$$

tedy

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{QP \,.\, QL}{OQ^2}.$$

Když tedy nad QP a QL sestrojíme střední měřickou úměrnou QR, obdržíme poměr poloos, a tím hned poměr afinity k opsané kružnici.

Provedeme-li touž konstrukci u hyperboly, má úsečka QP týž směr jako QL, střední měřická úměrná QR dá hned směr asymptoty spojením středu křivky O s bodem R.

Když body M, N splynou, t. j. dána-li tečna křivky s bodem dotykovým, je smysl konstrukce totožný s předešlým, jenže nyní vedeme bodem O rovnoběžku k tečně a určíme její průsek L s pořadnicí bodu dotykového.

Celá tato konstrukce se dá opakovat pro případ, že dány polohy dvou sdružených průměrů křivky a dva body nebo tečna a bod dotykový. Ovšem rozdíl je pouze v šikmém promítání rovnoběžně s průměry.

26. Dány dvě tečny a poloha os.

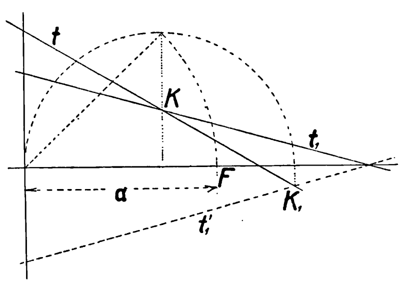
Obě tečny mějte na osách úseky m, n resp. m_1, n_1. Vyjdeme-li z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jsou úseky na osách:

$$m = \frac{a^2}{x_1}, \quad n = \frac{b^2}{y_1},$$

kde x_1, y_1 patří bodu dotykovému a splňují rovnici elipsy. Je tedy třeba pro určení os splnit rovnice



Obr. 14.

$$\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1, \quad \frac{a^2}{m_1^2} + \frac{b^2}{n_1^2} = 1,$$

takže

$$a^2 = \frac{m^2 m_1^2 (n^2 - n_1^2)}{m_1^2 n^2 - m^2 n_1^2}, \quad b^2 = \frac{n^2 n_1^2 (m_1^2 - m^2)}{m_1^2 n^2 - m^2 n_1^2}.$$

Ale označíme-li $K(u, v)$ průsek obou tečen, je

$$u = \frac{mm_1(n - n_1)}{m_1 n - mn_1}, \quad v = \frac{nn_1(m_1 - m)}{m_1 n - mn_1}.$$

Sestrojíme-li k tečně t_1 souměrnou t'_1 podle osy x,

$$\frac{x}{m_1} - \frac{y}{n_1} = 1,$$

bude mít průsečík K' tečen t, t'_1 úsečku

$$u' = \frac{mm_1(n + n_1)}{m_1 n + mn_1}.$$

Hned vidíme, že $a^2 = uu'$, tedy hlavní poloosa je střední geometrickou úseček obou průsečíků. Pro vedlejší poloosu b stačí provést touž úvahu pro pořadnice průseku tečny t s t_1 a tečny t s t''_1, je-li t''_1 souměrná s t_1 podle osy y.

27. Kdyby byla dána poloha obou os, tečna t s úseky m, n a bod $M(x_1, y_1)$, jde o určení poloos elipsy podle rovnic

$$\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} = 1, \quad \frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1. \tag{α}$$

Provedeme-li nyní substituci

$$a = m \cos \alpha, b = n \sin \alpha; \; x_1 = a \cos \beta, \; y_1 = b \sin \beta,$$

obdržíme

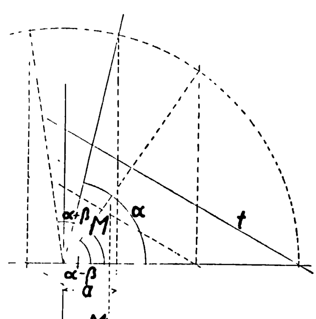
$$x_1 = m \cos \alpha \cos \beta, \; y_1 = n \sin \alpha \sin \beta.$$

Odtud pak

$$\frac{x_1}{m} + \frac{y_1}{n} = \cos (\alpha - \beta),$$

což však není než rovnoběžka tečny, vedená bodem x_1, y_1. Kdybychom stejně užili bodu $M'(x_1, - y_1)$, obdrželi bychom rovnici

$$\frac{x_1}{m} - \frac{y_1}{n} = \cos (\alpha + \beta.)$$



Obr. 15.

