Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis

Edmund Hlawka

Pythagoräische Tripel: Gleichverteilung und geometrische Anwendungen

*Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, Vol. 11 (2003), No. 1, 29--72

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120593

Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 11 (2003) 29–72 

# Pythagoräische Tripel: Gleichverteilung und geometrische Anwendungen

*Edmund Hlawka (Wien)*

**Preface.** This paper is a continuation of the earlier articles "Approximation von Irrationalzahlen und Pythagoräische Tripel", Bonner Mathematische Schriften 121, 1980 and "Über einige geometrische Anwendungen im Zusammenhang mit Pythagoräischen Tripeln und Gleichverteilung", Aequationes Math. 58, 1999. In these earlier papers the author investigated distribution properties of Pythagoreian tripels and various geometric applications. Although the present article is a continuation of the previous ones it is self-content. The author focuses on the construction of Pythagoreian tripels by means of prime numbers in the Gaussian number field and various geometric applications. In the first three sections applications to line geometry and to spherical trigonometry are discussed. In the second part of the paper (chapters 4 - 6) rotations in the three dimensional space are considered.

## §0. Einleitung.

Wir wiederholen kurz: Wir betrachten die ganzen Gaußschen Zahlen $\alpha = A + Bi$, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist und $A, B$ ganze rationale Zahlen sind. Dabei sei die Norm $N(\alpha) = A^2 + B^2$ einer von Null verschiedenen ganzen Zahl stets größer oder gleich Eins.

Mit $\alpha$ betrachten wir auch die Konjugierte $\bar{\alpha} = A - iB$ und definieren

$$p(\alpha, \varepsilon) = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\varepsilon = \frac{A + iB}{A - iB}\varepsilon\,, \tag{1}$$

wobei $\varepsilon$ eine Potenz von $i$ ist. Es gibt nur vier verschiedene Werte von $\varepsilon$
$1, i, i^2 = -1, i^3 = -1$.

Die Menge aller $p(\alpha, \varepsilon)$ bildet in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe: Das Inverse von $p(\alpha, \varepsilon)$ ist $p(\bar{\alpha}, \bar{\varepsilon})$, das Einheitselement ist $E = p(1, 1)$. Wir wollen diese Gruppe die pythagoräische Gruppe $P$ nennen. Alle ihre Elemente haben die Norm 1. Wir wollen noch die Vereinbarung treffen, daß wir alle $p(\alpha, \varepsilon)$ zu $p(\alpha, 1)$ assoziiert nennen. Wenn wir eines herausgreifen, wollen wir es kurz als $p(\alpha)$ bezeichnen.

Wir wollen noch bemerken, daß unter den Zahlen
$\alpha = A + iB, \quad \alpha i = -B + Ai, \quad \alpha i^2 = -(A + Bi), \quad \alpha i^3 = B - Ai$
bzw.
$\bar{\alpha} = A - iB, \quad \bar{\alpha} i = B + Ai, \quad \bar{\alpha} i^2 = -A + iB, \quad \bar{\alpha} i^3 = -B - Ai$
genau eine existiert, für die sowohl Real- wie Imaginärteil positiv sind. Wir wollen diese Zahl die Hauptzahl dieser vier Zahlen nennen. Dabei können wir noch annehmen, daß $A \geq B$ ist, sonst vertauschen wir $B$ mit $A$, d.h. $\alpha$ mit $\bar{\alpha} i$. Multiplizieren wir in (1) Zähler und Nenner mit $\alpha$, so erhalten wir

$$\zeta = p(\alpha) = X(\alpha) + iY(\alpha) , \tag{2}$$

wo

$$X(\alpha) = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} , \quad Y(\alpha) = \frac{2AB}{A^2 + B^2} \tag{3}$$

ist. Setzen wir

$$x = X(\alpha) , \quad y = Y(\alpha) , \quad z = p(\alpha) = x + iy , \tag{4}$$

so erhalten wir

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = 1 , \tag{5}$$

d.h. $(x, y)$ liegt auf dem Einheitskreis und das Tripel

$$(A^2 - B^2, 2AB, A^2 + B^2) = (a, b, c) \tag{6}$$

erfüllt die diophantische Gleichung

$$a^2 + b^2 = c^2 . \tag{7}$$

Wir wollen in der Gruppe $P$ die Multiplikation explizit hinschreiben: Es sei

$$\alpha_1 = A_1 + B_1 i , \quad \alpha_2 = A_2 + B_2 i ,$$

dann ist

$$\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2 = A_3 + iB_3 , \tag{8}$$
$$A_3 = A_1 A_2 - B_1 B_2 , \quad B_3 = A_2 B_1 + A_1 B_2 \tag{9}$$
$$p(\alpha_3) = p(\alpha_1) p(\alpha_2) .$$

Das Tripel (6) lautet also

$$(a_3, b_3, c_3)$$

mit

$$a_3 = A_3^2 - B_3^2 , \quad b_3 = 2A_3B_3 , \quad c_3 = A_3^2 + B_3^2 = (A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2) .$$

Ist $\alpha = A + Bi$, so sei ($l$ ganze Zahl)

$$\begin{aligned} \alpha^l &= A_l + B_l i \\ \zeta_l = p(\alpha^l) &= X(\alpha^l) + iY(\alpha^l) \\ &= x_l + iy_l . \end{aligned} \tag{3'}$$

Wir können auch Matrizen verwenden: Da bekanntlich der Zahl $\alpha = A + iB$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

mit Determinante $A^2 + B^2$ zugeordnet ist, haben wir

$$\begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ -A_3 & B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix},$$

also ist

$$\frac{1}{(A_L^2 + B_L^2)} \begin{bmatrix} A_L & B_L \\ -B_L & A_L \end{bmatrix} = \frac{1}{(A^2 + B^2)^2} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}^2 .$$

Ordnen wir der Zahl $\alpha$ auch die Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{U+V}{2} & \frac{U-V}{2} \\ \frac{U-V}{2} & \frac{U+V}{2} \end{bmatrix}$$

zu mit $U = \frac{A}{B}$, $V = \frac{B}{A} = \frac{1}{U}$.

Es gilt weiters

$$\begin{bmatrix} \frac{U_1+V_1}{2} & \frac{U_1-V_1}{2} \\ \frac{U_1-V_1}{2} & \frac{U_1+V_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{U_2+V_2}{2} & \frac{U_2-V_2}{2} \\ \frac{U_2-V_2}{2} & \frac{U_2+V_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U_3 + V_3) & \frac{1}{2}(U_3 - V_3) \\ \frac{1}{2}(U_3 - V_3) & \frac{1}{2}(U_3 + V_3) \end{bmatrix},$$

wobei

$$U_1 = \frac{A_1}{B_1}, \qquad V_1 = \frac{B_1}{A_1}$$
$$U_2 = \frac{A_2}{B_2}, \qquad V_2 = \frac{B_2}{A_2}$$
$$U_3 = \frac{1}{2}(U_1U_2 + V_1V_2), \quad V_3 = \frac{1}{2}(U_1U_2 - V_1V_2),$$

also ist

$$\begin{bmatrix} \frac{U+V}{2} & \frac{U-V}{2} \\ \frac{U-V}{2} & \frac{U+V}{2} \end{bmatrix}^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U^L + V^L) & \frac{1}{2}(U^L - V^L) \\ \frac{1}{2}(U^L - V^L) & \frac{1}{2}(U^L + V^L) \end{bmatrix}.$$

Wir wollen jetzt die Geometrie ins Spiel bringen. Es gibt einen eindeutig bestimmten Winkel $\varphi_0$ mit $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, so daß für alle $\varphi$ von der Gestalt $\varphi_0 + 2\pi k$ ($k$ durchläuft alle ganzen Zahlen, wir schreiben $\varphi \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi}$)

$$p(\alpha) = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi ,$$

also

$$\cos\varphi = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2AB}{A^2 + B^2} .$$

Wir setzen nun

$$\varphi_0 = \pi\chi . \tag{$*$}$$

Die Schweizer Mathematiker Scherrer und Hadwiger haben bewiesen (siehe [HAD-01] und [SCH01]):

Ist $\alpha = A + iB$ und weder $AB = 0$ noch $A^2 = B^2$, dann ist $\chi$ irrational.

Wir betrachten nun die Folge $\omega = (2k\chi)$, es ist ja $2\chi$ ebenfalls irrational, dann ist diese Folge nach einem Satz der Gleichverteilung gleichverteilt modulo 1. Zur Theorie der Gleichverteilung vergleiche die Bücher [HLA01] und [KUI01].