Tyto dvě rovnoběžky mají na ose x úseky

$$p = m \cos (\alpha - \beta), \; q = m \cos (\alpha + \beta),$$

z nichž se určí úhel α jako aritmetický průměr, a tím hned poloosy a, b.

Je též možná zavést do (α)

$$\xi = \frac{a^2}{x_1}, \quad \eta = \frac{b^2}{\eta_1},$$

a tím se řešení převede na rovnice

$$\frac{x_1}{\xi} + \frac{y_1}{\eta} = 1, \quad \xi \frac{x_1}{m^2} + \eta \frac{y_1}{n^2} = 1,$$

takže jde o průsek přímky mající úseky na osách

$$\frac{m^2}{x_1}, \quad \frac{n^2}{y_1},$$

s rovnoramennou hyperbolou, jež má střed v bodě M a prochází středem elipsy. Poloosy pak plynou jako střední měřické úměrné souřadnic průseku a daného bodu M.

28. Táž metoda se hodí k vyšetření konstrukce elipsy z dané polohy os, bodu $M(x_1, y_1)$ a normály $y = Ax + d$. Je-li (x_2, y_2) bod normály na elipse, pak platí:

$$A = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2}, \quad d = -\frac{(a^2 - b^2)\, y_2}{b^2}.$$

Je tedy

$$y_2 = -\frac{b^2 d}{a^2 - b^2}, \quad x_2 = -\frac{a^2 d}{A(a^2 - b^2)}, \quad A = \operatorname{tg} \alpha.$$

Dosazením do rovnice elipsy obdržíme

$$(a^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha + b^2)\, d^2 = (a^2 - b^2)^2.$$

Zavedeme-li zase $a^2 = \xi x_1$, $b^2 = \eta y_1$, bude po dosazení do rovnice elipsy a normály:

$$\frac{x_1}{\xi} + \frac{y_1}{\eta} = 1, \quad (\xi x_1 - \eta y_1)^2 = (\xi x_1 \operatorname{cotg}^2 \alpha + \eta y_1)\, d^2,$$

takže úkol převeden na určení průseku rovnoosé hyperboly, mající osy rovnoběžné k osám elipsy a jdoucí středem elipsy, a paraboly jdoucí týmž středem, takže úkol je stupně třetího. Poloosy jsou pak zase střední úměrné souřadnic jako výše.

29. Není bez zajímavosti rozšíření konstrukce hyperboly, dané asymptotami a bodem, na jiné křivky.

Především buď dána parabola tečnou t a bodem $M(x_1, y_1)$. Dotýká-li se tečna paraboly v bodě $N(x_2, y_2)$, platí $t \equiv yy_2 = px + px_2$. Určeme pořadnici bodu tečny, patřícího k úsečce x_1 bodu M. Ta je

$$y'_1 = \frac{p(x_1 + x_2)}{y_2}.$$

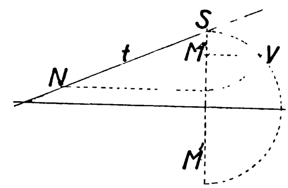
Utvoříme-li výraz

$$y'^2_1 - y_1^2 = \frac{p^2(x_1 + x_2)^2}{y_2^2} - y_1^2 = \frac{p^2(x_1 - x_2)^2}{y_1^2},$$

kde vpravo výraz $y_1^2 y_2^2$ nahrazen výrazem $4p^2 x_1 x_2$, a nahradíme-li levou stranu výrazem u^2, můžeme rovnici odmocnit na $p(x_1 - x_2) = uy_2$, a když zavedeme jen pořadnice, bude $y_1^2 - y_2^2 = 2uy_2$, z čehož

$$(y_2 + u)^2 = y_1^2 + u^2 = y'^2_1 \text{ a } y_2 + u = y'_1,\ y_2 = y'_1 - u.$$

Konstrukce je tedy velmi jednoduchá. K bodu M sestrojí se M' souměrný podle osy. Nad SM' jako průměrem se sestrojí kružnice a střední měřická úměrná SV se sklopí na SM do T. Rovnoběžka s osou pak přetne tečnu v dotykovém bodě.