Es ist also für eine periodische integrierbare Funktion $f$ mit der Periode 1

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(2\pi k\chi) = \int_0^1 f(x)dx . \tag{10}$$

Für die Diskrepanz $D_N$ der Folge gilt

$$D_N \leq \frac{20 \log c}{\log N} , \qquad (10')$$

wo $c = A^2 + B^2$ ist. Ist $f$ eine im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, periodisch mit der Periode 1, so ist (vgl. z.B. [HLA01])

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(2\pi k \chi) = \int_0^1 f(x)dx + \vartheta\, \sigma\left(D_N^{\frac{1}{3}}, f\right) , \qquad (11)$$

wo $|\vartheta| \leq 1$ und $\sigma(\varepsilon, f)$ die Schwankung von $f$ mit der Breite $\varepsilon$ ist. Wenn $f$ von beschränkter Variation $V(f)$ ist, so gilt sogar

$$\lambda_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(2\pi k \chi) = \int_0^1 f(x)dx + \vartheta V(f) D_N . \qquad (12')$$

Ist $f$ von der Gestalt $G(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ ($G$ integrierbar in $E^2$), so gilt, wenn wir sogar die Annahme machen, daß $G(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ von beschränkter Variation $V(G)$ ist,

$$\lambda_N(G) = \int_0^1 G(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)dx + \vartheta V(f) D_N ,$$

wo

$$\lambda_N(G) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} G(a_{2l}, b_{2l})$$

ist, mit

$$a_{2l} = \frac{A_{2l}^2 - B_{2l}^2}{A_{2l}^2 + B_{2l}^2} , \quad b_{2l} = \frac{2A_{2l}B_{2l}}{A_{2l}^2 + B_{2l}^2} ,$$

und

$$A_{2l}^2 + B_{2l}^2 = (A^2 + B^2)^{2l} .$$

Ist $G$ differenzierbar, so ist

$$V(G) \leq \operatorname*{Max}_{E^2} \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2} .$$

Es ist zweckmäßig, die vorher betrachteten gleichverteilten Folgen, die so eng mit den pythagoräischen Tripeln zusammenhängen, zu gleichverteilten mehrdimensionalen Folgen zu erweitern. Zu diesem Zweck betrachten wir Primzahlen $p$ von der Gestalt $4k + 1$. Jede solche Primzahl läßt sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen und zwar, abgesehen vom Vorzeichen, in eindeutiger Weise in der Gestalt $p = A^2 + B^2$ oder in komplexer Darstellung[1]

$$p = (A + iB)(A - iB) = \pi \cdot \bar{\pi} .$$

[1] Üblicherweise wird $\pi$ normiert: $\pi \equiv 1 \pmod{2(i-1)}$. Wir wollen davon aber nicht Gebrauch machen.

Wir wollen diese Zahlen mit $\pi(p), \bar{\pi}(p)$ bezeichnen. Sie sind voneinander verschiedene Primzahlen im Zahlkörper $Q(i)$. Es ist

$$\frac{\pi(p)}{\bar{\pi}(p)} = e^{i\pi\chi(p)} ,$$

wo $\chi$ irrational ist und die Folge $(k\chi)$ daher mod 1 gleichverteilt ist.

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_s$ verschiedene Primzahlen von der Gestalt $4k+1$ und den Primzahlen $(\pi_1, \bar{\pi}_1), \ldots, (\pi_s, \bar{\pi}_s)$ mit den zugehörigen Winkeln $\chi_1, \ldots, \chi_s$, so sind diese Winkel im Sinne der Gleichverteilung linear unabhängig. Dies beruht darauf, daß die Zerlegung der Zahlen in $Z(i)$ in Primzahlen $\pi(p)$ eindeutig ist. Daraus folgt, daß die Folge $(k\chi_1, \ldots, k\chi_s)$ mod 1 in $E^s$ gleichverteilt ist. In der Arbeit des Verfassers [HLA03] wurde gezeigt, daß mit $P_s = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$ die Abschätzung gilt

$$D_N^s(p_1, \ldots, p_s) \leq 4^s C_s (\log P_s) \frac{(\log\log N)^s}{\log N} \tag{2}$$

Für den Beweis sei auf die Arbeit des Verfassers verwiesen.

In der Arbeit [HLA02], S. 435 habe ich folgenden Satz bewiesen:
Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ positive Zahlen kleiner 1, dann gibt es zu jedem $N > 1$ positive ganze Zahlen $u_1, \ldots, u_s, v$, so daß für $1 \leq v \leq N^s$ alle $u_j < v$ sind, und

$$\left|\alpha_j - \frac{v^2 - u_j^2}{v^2 + u_j^2}\right| < \frac{2}{Nv} , \qquad \left|\sqrt{1-\alpha_j^2} - \frac{2vu_j}{v^2+u_j^2}\right| < \frac{2}{Nv} .$$

Wir wollen den Satz mit einer kleinen Ergänzung hier noch einmal beweisen und uns dabei der Einfachheit halber auf den Fall $s = 1$ beschränken. Es sei

$$w_0 = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} ,$$

dann gibt es nach dem Satz von Dirichlet Zahlen $u$ und $v$ mit $1 \leq v \leq N$, so daß

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| \leq \frac{1}{Nv}$$

(im mehrdimensionalen Fall gilt $1 \leq v \leq N^s$).

Wir führen nun Funktionen

$$f(w) = \frac{1-w^2}{1+w^2} , \qquad g(w) = \frac{2w}{1+w^2} .$$

mit $0 < w < 1$ ein. Es ist

$$f^2(w) + g^2(w) = 1 .$$

Weiters sind

$$f(w_0) = \alpha , \qquad g(w_0) = \sqrt{1-\alpha^2} .$$

$f$ und $g$ sind differenzierbar und es gilt

$$|f'(w)| = \left|-\frac{4w}{1+w^2}\right| < 2 .$$

Analog ist

$$|g'(w)| = 2\,\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2} < 2$$

und
$$\left|\alpha - \frac{v^2-u^2}{v^2+u^2}\right| = \left|f(w_0) - f\left(\frac{u}{v}\right)\right| \le 2\left|w_0 - \frac{u}{v}\right| \le \frac{2}{Nv} .$$
Es folgt analog
$$\left|\sqrt{1-\alpha^2} - \frac{2uv}{u^2+v^2}\right| = \left|g(w_0) - g\left(\frac{u}{v}\right)\right| \le \frac{2}{Nv} .$$
Wir betrachten nun die Funktionen
$$v(w) = \frac{1}{g(w)} \qquad \text{und} \qquad u(w) = \frac{f(w)}{g(w)} .$$
Es ist
$$v^2(w) - g^2(w) = 1$$
und wir wählen
$$N > \left[\frac{4}{1-\alpha}\right] + 1 , \qquad \text{d.h.} \quad \alpha < 1 - \frac{4}{N} .$$
Es ist
$$v(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^2} , \qquad u(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} .$$
Weiters ist
$$v' = -\frac{g'}{g^2} , \qquad w' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
und es ist $g'(w) > 0$, also $v$ monoton abnehmend.

Wir haben
$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{1}{2}\left|\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right|\right| \le C(\alpha)\,\frac{1}{Nv}$$
und
$$\left|\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{1}{2}\left|\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right|\right| \le C(\alpha)\,\frac{1}{Nv} ,$$
wobei
$$C(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{1-(\alpha+\frac{4}{N})^2}} .$$
Im mehrdimensionalen Fall ist
$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-\alpha_j^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{u_j}{v} + \frac{v}{u_j}\right)\right| \le C(\alpha_j)\frac{1}{Nv}$$
und
$$\left|\frac{\alpha_j}{\sqrt{1-\alpha_j^2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{u_j}{v} - \frac{v}{u_j}\right)\right| \le C(\alpha_j)\frac{1}{Nv} .$$
Wir schreiben oft
$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) , \qquad M = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) .$$
Es gilt folgender Satz:
Setzen wir
$$L_j = \frac{1}{2}\left(\frac{u_j}{v_j} + \frac{v_j}{u_j}\right) , \qquad M_j = \frac{1}{2}\left(\frac{u_j}{v_j} - \frac{v_j}{u_j}\right) ,$$

so gilt folgender Satz:
Es gibt stets Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, so daß

$$\prod_{j=1}^{m} |L_j| = \sqrt{1 + a_1^2 + \ldots \alpha_m^2} .$$

Wir setzen $a_0 = 1$ und beweisen den Satz mit vollständiger Induktion nach $m$.

Für $m = 1$ ist $a_1 = M_1$, denn es ist

$$1 + M_1^2 = L_1^2 .$$

Nehmen wir an, der Satz sei schon für $m - 1$ bewiesen. Es sei also

$$\prod_{j=1}^{m-1} L_j^2 = 1 + a_1^2 + \ldots + \alpha_{m-1}^2 .$$

Setzen wir

$$\frac{a_m}{\sqrt{1 + a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2}} = M_m ,$$

dann ist

$$a_m^2 = (1 + a_1^2 + \ldots + a_m^2) M_m^2$$

und es ist

$$1 + a_1^2 + \ldots + a_m^2 = (1 + a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2)(1 + M_m^2) = \left( \prod_{j=1}^{m-1} L_j^2 \right) L_m^2 .$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten nun ein pythagoräisches Paar

$$\left( \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \frac{2AB}{A^2 + B^2} \right) = (f, g) .$$

Es sei z.B. $f$ ein Partner, so gibt es Zahlen $(b_1, \ldots, b_m)$, so daß

$$|L_1 \ldots L_m f| = \sqrt{1 + a_1^2 + \ldots + a_m^2 - (b_1^2 + \ldots + b_m^2)} .$$

*Beweis:* Es ist $f^2 + g^2 = 1$, dann ist

$$(L_1 \ldots L_m f)^2 = (1 + a_1^2 + \ldots + a_m^2)(1 - g^2) .$$

Wir setzen $b_j = a_j g$, dann ist

$$(L_1 \ldots L_m f)^2 = 1 + a_1^2 + \ldots + a_m^2 - (b_1^2 + \ldots + b_m^2) .$$

Zum Schluß einige Beispiele
$p_1 = 5$, $\pi_1 = 1 + 2i$; $p_2 = 13$, $\pi_2 = 3 + 2i$; $p_3 = 17$, $\pi_3 = 4 + i$.

**§1.** Wir behandeln zunächst die Sphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 .$$

Wir untersuchen zuerst den Fall $r \neq 0$. Dabei (wir bleiben noch im Reellen) brauchen wir nur $x = rx', y = ry', z = rz'$ zu setzen und kommen auf den Fall

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3}$$

oder

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2 . \tag{4}$$

Gehen wir nun ins Komplexe, so haben wir

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = 1 - z^2 . \tag{5}$$

Wir suchen rationale Lösungen. Wir nehmen zwei Primzahlen $p, p'$ kongruent 1 modulo 4.[2] Die zugehörigen Gaußschen Primzahlen seien

$$\pi = A + iB, \qquad \pi' = C + iD \tag{6}$$

und setzen

$$x + iy = \frac{A+iB}{A-iB}\frac{2CD}{C^2+D^2} \tag{7}$$

$$x - iy = \frac{A-iB}{A+iB}\frac{2CD}{C^2+D^2} . \tag{8}$$

Dann ist

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2CD}{C^2+D^2}\right)^2 = 1 - z^2 ,$$

also

$$z^2 = \left(\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2CD}{C^2+D^2}\right)^2 \tag{9}$$

und es ist

$$z = \varepsilon\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} . \tag{10}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Wir haben also

$$\vec{r} = (x, y, z) , \tag{11}$$

wo

$$x = \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\frac{2CD}{C^2+D^2} \tag{12}$$

$$y = \frac{2AB}{A^2+B^2}\frac{2CD}{C^2+D^2} \tag{12'}$$

$$z = \varepsilon\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} . \tag{12"}$$

Wir können statt $\pi, \pi'$ auch Potenzen $\pi^l, \pi'^{l_1}$ nehmen , wo $l, l_1$ ganze rationale Zahlen sind. Es sind statt $A, B, C, D, \varepsilon$ die Zahlen $A_l, B_l, C_l, D_l, \varepsilon_l$ zu nehmen (z.B. $l = l_1$), wo $\varepsilon_l$ stets $\pm 1$ ist.

Wir können diese Parameterdarstellung auch für die Drehellipsoide verwenden. Es seien $\alpha = A+iB, \beta = C+iD, \gamma = U+iV$ geeignete Primzahlen. Die zugehörigen Drehellipsoide lauten

$$\frac{x^2}{r^2-e^2} + \frac{y^2}{r^2-e^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \qquad \text{(verlängertes Drehellipsoid)}$$

[2]Wir wollen im folgenden solche Primzahlen als geeignet bezeichnen.

(wobei $0 \le e < r$ ist) und

$$\frac{x^2}{r^2+e^2} + \frac{y^2}{r^2+e^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 . \qquad \text{(abgeplattetes Drehellipsoid)}$$

Wir wollen noch $\varepsilon = \frac{e}{r}$ setzen, dann nehmen die Gleichungen die Gestalt

$$\frac{x^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} + z^2 = r^2$$

bzw.

$$\frac{x^2}{1+\varepsilon^2} + \frac{y^2}{1+\varepsilon^2} + z^2 = r^2$$

an. Die Ellipsoide sehen folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} x &= r\sqrt{1 \pm \varepsilon^2}\,\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\,\frac{2CD}{C^2+D^2} \\ y &= r\sqrt{1 \pm \varepsilon^2}\,\frac{2AB}{A^2+B^2}\,\frac{2CD}{C^2+D^2} \\ z &= r\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} , \end{aligned}$$

wo wir für den Fall $\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$$\varepsilon = \left|\frac{U^2-V^2}{U^2+V^2}\right| \qquad \text{nehmen, also} \qquad \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{2UV}{C^2+V^2}$$

wird, und im Fall $\sqrt{1+\varepsilon^2}$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{U}{V}\right| - \left|\frac{V}{U}\right|\right) \quad \text{nehmen, also} \qquad \sqrt{1+\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{V}{U}\right| + \left|\frac{U}{V}\right|\right) .$$

Dabei sollen $U$ und $V$ positiv sein. Wir können $\alpha, \beta, \gamma$ durch die Potenzen $\alpha^l, \beta^m, \gamma^n$ ersetzen.

Aus

$$(x+iy)(x-iy) = (1-z)(1+z)$$

folgt, daß, wenn $z \ne \pm 1$ ist,

$$\frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy} = \rho , \tag{14}$$

bzw.

$$\frac{x+iy}{1+z} = \frac{1-z}{x-iy} = \sigma \tag{15}$$

und wir erhalten zwei Geraden (bzw. Geradenscharen)

$$\begin{aligned} x+iy &= \rho(1-z) \\ x-iy &= \frac{1}{\rho}(1+z) \end{aligned} \tag{13}$$

**und**

$$\begin{aligned} x+iy &= \sigma(1+z) \\ x-iy &= \frac{1}{\sigma}(1-z) . \end{aligned} \tag{14}$$

Wir erhalten

$$\frac{A_l + iB_l}{A_l - iB_l}\frac{2C_lD_l}{C_l^2 + D_l^2} = \rho_l \frac{2C_l^2}{C_l^2 + D_l^2} \tag{18}$$

$$\frac{A_l - iB_l}{A_l + iB_l}\frac{2C_lD_l}{C_l^2 + D_l^2} = \frac{1}{\rho_l}\frac{2D_l^2}{C_l^2 + D_l^2}, \tag{19}$$

wobei

$$\rho_l = \frac{A_l + iB_l}{A_l - iB_l}\frac{D_l}{C_l}, \tag{20}$$

bzw.

$$\frac{A_l + iB_l}{A_l - iB_l}\frac{2C_lD_l}{C_l^2 + D_l^2} = \sigma_l \frac{2D_l^2}{C_l^2 + D_l^2} \tag{15'}$$

$$\frac{A_l - iB_l}{A_l + iB_l}\frac{2C_lD_l}{C_l^2 + D_l^2} = \frac{1}{\sigma_l}\frac{2C_l^2}{C_l^2 + D_l^2}. \tag{16'}$$

Dabei ist

$$\sigma_l = \frac{A_l + iB_l}{A_l - iB_l}\frac{C_l}{D_l}, \tag{17'}$$

wo $l$ alle ganzen Zahlen durchläuft.

Gehen wir in (1) zu homogenen Koordinaten

$$x = \frac{X}{T}, \quad y = \frac{Y}{T}, \quad z = \frac{Z}{T} \tag{21}$$

über, also

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = T^2. \tag{22}$$

Schneiden wir mit der Ebene $T = 0$, so erhalten wir

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0. \tag{23}$$

Die allgemeine Lösung in ganzen Gaußschen Zahlen ist

$$X = \rho(\alpha^2 - \beta^2), \quad Y = \rho 2\alpha\beta, \quad Z = i\rho(\alpha^2 - \beta^2). \tag{24}$$

Wir können jedem Punkt $r = (x, y, z)$ auf der Sphäre ein Dreibein $(e_1, e_2, e_3)$ zuordnen, wo $e_3 = r$ ist:

$$\begin{aligned}
e_3 &= \left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\frac{2CD}{C^2 + D^2}, \frac{2AB}{A^2 + B^2}\frac{2CD}{C^2 + D^2}, \varepsilon\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}\right)\\
e_1 &= \left(\frac{-2AB}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, 0\right)\\
e_2 &= \left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}, \frac{2AB}{A^2 + B^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}, -\varepsilon\frac{-2CD}{C^2 + D^2}\right).
\end{aligned}$$

Ersetzen wir $A, B$ durch $A_k, B_k$ und $C, D$ durch $C_l, D_l$, so bezeichnen wir die entsprechenden Einheitsvektoren $e_j$ mit $e_j(k,l)$ für $j = 1, 2, 3$.