Obr. 16.

Tato úvaha platí i pro elipsu. Tečnu $b^2 x x_2 + a^2 y y_2 = a^2 b^2$ protněme rovnoběžkou s osou y:

$$x = x_1,\ y'_1 = \frac{b^2(a^2 - x_1 x_2)}{a^2 y_2}$$

a utvořme

$$y'^2_1 - y_1^2 = \frac{b^4}{a^4 y_2^2}(a^2 - x_1 x_2)^2 - y_1^2 = \frac{b^4}{a^4 y_2^2}[(a^2 - x_1 x_2)^2 - (a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2)].$$

Zavedeme-li vlevo $y'^2_1 - y_1^2 = u^2$, lze i pravou i levou stranu odmocnit, což dá

$$u = \frac{b^2(x_1 - x_2)}{a y_2}$$

nebo ve tvaru úměry

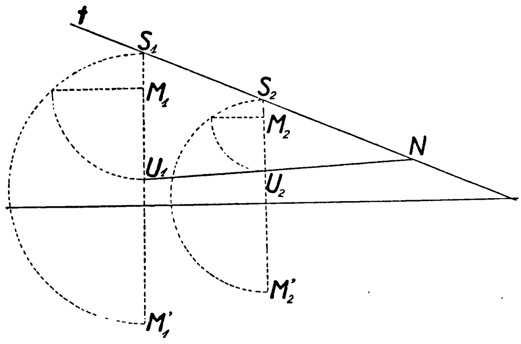
$$\frac{u}{p} = \frac{x_1 - x_2}{y_2},$$

kde p znamená parametr.

Kdyby byla dána elipsa polohou hlavní osy, jednou tečnou a dvěma body M_1, M_2, najdeme pro oba body příslušné střední měřické úměrné u_1 a u_2, jsou-li x_3, y_3 souřadnice dotykového bodu tečny, obdržíme dvě úměry tvaru poslední rovnice, z nichž lze vyloučit parametr p i y_3, a zbude

$$u_1 : u_2 = (x_1 - x_3) : (x_2 - x_3).$$

Sestrojíme tedy body S_1 a S_2, střední měřické úměrné délek S_1M_1 a $S_1M'_1$ resp. S_2M_2 a $S_2M'_2$, sklopíme je na jejich kolmice, koncové body U_1, U_2 spojíme, až protnou danou tečnu t v bodě N. Další konstrukce plyne ze dvou sdružených párů pólů. Jeden tvořen průmětem bodu N do osy a průsekem tečny t s osou, druhý pár jsou diagonální rohy čtyřúhelníku $M_1M'_1M'_2M_2$ na ose, z nichž plyne velká poloosa.



Obr. 17.

Pozoruhodné je při tom, že spojnice U_1U_2 má rovnici závislou jen na tečně t. Máme totiž pro bod U_1 pořadnici

$$y'_1 - u = \frac{b^2(a^2 - x_1x_3)}{a^2y_3} - \frac{b^2}{a}\,\frac{x_3 - x_1}{y_3} = \frac{b^2}{a^2y_3}(a + x_3)(a - x_1)$$

a podobný výraz pro U_2, kde se zavede index 2 na místo 1. Bude tedy rovnice přímky U_1U_2

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & \dfrac{b^2}{a^2}\,\dfrac{(a + x_3)(a - x_1)}{y_3} & 1 \\ x_2 & \dfrac{b^2}{a^2}\,\dfrac{(a + x_3)(a - x_2)}{y_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Znásobme druhý sloupec číslem $\dfrac{a^2y_3}{b^2(a + x_3)}$. Když pak od téhož sloupce odečteme a-násobný třetí a přičteme k němu první, zbude ve druhém sloupci jen první člen, a determinant přejde v

$$\left(\frac{a^2y_3y}{b^2(a + x_3)} - a + x\right)(x_1 - x_2) = 0.$$

Ale druhý faktor zde musí být od nuly různý, neboť by jinak byla elipsa proťata kolmicí k hlavní ose ve čtyřech bodech. Proto musí zmizet první faktor, jenž představuje spojnici U_1U_2 ve tvaru:

$$b^2(a + x_3)\, x + a^2 y_3 y = ab^2(a + x_3),$$

což je vskutku rovnice přímky nezávislé na bodech M_1, M_2.