Die Vektoren bilden ein **normiertes orthogonales Dreibein** in den Punkten $r(k,l)$ der Sphäre. $e_1(k,l), e_2(k,l)$ sind Tangentenvektoren im Punkte $r(k,l) = e_3(k,l)$, welche die zugehörigen Normalen sind.

Jeder Vektor $a$ im $R^3$ läßt sich in der Form

$$\xi_1 e_1(k,l) + \xi_2 e_2(k,l) + \xi_3 e_3(k,l)$$

darstellen, wobei die Komponenten $\xi_1\xi_2\xi_3$ von $e_1(k,l), e_2(k,l), e_3(k,l)$ abhängen. Es wird

$$\xi_j = ae_j \; .$$

Eine Drehung des Zweibeins $e_1(k,l), e_2(k,l)$ in der Tangentialebene der Sphäre aufgespannt vom Zweibein gegeben durch eine Gaußsche Zahl $\alpha_{kl} = U_{kl} + iV_{kl}$ bezeichnen wir mit $D_{kl}$. Wir haben dann ein neues Zweibein $e_j'(k,l)$ für $j = 1,2$

$$\begin{bmatrix} e_1' \\ e_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} & \frac{2uv}{u^2+v^2} \\ -\frac{2uv}{u^2+v^2} & \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} ,$$

wo wir die Buchstaben $k, l$ weggelassen haben.

Wählen wir die Lorentztransformation

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) \end{bmatrix} ,$$

so führen wir die Zeit $t$ in die Tangentialebene ein.

$$\begin{bmatrix} \xi_3' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3 \\ t \end{bmatrix}$$

$t$ bzw. $t'$ ist die Ortszeit mit den Indizes $t(k,l), e_3(k,l)$.

Es müssen nicht alle $\alpha_{kl}$ verschieden sein, sie können sogar alle gleich sein.

Nehmen wir eine Potenz $r$ von $\alpha(k,l)$, so schreiben wir $D_{kl}^r$.

So können wir auf der Sphäre Geometrie betreiben. Betrachten wir z.B. die Punkte

$$\left[\frac{A_k^2 - B_k^2}{A_k^2 + B_k^2}\frac{2CD}{C^2+D^2}, \frac{2A_kB_k}{A_k^2 + B_k^2}\frac{2CD}{C^2+D^2}, \frac{C^2-D^2}{C^2+D^2}\right]$$

für $k = 1, \ldots, s$, so haben wir $s$ Punkte auf der Kurve

$$\left[\cos u \frac{2CD}{C^2+D^2}, \sin u \frac{2CD}{C^2+D^2}, \frac{C^2-D^2}{C^2+D^2}\right] .$$

**Bemerkung:**[3]

Für die Legendreschen Polynome $P_s(\cos\vartheta)$ gilt nach Laplace die Darstellung

$$\begin{aligned} P_s(\cos\vartheta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^s d\varphi \\ &= \int_0^1 (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\pi\varphi)^s d\varphi \qquad (1) \end{aligned}$$

und für die zugeordneten Legendreschen Polynome

$$P_s^t(\cos\vartheta) = C_{st}\, i^t \int_0^1 (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\varphi)^s \cos t\varphi d\varphi \qquad (2)$$

$(i = \sqrt{-1})$ mit

$$C_{st} = \frac{(s+t)!}{t!} \; . \qquad (3)$$

[3]vgl. noch S. 67, 68.

Für $t = 0$ erhalten wir die Darstellung (1). Es sei nun $\alpha = A + iB$ eine ganze Gaußsche Zahl. Wenden wir die Methode der Gleichverteilung an, so erhalten wir

$$P_s^t(\cos\vartheta) = C_{st}\, i^t \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\frac{A_l^2 - B_l^2}{A_l^2 + B_l^2}\right)\frac{A_{lt}^2 - B_{lt}^2}{A_{lt}^2 + B_{lt}^2} + F_1\,, \tag{4}$$

wobei der Fehler

$$|F_1| \leq C_{st}\frac{\lg\sqrt{A^2+B^2}}{\lg N}\,. \tag{5}$$

Für $t = 0$ ist $A_{l0} = A_l$, $B_{l0} = B_l$ und $C_{s0} = s$.

Wenden wir dies auf die Reihe $(0 \leq r < 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}} = \sum_{s=0}^{\infty} r^s P_s(\cos\vartheta) \tag{6}$$

an, so erhalten wir eine geometrische Reihe und es wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}} &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N}\sum_{s=0}^{\infty}\left(r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta v_l\right)\right)^s + F_2\\ &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{1 - r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)v_l} + F_2\,,\end{aligned} \tag{7}$$

wobei $v_l = \frac{A_l^2 - B_l^2}{A_l^2 + B_l^2}$ und

$$|F_2| \leq 10\frac{\lg\sqrt{A^2+B^2}}{\lg N}\sum_{s=0}^{\infty} s r^s \leq 10\frac{\lg\sqrt{A^2+B^2}}{\lg N}\frac{1}{(1-r)^2}\,. \tag{8}$$

Die Kugelfunktionen lauten bekanntlich

$$Y_s(\vartheta,\psi) = C_0 + \sum_{t=1}^{s}\left(C_l'\cos l\psi + C_l''\sin l\psi\right)P_s^t(\cos\vartheta)\,, \tag{9}$$

wo $C_l', C_l''$ beliebige Konstante sind. Wir setzen jetzt für die $P_s^l$ die Formeln (4) und (5) ein. Wir können noch weitergehen und für die trigonometrischen Funktionen von $\vartheta$ und $\psi$ weitere pythagoräische Tripel mit ganzen Gaußschen Zahlen $\beta = C + iD, \gamma = U + iV$ setzen.

**Anhang 1 zu §1.** Modell der projektiven Ebene

Ist $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dann nehmen wir

$$X = x^2 - y^2,\quad Y = xy,\quad Z = xz,\quad T = yz\,,$$

bzw.

$$\begin{aligned}
X_l &= x_l^2 - y_l^2 = \frac{4C_l^2 D_l^2 \left((A_l^2 - B_l^2)^2 - 4A_l^2 B_l^2\right)}{(A_l^2 + B_l^2)^2 (C_l^2 + D_l^2)^2} \\
Y_l &= x_l y_l = \frac{8(A_l^2 - B_l^2) A_l B_l C_l^2 D_l^2}{(A_l^2 + B_l^2)^2 (C_l^2 + D_l^2)^2} \\
Z_l &= x_l z_l = \frac{2(A_l^2 - B_l^2)(C_l^2 + D_l^2) C_l D_l}{(A_l^2 + B_l^2)^2 (C_l^2 + D_l^2)^2} \\
T_l &= \varepsilon_l y_l z_l = \frac{4A_l B_l C_l D_l (C_l^2 - D_l^2)}{(A_l^2 + B_l^2)^2 (C_l^2 + D_l^2)^2} .
\end{aligned}$$

$l$ durchläuft alle ganzen Zahlen.

Als Literatur siehe [HIL01], Anhang: Projektive Geometrie im vierdimensionalen Raum, S. 300.

Wir können mit Hilfe der Gaußschen Zahlen $\sigma = A + iB$, $\tau = C + iD$ noch weitere Punkte auf der Sphäre gewinnen, wenn wir auch die Norm

$$N(\sigma) = A^2 + B^2 , \qquad N(\tau) = C^2 + D^2$$

neben den Quotienten

$$\frac{\sigma}{\bar\sigma} = e^{i\pi\varphi} , \qquad \frac{\tau}{\bar\tau} = e^{i\pi\psi}$$

berechnen. Wir setzen

$$\begin{aligned}
x + iy &= 4N(\sigma)N(\tau) \cdot \frac{\sigma}{\bar\sigma}\frac{\tau}{\bar\tau} = (2\sigma\tau)^2 \\
z &= 2\left((N(\sigma))^2 - (N(\tau))^2\right) .
\end{aligned} \tag{10}$$

Wir setzen weiters $\vec r = (x, y, z)$. Es ist

$$\begin{aligned}
|\vec r| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\left((N(\sigma))^2 + (N(\tau))^2\right) \\
\sqrt{x^2 + y^2} &= 4N(\sigma)N(\tau) \\
\cos\vartheta &= \frac{3}{|r|} , \\
\sin\vartheta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|r|} .
\end{aligned} \tag{11}$$

Wir setzen

$$e^{i\pi\psi} = \frac{\sigma}{\bar\sigma}\frac{\tau}{\bar\tau} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Es ist

$$\frac{x + iy}{|r|} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|r|} = e^{i\pi\psi} \sin\vartheta ,$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{x}{|r|} &= \cos\pi\psi \sin\vartheta \\
\frac{y}{|r|} &= \sin\pi\psi \sin\vartheta .
\end{aligned}$$

Für den Fall $\tau = 1, \sigma = A + iB$ ist

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \frac{A^2 - B^2 + 2iAB}{A^2 + B^2} = e^{i\pi\psi} .$$

$$N(\sigma) = A^2 + B^2, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = 4\left(A^2 + B^2\right) ,$$

$$z = 2\left(\left(A^2 + B^2\right)^2 - 1\right), \qquad |r| = \left(\left(A^2 + B^2\right)^2 + 1\right) ,$$

$$\cos\vartheta = \frac{2((A^2 + B^2)^2 - 1)}{(A^2 + B^2)^2 + 1}, \qquad \sin\vartheta = \frac{4(A^2 - B^2)}{(A^2 + B^2)^2 + 1} ,$$

$$\frac{x}{|r|} = \frac{4(A^2 + B^2)}{(A^2 + B^2)^2 + 1}\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \qquad \frac{y}{|r|} = \frac{4(A^2 + B^2)}{(A^2 + B^2)^2 + 1}\frac{2AB}{A^2 + B^2} .$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \zeta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} , \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{2N(\sigma)N(\tau)}{\left(N(\sigma)\right)^2 + \left(N(\tau)\right)^2} \\ \zeta &= \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{\left(N^2(\sigma) - N^2(\tau)\right)}{\left(N(\sigma)\right)^2 + \left(N(\tau)\right)^2} . \end{aligned} \tag{12}$$

Es wird

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Wir setzen nun mit $0 < \vartheta < \pi$

$$\zeta = \cos\vartheta , \qquad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sin\vartheta . \tag{13}$$

Wir können dies kurz zusammenfassen, wenn wir die Gaußschen Zahlen

$$N(\sigma) + iN(\tau) \quad \text{und} \quad \frac{N(\sigma) + iN(\tau)}{N(\sigma) - iN(\tau)}$$

einsetzen.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{N(\sigma) + iN(\tau)}{N(\sigma) - iN(\tau)} &= \frac{\left(N(\sigma)\right)^2 - \left(N(\tau)\right)^2}{(N(\sigma))^2 + (N(\tau))^2} + \frac{2N(\sigma)N(\tau)}{N^2(\sigma) + N^2(\tau)} \\ &= \frac{z}{|\vec{r}|} + i\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|\vec{r}|} . \end{aligned} \tag{14}$$

Ersetzen wir $\sigma$ und $\tau$ durch $\sigma^l, \tau^l$ mit $l = 1, 2, 3, \ldots$, so wird

$$N\left(\sigma^l\right) = N(\sigma)^l , \qquad N\left(\tau^l\right) = N(\tau)^l$$

und bilden wir

$$N\left(\sigma^l\right) + iN\left(\tau^l\right) = N(\sigma)^l + iN(\tau)^l ,$$

so kommen wir zu den Punkten

$$\vec{r}_l = (x_l, y_l, z_l) \;,$$

wo

$$x_l + iy_l = 4\left(N(\sigma)N(\tau)\cdot\frac{\sigma}{\bar\sigma}\frac{\tau}{\bar\tau}\right)^l \;, z_l = 2\left((N(\sigma))^{2l} - (N(\tau))^{2l}\right) \;,$$

$$|r_l| = (N(\sigma))^{2l} + (N(\tau))^{2l} \;, \sqrt{x_l^2 + y_l^2} = 4(N(\sigma)N(\tau))^l \;, \qquad (10')$$

$$\xi_l + i\eta_l = \frac{x_l + iy_l}{|\vec{r}_l|} \;, \zeta_l = \frac{z_l}{|\vec{r}_l|} = \cos\vartheta_l \qquad (11')$$

und zu den Gaußschen Zahlen

$$(N(\sigma))^l + i(N(\tau))^l \;.$$

$|\vec{r}_l|$ geht gegen unendlich und es ist

$$\xi_l^2 + \eta_l^2 + \zeta_l^2 = 1$$

für $l = 1, 2, 3, \ldots$. Wir haben also unendlich viele Punkte auf der Einheitsspäre.

Wir betrachten im nächsten Beispiel die Punkte

$$\begin{aligned} P:\quad x &= \left|\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right| \left|\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\right| \cos\varphi \\ y &= \left|\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right| \left|\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\right| \sin\varphi \\ z &= \left|\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right| \left|\frac{2AB}{A^2 + B^2}\right| \quad \text{kurz} \quad \vec{p} = (x, y, z) \;, \end{aligned} \qquad (15)$$

bzw.

$$\begin{aligned} x' &= \left|\frac{C}{D} + \frac{D}{C}\right| \left|\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}\right| \cos\varphi \\ y' &= \left|\frac{C}{D} + \frac{D}{C}\right| \left|\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}\right| \sin\varphi \\ z' &= \left|\frac{C}{D} + \frac{D}{C}\right| \left|\frac{2CD}{C^2 + D^2}\right| \quad \text{kurz} \quad \vec{r} = (x', y', z') \;. \end{aligned} \qquad (15')$$

Wir wollen nun die Entfernung der Punkte

$$\overline{PP'} = d\,(\overline{PP'}) = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

berechnen. Es ist

$$\vec{r}^{\,2} = \left|\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right|^2 \left(\left(\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\right)^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \left(\frac{2AB}{A^2 + B^2}\right)^2\right) = \left|\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right|^2 \;.$$

Es ist also

$$r = \left|\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right| \quad \text{bzw.} \quad r' = \left|\frac{C}{D} - \frac{D}{C}\right| \;.$$

Wir benötigen jetzt

$$\begin{aligned}
rr'\cos\gamma &= xx' + yy' + zz' = \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right|\left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right|\cos\gamma \\
&= \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right|\left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right|\left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2}+\frac{4ABCD\,\varepsilon}{(A^2+B^2)(C^2+D^2)}\right) \\
&= \frac{1}{|ABCD|}\left((A^2-B^2)(C^2-D^2)+4ABCD\right) \\
&= \left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right)\left(\left|\frac{C}{D}\right|-\left|\frac{D}{C}\right|\right)+4\frac{ABCD}{|ABCD|}\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Wir setzen nun voraus, daß

$$\frac{ABCD}{|ABCD|} \quad \text{positiv ist}\,.$$

Wir erhalten also

$$\overline{PP'}^2 = \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right|^2 + \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right|^2 - 2\left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right)\left(\left|\frac{C}{D}\right|-\left|\frac{D}{C}\right|+4\right).$$

Nun ist

$$\left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right|^2 + \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right|^2 = \left|\frac{A}{B}\right|^2 + \left|\frac{B}{A}\right|^2 + \left|\frac{C}{D}\right|^2 + \left|\frac{D}{C}\right|^2 + 4\,.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
|\overline{PP'}|^2 &= \left|\frac{A}{B}\right|^2 + \left|\frac{B}{A}\right|^2 + \left|\frac{C}{D}\right|^2 + \left|\frac{D}{C}\right|^2 - 4 - 2\left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right)\cdot\left(\left|\frac{C}{D}\right|-\left|\frac{D}{C}\right|\right) \\
&= \left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{C}{D}\right|-\left|\frac{D}{C}\right|\right)^2 - 2\left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right)\cdot\left(\left|\frac{C}{D}\right|-\left|\frac{D}{C}\right|\right).
\end{aligned}$$

Es wird also

$$|\overline{PP'}|^2 = \left(\left(\left|\frac{A}{B}\right|-\left|\frac{B}{A}\right|\right)-\left(\left|\frac{C}{D}\right|-\left|\frac{D}{C}\right|\right)\right)^2,$$

dann ist

$$|\overline{PP'}| = \left|\left|\frac{A}{B}\right|+\left|\frac{D}{C}\right|-\left(\left|\frac{B}{A}\right|+\left|\frac{C}{D}\right|\right)\right|. \tag{16}$$

Wir können $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ noch ganz beliebig annehmen. Weiters nehmen wir eine ganze Gaußsche Zahl $U + iV$ und erhalten

$$\cos\varphi = \frac{U^2-V^2}{U^2+V^2}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{2UV}{U^2+V^2}\,.$$

Dann sind $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ rationale Punkte und die Entfernungen

$$\overline{OP} = \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right| \quad \text{und} \quad \overline{OP'} = \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right|$$

rationale Zahlen.