30. Při řešení opačné úlohy, kdy kuželosečka má dánu přímku obsahující hlavní osu, dvě tečny t_1, t_2 a bod $M(x_3, y_3)$, omezme se zase na elipsu a úvahu proveďme tak, že křivku vztahujeme na hlavní osy.

Pak má t_1 na ose x stopu při $x = \frac{a^2}{x_1}$. Spojme ji s bodem M přímkou, jež utne na ose y $y'_1 = \frac{y_3 a^2}{a^2 - x_3 x_1}$. Nyní přidružme ke středu křivky bod harmonický vzhledem na bod o pořadnici y'_1 a $\frac{b^2}{y_1}$, t. j. stopu tečny t_1 na ose y. Stejně sestrojme bod harmonický k bodům s úseky $-\frac{b^2}{y_1}$ a y'_1 na ose y. Pořadnice obou bodů plynou z rovnic:

$$\frac{2}{\eta} = \frac{a^2 - x_3 x_1}{a^2 y_3} + \frac{y_1}{b^2}, \qquad \frac{2}{\eta'} = \frac{a^2 - x_3 x_1}{a^2 y_3} - \frac{y_1}{b^2}.$$

Z obou délek η, η' utvořme střední měřickou úměrnou z, pro niž

$$\frac{4}{z^2} = \frac{(a^2 - x_3 x_1)}{a^4 y_3^2} - \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{b^4(a^2 - x_3 x_1)^2 - a^4 y_1^2 y_3^2}{b^4 a^4 y_3^2}.$$

Nahraďme $a^2 y_1^2 \,.\, a^2 y_3^2$ v čitateli jich výrazy obsahujícími x_1 a x_3 z rovnice elipsy, což dá.

$$\frac{4}{z^2} = \frac{(a^2 - x_3 x_1)^2 - (a^2 - x_1^2)(a^2 - x_3^2)}{a^4 y_3^2} = \frac{(x_1 - x_3^2}{a^2 y_3^2},$$

$$\frac{2}{z} = \frac{x_1 - x_3}{a y_3}.$$

Sestrojíme-li nyní délku u k harmonickému průměru $2y'$ a k $\frac{2}{z}$ podle rovnice

$$\frac{2}{u} = \frac{1}{y'_1} - \frac{2}{z} = \frac{a^2 - x_3 x_1}{a^2 y_3} - \frac{x_1 - x_3}{a y_3} = \frac{(a + x_3)(a - x_1)}{a^2 y_3},$$

jsou: úsek tečny t_1 na ose x, t. j. $\frac{a^2}{x_1}$, a $\frac{u}{2}$, t. j. $\frac{a^2 y_3}{(a + x_3)(a - x_1)}$, úseky hledané přímky p_1 na osách. Její rovnice zní:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y(a + x_3)(a - x_1)}{a^2 y_3} = 1.$$

Zcela stejně obdržíme pro bod M a tečnu t_2 přímku p_2 s rovnicí

$$\frac{xx_2}{a^2} + \frac{y(a + x_3)(a - x_2)}{a^2 y_3} = 1.$$

K určení průseku obou odečtěme tyto rovnice, což dá

$$\frac{x(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{y(a + x_3)(x_2 - x_1)}{a^2 y_3} = 0.$$

Protože tečny t_1 a t_2 musí být různé, možná rovnici zkrátit rozdílem $x_1 - x_2$, a zbude $x = \dfrac{y(a + x_3)}{y_3}$, což dosazeno do první z obou rovnic dá po zrušení členu obsahujícího x_1,

$$y = \frac{ay_3}{a + x_3}, \quad x = a,$$

takže průsečík závisí jen na bodě $M(x_3, y_3)$. Zároveň jeho spojnice s M má rovnici:

$$y - y_3 = \frac{\dfrac{ay_3}{a + x_3} - y_3}{a - x_3}(x - x_3) \text{ nebo } y - y_3 = \frac{-x_3 y_3}{a^2 - x_3^2}(x - x_3).$$

Ježto M leží na elipse, je $a^2 - x_3^2 = \dfrac{a^2 y_3^2}{b^2}$, a rovnice spojnice zní:

$$y - y_3 = -\frac{b^2 x_3}{a^2 y_3}(x - x_3), \text{ nebo } b^2 x x_3 + a^2 y y_3 = a^2 b^2,$$

je to tudíž tečna elipsy.