Wenn $\frac{ABCD}{|ABCD|} < 0$, so erhält man mit $\varepsilon = -1$ wieder (16)

Gehen wir noch einmal auf die Punkte $P$ und $P'$ zurück. Es wird für $P$

$$\begin{aligned} x+iy &= \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right| \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} e^{i\varphi} \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2} = \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right| \left(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\right) \\ z &= \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right| \frac{2AB}{A^2+B^2} \end{aligned} \tag{10''}$$

also

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right| ,$$

analog für $P'$

$$\begin{aligned} x'+iy' &= \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right| \frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} e^{i\varphi} \\ z' &= \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right| \frac{2CD}{C^2+D^2} \\ r' &= \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right| . \end{aligned} \tag{10'''}$$

Wir setzen nun

$$\frac{2AB}{A^2+B^2} = \sin\vartheta , \quad \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} = \cos\vartheta , \quad \frac{x+iy}{r} = \sin\vartheta e^{i\varphi}$$

und

$$\frac{C^2-D^2}{C^2+D^2} = \cos\vartheta' , \quad \frac{2CD}{C^2+D^2} = \sin\vartheta' .$$

Wir setzen noch $\vec{r} = (x,y,z)$, $\vec{r}' = (x',y',z')$. Es wird die Entfernung $d$ der Punkte $\overline{PP'}$

$$d(P,P') = |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma} = \left| \left|\frac{A}{B}\right| + \left|\frac{D}{C}\right| - \left(\left|\frac{B}{A}\right| + \left|\frac{C}{D}\right|\right) \right| .$$

Es ist also

$$\begin{aligned} &\text{für } \varepsilon = +1 \quad && \cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta' = \cos(\vartheta-\vartheta') \\ \text{und } &\text{für } \varepsilon = -1 && \cos\gamma = \cos(\vartheta+\vartheta') . \end{aligned}$$

Es wird dann

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\gamma)$$

für $r < r'$ bzw.

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) ,$$

für $r > r'$, wobei

$$r = \left|\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right| , \qquad r' = \left|\frac{C}{D}+\frac{D}{C}\right| .$$

Wir betrachten nun $s$ Punkte $P_1, \ldots, P_s$ mit

$$\begin{aligned} x_j + iy_j &= \left|\frac{A_j}{B_j} + \frac{B_j}{A_j}\right| \frac{A_j^2 - B_j^2}{A_j^2 + B_j^2 e^{i\varphi}} \\ z_j &= \left|\frac{A_j}{B_j} + \frac{B_j}{A_j}\right| \frac{2A_j B_j}{A_j^2 + B_j^2} . \end{aligned} \tag{17}$$

Es ist für $j \neq k$

$$\begin{aligned} d\left(\overline{P_j P_k}\right) &= \left| \left|\frac{A_j}{B_j}\right| - \left|\frac{B_j}{A_j}\right| - \left(\left|\frac{A_k}{B_k}\right| + \left|\frac{B_k}{A_k}\right|\right)\right| \\ &= \left| \left(\left|\frac{A_j}{B_j}\right| + \left|\frac{B_k}{A_k}\right|\right) - \left(\left|\frac{B_j}{A_j}\right| + \left|\frac{A_k}{B_k}\right|\right)\right| \end{aligned} \tag{18}$$

und es ist für alle $j$

$$d(OP_j) = \left|\frac{A_j}{B_j} + \frac{B_j}{A_j}\right| .$$

Wir nehmen zu den $A_j$ und $B_j$ für $j = 1, \ldots, s$ eine weitere Gaußsche Zahl $U + iV$ hinzu und setzen

$$\frac{U + iV}{U - iV} = e^{i\varphi} . \tag{19}$$

Alle diese Punkte haben dann rationale Koordinaten und rationale Abstände.

Wir wollen noch zeigen, daß stets

$$\left|\frac{A}{B}\right| - \left|\frac{B}{A}\right| \neq \left|\frac{C}{D}\right| - \left|\frac{D}{C}\right| ,$$

wenn die zugrundegelegten Gaußschen Zahlen

$$\alpha = A + iB \quad \text{und} \quad \beta = C + iD$$

Primzahlen sind.

Man sieht sofort, daß

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right) = \frac{A^2 - B^2}{2AB} = i\left(\frac{\alpha^2 + \bar{\alpha}^2}{\alpha^2 - \bar{\alpha}^2}\right)$$

ist. Das gleiche gilt für

$$\frac{C}{D} - \frac{D}{C} = i\left(\frac{\beta^2 + \bar{\beta}^2}{\beta^2 - \bar{\beta}^2}\right) .$$

Wäre nun z.B. $\frac{A}{B} > 0$, $\frac{C}{D} > 0$, so wäre

$$\frac{A}{B} - \frac{B}{A} = \eta\left(\frac{C}{D} - \frac{D}{C}\right) , \tag{$*$}$$

wo $\eta = \pm 1$ ist. Nehmen wir $\eta = 1$, so wäre

$$\bar{\alpha}^2 \beta^2 = \alpha^2 \bar{\beta}^2 .$$

Wählt man $\eta = -1$, so wäre

$$\alpha^2 \beta^2 = \bar{\alpha}^2 \bar{\beta}^2 .$$

Das ist aber nicht möglich, da in $Z(i)$ die ZEP gilt, d.h. die Zerlegung einer ganzen Zahl – abgesehen von den Einheiten – in $Z(i)$ in Primzahlen ist eindeutig.

Natürlich sind auch alle $\vec{r}_j \neq 0$.

Wäre $\frac{A}{B} > 0$, $\frac{C}{D} < 0$, so wäre

$$\frac{A}{B} - \frac{B}{A} = \frac{D}{C} - \frac{C}{D},$$

bzw. wenn $\frac{A}{B} < 0$, $\frac{C}{D} > 0$, so wäre

$$\frac{A}{B} - \frac{B}{A} = \frac{C}{D} - \frac{D}{C}.$$

So kommen wir wieder auf $(*)$ zurück.

Es ist $d(PP') \geq \frac{1}{|ABCD|}$, wenn $P \neq P'$, also $\alpha \neq \beta$ mit $\alpha, \beta$ prim.

Wir setzen nun voraus, daß in unserem System von $s$ Punkten $r_1, \ldots, r_s$ (und dem Nullpunkt $o$) die zugehörigen Gaußschen Zahlen $\alpha$ Primzahlen sind, (die natürlich voneinander verschieden sind). Wir bringen nun in unser System Bewegung, indem wir alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ durch $\alpha_1^l, \ldots, \alpha_s^l$ ersetzen, wobei $l$ alle ganzen Zahlen durchläuft und der Nullpunkt fest bleibt. Wir erhalten also Punkte

$$r_1^{(l)}, \ldots, r_s^{(l)}.$$

Dabei werden auch die Abstände $r_{ik}^{(l)}$ stets ungleich Null sein. Wir können $l$ als Zeit und die Menge $Z$ aller ganzen Zahlen als Zeitfolge ansehen, welche sowohl Vergangenheit, Gegenwart (für $l = 0$) und Zukunft enthält.

Wir können die Punkte noch mit „Masse“ $m_1, \ldots, m_s$ versehen, welche bei der Bewegung fest bleiben, wobei diese $m_j$ rationale Zahlen sind (wir könnten auch noch Geschwindigkeiten $v_j$ einführen und relativistisch arbeiten).

Wir könnten weiters Anziehungen durch

$$K_{ik} = \frac{m_j m_k}{r_{ik}^2}, \qquad K_{i0} = \frac{m_i M_0}{r_i^2}$$

angeben, allgemeiner z.B. den Ansatz machen

$$K_{ik} = C_1 \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} + C_2 \frac{1}{r_{ik}^3},$$

(also „Störungen“ einführen).

Wir können den Nullpunkt als das Zentrums des Systems bezeichnen. Selbstverständlich können wir auch noch andere Annahmen für die $K_{ik}$ machen.