Stopa její na ose a průmět bodu M na ni tvoří jeden pár sdružených pólů. Když pak k tečnám t_1, t_2 sestrojíme souměrné podle hlavní osy, vznikne čtyřúhelník, jehož úhlopříčky k ose kolmé vytínají na této druhý pár sdružených pólů. Tyto páry slouží k určení os. Při konstrukci není ovšem známa druhá osa elipsy. Ale konstrukce přímky p_1 se provede tak, že nahoře vylíčené harmonické vztahy, jež se promítáním z bodu $\left(\dfrac{a^2}{x_1}, 0\right)$ zachovají, provedeme-li je na kolmici k ose elipsy s bodu $M(x_3, y_3)$ spuštěné, čímž úkol úplně proveden. Ale vztahy harmonické lze nahradit konstrukcemi plochoměrnými na obdélnících.

Dodatek.

Opravy:

Na str. D 95 ř. 14 zdola čti $2\varphi + 2\alpha - 90°$ místo $2\alpha + 2\alpha - 90$.
Na str. D 98 ř. 17 shora: třetího místo čtvrtého.
Na str. D 98 ř. 9 a ř. 7 zdola na začátku čti $+ B_2$ místo B_3^2.

Výslednou rovnici pro geometrické místo ohniska paraboly při třech daných normálách v 9. odstavci vypíšeme pro speciální případ, kdy dané normály tvoří rovnostranný trojúhelník.

Přímky mějte rovnice:

$$T_1 \equiv y - x\sqrt{3} = 0,\ T_2 \equiv y + x\sqrt{3} = 0,\ T_3 \equiv y - a = 0.$$

Pak je

$$A_1 = \sqrt{3},\ A_2 = -\sqrt{3},\ A_3 = 0.$$

Pro zjednodušení pišme x a y místo x_0 a y_0 resp.

Nejprve stanovíme hodnoty determinantů:

$$D_1 = -24y\sqrt{3}(y - a),$$
$$D_2 = -24x\sqrt{3}(y - a),$$
$$D_3 = 2\sqrt{3}[3y^2 - 4ay + 3x^2],$$
$$D_4 = 6\sqrt{3}(y^2 - 3x^2),$$
$$D_5 = 24\sqrt{3}x(y - a);$$

$$D_1D_2 - 4D_4D_5 = 1728x(y - a)(3y^2 - ay),$$
$$-D_2^2 + 4D_3D_4 - 2D_1D_4 = -1728x^2(y - a)^2 + 144(y^2 - 3x^2) \,.\, [3x^2 + 9y^2 - 10ay],$$
$$-2D_2D_5 + (2D_3 - D_1)D_1 = 3456x^2(y - a)^2 - 288y(y - a) \,.\, [3x^2 + 9y^2 - 10ay].$$

Rovnice křivky zní tedy:

$$x^2(y - a)^2(3x^2 - ay)^2 \,.\, 1728^2 = \\ = 2 \,.\, 144^2\{12x^2(y - a)^2 + (y^2 - 3x^2)(3x^2 + 9y^2 - 10ay)\} \,.\\ .\, \{12x^2(y - a)^2 - y(y - a)(3x^2 + 9y^2 - 10ay)\}.$$

Tato rovnice se odštěpením faktoru $y - a$, který nepatří ku křivce, sníží o jeden stupeň a po zkrácení obdržíme:

$$72x^2(y - a)(3x^2 - ay)^2 = 144x^4(y - a)^3 + (3x^2 + 9y^2 - 10ay) \,.\\ .\, 12x^2(y - a)[y^2 - 3x^2 - y(y - a)] - (3x^2 + 9y^2 - 10ay)^2 \,.\\ .\, (y^2 - 3x^2)y,$$

z čehož

$$12x^2(y - a)(3x^2 - ay)[21x^2 + 9y^2 - 16ay] = \\ = 144x^4(y - a)^3 - (3x^2 + 9y^2 - 10ay)^2(y^2 - 3x^2)y,$$

kde levá strana sloučena s druhým členem vpravo.