Wir können die zugehörigen Kräfte $\vec{K}_{ik}$ durch die Vektoren

$$\vec{K}_{ik} = \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} \frac{r_i - r_k}{r_{ik}}$$

einführen. Es wird dann

$$\left|\vec{K}_{ik}\right| = K_{ik}.$$

Wir setzen noch

$$V_i = \sum_{k=1}^{s}{}' \frac{m_k}{r_i k},$$

wobei $k$ alle Zahlen von 1 bis $s$ durchläuft, $i$ ausgenommen, und als Energie

$$E = \sum_{i \neq k} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} = \sum_{i=1}^{s} m_i V_i.$$

Betrachten wir das System zur Zeit $l$, so hängen wir den Index $l$ an, also z.B. $r_{ik}$ durch $r_{ik}^{(l)}, K_{ik}^{(l)}, E^{(l)}$ ersetzen. Das System bricht nie zusammen, da die Abstände nie Null sind. Es kann passieren, daß $E^{(l)} = E$ bleibt.

Ein weiteres Beispiel bildet das Yukawa-Potential

$$\frac{1}{r}e^{-kr} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{r}\left(1-\frac{kr}{L}\right)^L ,$$

wobei $L$ groß und $k = \frac{1}{r_0}$ eine Konstante ist.

**Anhang 2 zu §1.**

Wir können den Gaußschen Zahlen $\sigma = A + iB$, $\tau = C + iD$

$$\frac{\sigma}{\bar\sigma} = \frac{A+iB}{A-iB} = e^{\pi i\vartheta} , \qquad \frac{\tau}{\bar\tau} = \frac{C+iD}{C-iD} = e^{\pi i\gamma}$$

und ganzen rationalen Zahlen $l, m$ ein **Spinprodukt**

$$[l,m,\sigma,\tau] = \left(\frac{\sigma}{\bar\sigma}\right)^l \left(\frac{\tau}{\bar\tau}\right)^m - \left(\frac{\sigma}{\bar\sigma}\right)^m \left(\frac{\tau}{\bar\tau}\right)^l$$

zuordnen. In $\vartheta$ und $\gamma$ geschrieben

$$[l,m,\sigma,\tau] = e^{\pi i(l\vartheta+m\gamma)} - e^{\pi i(m\vartheta+l\gamma)} .$$

Wir sehen sofort, wenn wir $\sigma$ und $\tau$ festlassen und kurz $[l,m]$ schreiben, daß

$$[l,m] = -[m,l] .$$

Berechnen wir die Norm von $[l,m]$, so ist

$$|[l,m]|^2 = \left|1 - e^{\pi i(m-l)(\vartheta-\gamma)}\right|^2 ,$$

also gleich

$$2(1-\cos(m-l)(\vartheta-\gamma)) . \qquad (*)$$

Nun ist, wenn wir $k = m - l$ setzen,

$$\cos k(\vartheta-\gamma) = \cos k\vartheta \cos k\gamma + \sin k\vartheta \sin k\gamma ,$$

also gleich

$$\frac{A_k^2 - B_k^2}{A_k^2 + B_k^2}\frac{C_k^2 - D_k^2}{C_k^2 + D_k^2} + \frac{2A_kB_k}{A_k^2 + B_k^2}\frac{2C_kD_k}{C_k^2 + D_k^2} .$$

Setzen wir in $(*)$ ein, so erhalten wir

$$|[l,m]|^2 = 4\frac{(A_kD_k - C_kB_k)^2}{(A_k^2 + B_k^2)(C_k^2 + D_k^2)} .$$

**§2.** Wir können mit Hilfe von §1 (10) auch die Linienkoordinaten von Plücker in rationalen Zahlen erhalten: Wir nehmen jetzt zwei geeignete Paare von Primzahlen $(p_1, p_2)$ und $(p_3, p_4)$ mit den zugehörigen Gaußschen Primzahlen $(\pi_1, \pi_2)$ und $(\pi_3, p_4)$, wobei die $\pi_j$ von der Gestalt

$$\pi_j = A_j + iB_j \qquad \text{für } j \text{ ungerade}$$
$$\pi_j = C_j + iD_j \qquad \text{für } j \text{ gerade}$$

sind. Wir bilden uns dann zwei Vektoren $\vec{r}_j$ für $j = 1, 2$.

Es ist $|r_j|^2 = 1$ und das skalare Produkt $r_j r_k$, wenn $j \neq k$ ist, stets dem Betrage nach höchstens 1.

Wir bilden uns die Vektoren

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 + r_2), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(r_1 - r_2)\,. \tag{1}$$

Es ist

$$\vec{u}\vec{v} = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2) = 0\,. \tag{2}$$

$$u^2 = 1 + r_1 r_2, \quad v^2 = 1 - r_1 r_2\,. \tag{3}$$

Die Komponenten von $\sqrt{2}\vec{u}$ bezeichnen wir mit

$$p_{01},\ p_{02},\ p_{03} \tag{4}$$

und jene von $\sqrt{2}\vec{v}$ mit

$$p_{12},\ p_{13},\ p_{23}\,. \tag{5}$$

Wir definieren die $p_{ik}$ für die übrigen Zahlenpaare (ik), wo $i, k$ Zahlen von 0 bis 4 sind, durch die Forderung

$$p_{ik} = -p_{ki}\,. \tag{6}$$

Es sind also die $p_{ii}$ stets gleich Null.

Es gilt nach (2) die Plückersche Gleichung

$$p = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0;. \tag{7}$$

Wir können nun Punkte bzw. Ebenen definieren. Ist z.B. $p_{01} \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & p_{01} \\ p_{10} & 0 \end{vmatrix} &= -p_{10}p_{01} = {p_{01}}^2 \\ \begin{vmatrix} 0 & p_{02} \\ p_{10} & p_{12} \end{vmatrix} &= -p_{10}p_{02} = p_{01}p_{02} \\ \begin{vmatrix} p_{02} & p_{12} \\ p_{03} & p_{13} \end{vmatrix} &= -(p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12}) = p_{01}p_{23}\,. \end{aligned}$$

Es sind also $(p_{10}, 0, p_{12}, p_{13})$ und $(0, p_{01}, p_{02}, p_{03})$ Punkte, deren Verbindungsgerade $g$ die $p_{ik}$ als Plückersche Koordinaten besitzt. Nimmt man wieder unsere $A_l, B_l, C_l, D_l$, so erhalten wir die zugehörigen Geraden, deren Plückersche Koordinaten $p_{ik}^l$ rationale Zahlen sind. Will man die zugehörigen Ebenen bestimmen, die durch die Geraden hindurchgehen, so nimmt man (wir lassen den Index $l$ weg) die dreizeiligen Unterdeterminanten von

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & 0 & p_{12} & p_{13} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & 0 & p_{12} & p_{13} \end{bmatrix}.$$

Die zugehörigen Ebenen lauten

$$p_{31}\xi_1 + p_{03}\xi_2 - p_{01}\xi_0 = 0$$

und

$$p_{12}\xi_1 + p_{20}\xi_2 + p_{01}\xi_3 = 0$$

und ihre Schnittgerade hat wieder die Plückerschen Koordinaten $p_{ik}$, wenn wieder $p_{01} \neq 0$ ist.

Die zugehörige Gerade bezeichnen wir dann mit $[r_1, r_2]$. Jedem solchen Paar ist also eine Gerade zugeordnet. Haben wir zwei solche Paare $[r_1, r_2]$ und $[r_1', r_2']$ und ist $r_1 = r_1'$, so nennt man sie nach Clifford links parallel, ist $r_2 = r_2'$ rechtsparallel.

Jetzt gehen wir den Weg umgekehrt: Es seien zwei Punkte

$$\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1) , \qquad \vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$$

gegeben (die Koordinaten seien z.B. rationale Zahlen) und bilden nach Plücker $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ und das Vektorprodukt $\vec{r_1} \times \vec{r_2}$, dann ist

$$(\vec{r_2} - \vec{r_1})(\vec{r_1} \times \vec{r_2}) = \mathrm{Det}(\vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{r_1}, \vec{r_2}) = 0 .$$

Wir setzen

$$\begin{array}{lll} p_{01} = x_2 - x_1 , & p_{02} = y_2 - y_1 , & p_{03} = z_2 - z_1 \\ p_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1 , & p_{13} = x_1 z_2 - x_2 z_1 , & p_{23} = y_2 z_3 - y_3 z_2 , \end{array}$$

dann gilt wieder (7), wenn wir noch verlangen, daß $p_{ik} = -p_{ki}$ ist, wir setzen z.B. $p_{31} = -p_{13}$.

Ein schönes Beispiel ist in §1 $(11), (11')$ zu finden. Wir geben den einfachsten Fall hier an

$$\begin{aligned} \vec{r_1} &= \left(4(A^2 - B^2), 8AB, 2((A^2 + B^2)^2 - 1)\right) \\ \vec{r_2} &= \left(4(C^2 - D^2), 8CD, 2((C^2 + D^2)^2 - 1)\right) . \end{aligned}$$

Ein anderes Beispiel bilden die Geraden des einschaligen Drehhyperboloids

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

mit

$$x = a + bt , \quad y = at - b , \quad z = t ,$$

wobei

$$a = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} , \quad b = \frac{2AB}{A^2 + B^2} ,$$

also $a^2 + b^2 = 1$ ist.