Touž úpravu dovoluje rovnice z odst. 11, kdy dány dvě tečny a jedna normála.

Zvolíme

$$T_1 \equiv y - a = 0,\ T'_2 \equiv y - x\sqrt{3} = 0,\ T'_3 \equiv y + x\sqrt{3} = 0.$$

Pak je

$$A_1 = 0,\ B_2 = \sqrt{3},\ B_3 = -\sqrt{3}.$$

$$B = \frac{(y - x\sqrt{3})\sqrt{3} + (y + x\sqrt{3})\sqrt{3}}{y - x\sqrt{3} - (y + x\sqrt{3})} = \frac{y\sqrt{3}}{-x\sqrt{3}} = -\frac{y}{x}$$

$$u = -\frac{-(y^2 - 3x^2)\,2\sqrt{3}}{4\,[y - x\sqrt{3} - (y + x\sqrt{3})]} = \frac{y^2 - 3x^2}{4x}.$$

První rovnice přejde v $-uB - T_1 = 0$, nebo

$$-\frac{y^2 - 3x^2}{4}\,\frac{y}{x^2} + y - a = 0.$$

Tato křivka se dá psát ve tvaru

$$x^2 = -\frac{\frac{1}{7}y^3}{\frac{4}{7}a - y}$$

a znamená eliptickou kissoidu s osou y jako tečnou kuspidální, jejíž vzdálenost bodu úvratu od asymptoty je $\frac{4a}{7}$, a poměr afinity k cirkulární kissoidě Dioklově je $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Pro případ dvou normál a jedné tečny učiňme:

$$T_1 \equiv y - \sqrt{3}x = 0,\ T_2 \equiv y + x\sqrt{3} = 0,\ T'_3 \equiv y - a = 0,$$

$$A_1 = \sqrt{3},\ A_2 = -\sqrt{3},\ B_3 = 0.$$

$$\begin{aligned}
m &= 4\,(y - a) + 3\,(y - x\sqrt{3}) = 7y - 3x\sqrt{3} - 4a,\\
n &= 2\sqrt{3}\,(y - x\sqrt{3}) - \sqrt{3}\,(y - a)\,.\,4 = 2\sqrt{3}\,(-y - x\sqrt{3} + 2a),\\
p &= y - x\sqrt{3},\\
m' &= 7y + 3x\sqrt{3} - 4a,\\
n' &= -2\sqrt{3}\,(y + x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\,(y - a)\,4 = 2\sqrt{3}\,(y - x\sqrt{3} - 2a),\\
p' &= y + x\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Nyní stanovme hodnoty determinantů:

$$\begin{aligned}
pm' - p'm &= 4x\sqrt{3}\,(2a - 5y),\\
m'n - mn' &= -4\sqrt{3}\cdot(9x^2 + 14y^2 - 18ay + 8a^2),\\
np' - n'p &= -4\sqrt{3}\,(3x^2 + y^2 - 2ay).
\end{aligned}$$

Je tedy rovnice křivky po zkrácení:

$$x^2\,(5y - 2a)^2 - (9x^2 + 14y^2 - 18ay + 8a^2)\,(3x^2 + y^2 - 2ay) = 0$$

nebo

$$27x^4 + x^2\,(26y^2 - 52ay + 20a^2) + \\ + (14y^2 - 18ay + 8a^2)\,(y^2 - 2ay) = 0.$$

Rovnice se poněkud zjednoduší přenesením počátku do bodu $x = 0,\ y = a$, zavedením $y = \eta + a$, neboť je

$$27x^4 + x^2\,(26\eta^2 - 6a^2) + (14\eta^2 + 10a\eta + 4a^2)\,(\eta^2 - a^2) = 0.$$