Wir nehmen z.B. $t = 0$ bzw. $t = 1$ und erhalten die Punkte

$$\vec{r_1} = (a, -b, 0) , \qquad \vec{r_2} = (a + b, a - b, 1) .$$

Sophus Lie hat gezeigt, daß es auch interessant ist, komplexe Lösungen von (7) zu betrachten.

Nehmen wir alle Sphären von der Gestalt (vgl. z.B. [HLA05])

$$a(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2(b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3) y_0 + c y_0^2 = 0 ,$$

(dabei benützen wir die homogenen Koordinaten $(y_0, y_1, y_2, y_3)$), wobei

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - ac > 0 \qquad (*)$$

sein muß. Wir setzen die linke Seite in $(*)$ gleich $\rho^2$ und lösen die Gleichung

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - ac = \rho^2$$

folgendermaßen (die berühmte Lie'sche Sphären-Geradentransformation)

$$\begin{aligned} p_{01} &= b_1 + ib_2 , & p_{23} &= b_1 - ib_2 , \\ p_{02} &= b_3 + \rho , & p_{31} &= b_3 - \rho , \\ p_{03} &= a , & p_{12} &= -c . \end{aligned}$$

Wir erhalten so die folgende Parameterdarstellung für die $b_j$

$$\begin{aligned} 2b_1 &= p_{01} + p_{23} , & 2ib_2 &= p_{01} - p_{23} \\ 2b_3 &= p_{02} + p_{31} , & 2\rho \ &= p_{02} - p_{31} \\ a &= p_{03} , & c &= -p_{12} , \end{aligned}$$

wobei nicht alle $p_{ik}$ reell sind.

Wir können aber auch eine reelle Parameterdarstellung von $(*)$ finden. Wir setzen

$$a = u + v , \qquad c = u - v .$$

Wir wählen $\rho$ und $u$ so, daß $\rho^2 + u^2 = 1$ ist und nehmen eine geeignete Gaußsche Primzahl $\pi = U + iV$, so daß

$$\rho = \frac{U^2 - V^2}{U^2 + V^2} , \qquad u = \frac{2UV}{U^2 + V^2}$$

ist. Dann haben wir die Gleichung

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + v^2 = 1$$

im Rationalen zu lösen. In §4 werden wir die Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

ausführlich behandeln. Wählen wir dort angeführten rationalen Werte $A, B, C, D$ für $b_1, b_2, b_3, v$, so erhalten wir eine rationale Parameterdarstellung für $b_1, b_2, b_3, a$ und $c$.

Wir können mit Hilfe der $A, B, C, D$ die $b_j$ folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned} b_1 &= LA\rho \\ b_2 &= LB\rho \\ b_3 &= LC\rho \\ v &= LD\rho \\ u &= M\rho , \end{aligned}$$

dann ist

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + v^2 - u^2 = (L^2 - M^2)\rho^2 = \rho^2 .$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} a &= u - v \\ c &= u + v \end{aligned}$$

und erhalten

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - ac = \rho^2 .$$

**Bemerkung.** Es gibt auch andere Einheitsvektoren, die nicht von der Gestalt (1) sind, sondern z.B.

$$(\rho(\cos\tau - \sin\tau), \rho(\cos\tau + \sin\tau), \sigma) ,$$

WC)

$$2p^2 \text{ f } a^2 = 1$$

ist.

Beíspiel: $p$ = |, $a$ = |, dann sind

$$\cos \tau = \frac{C^2 - L>^2}{c^2 + \#2} = \frac{2C£>}{c^2 + £2} > \quad \mathrm{SmT} " \frac{2CD}{c^2 + D^2} \bullet$$

§3. Wir konnen auch spharische Trigonometrie betreiben:[4] Wir nehmen jetzt die Paare von Primzahlen *{puP2)<> (P3yP4,), {P5,pe)* mit den gleichen Eígenschafteri wie vorher, also *Wj — Aj + iB₃*, wenn *j* ungerade, und gleich *Cj + iDj*, wenn *j* gerade ist,

Wir haben jetzt drei Vektoren ři, r*2, $r_3$ aus §1 (10) und nehmen ihre Endpunkte als Punkte des sphárischen Dreiecks mit den Seiten *a,b,c* und den Winkeln a, /3,7, wobei

$$'2?\text{~}3 = \cos a, \quad r_3 ri = \cos 6, \quad r\backslash T2 — \cos c$$

und die Winkel des Vektorenpaares

$$(r_3 \times T\backslash, T\backslash \times r_2), \quad (r_1 \times r_2, ?'_2 \times r_3) \text{ und } (r_2 \times ?*_3, r_3 \times n)$$

mit a. /?, 7.

Es ist z.B.

$$(ri \times T2)(r3 \times ri) = (n \wedge X \wedge n) - r^2 \times r_2 rs = \cos c \cos ft — \cos a .$$

Wir beachten noch, dafi

$$|"2 \times r*3j — \sin á, \quad |r_2 \times r_3 j — \sin 6, \quad |r_3 \times n| = \sin e .$$

Wir erhalten

$$\cos c \cos b — \cos a = — \sin c \sin 6 \cos a ,$$

also

$$\cos a — \cos c \cos b + \sin c \sin 6 \cos a .$$

Wir nehmen jetzt (was wir o.B.d.A. annehmen konnen, indem wir eine passende Drehung vornehmen)

$$\check{r}\backslash = (0,0,1)$$

$$-_{7,3} = = \mathrm{f} \left( \frac{2 \wedge_3 B_3}{V\ ^A l + \wedge_3^2} \frac{C^2 - £>^2}{C^2 + £>^2}, \frac{2A_3ff_3}{\wedge 3 + £3} \frac{2CD}{C^2 + \wedge^2}, \frac{A^2_3 - Bj}{\wedge 3 + \wedge 3^2} \right)$$

[4]vgl. z.B. [TAS01].

$$
\begin{aligned}
\cos a = \vec{r}_1\vec{r}_2 &= \frac{A_2^2 - B_2^2}{A_2^2 + B_2^2} \qquad \sin a = \frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2} \\
\cos b = \vec{r}_1\vec{r}_3 &= \frac{A_3^2 - B_3^2}{A_3^2 + B_3^2} \qquad \sin b = \frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2} \\
\cos c = \vec{r}_2\vec{r}_3 &= \frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2} + \frac{A_2^2 - B_2^2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{A_3^2 - B_3^2}{A_3^2 + D_3^2} \\
&= \sin a \sin b \frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2} + \cos a \cos b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= \left[0, -\frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}, 0\right] \\
\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 &= \left[\frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2CD}{C^2 + B^2}, \frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2}, \frac{C^2 - D^2}{C^2 + B^2}, 0\right] \\
\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{A_2^2 - B_2^2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2} \\ \frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2}\frac{2CD}{C^2 + B^2} \\ \frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{A_3^2 - B_3^2}{A_3^2 + B_3^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + B^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 &= \left[0, -\frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}, 0\right] \\
\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 &= \left[\frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2CD}{C^2 + B^2}, \frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2}, \frac{C^2 - D^2}{C^2 + B^2}, 0\right] \\
\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 &= \left[-\frac{A_2^2 - B_2^2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2}, \frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{2A_3B_3}{A_3^2 + B_3^2}\frac{2CD}{C^2 + B^2},\right. \\
&\qquad \left.\frac{2A_2B_2}{A_2^2 + B_2^2}\frac{A_3^2 - B_3^2}{A_3^2 + B_3^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + B^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) &= \cos\alpha \\
(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) &= \cos\beta \\
(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) &= \cos\gamma\,.
\end{aligned}
$$

**§4.** Wir wollen uns jetzt der Lösbarkeit der Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1 \tag{1}$$

in rationalen Zahlen zuwenden (Es ist nicht meine Absicht, alle Lösungen zu finden).

Wir setzen noch

$$\alpha = A + iB \tag{2}$$

$$\beta = C + iD\,, \tag{2'}$$

dann schreibt sich die Gleichung in der Form

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,. \tag{3}$$

Wir nehmen drei geeignete Primzahlen $p_1, p_2, p_3$ mit den zugehörigen Gaußschen Primzahlen $\pi_j = A_j + iB_j$, $j = 1,2,3$. Die zugehörigen pythagoräischen Zahlen sind

$$p(\pi_j) = X_j + iY_j \; .$$

Dann sei

$$\alpha = X_3\, p(\pi_1\pi_2) \tag{4}$$

$$\delta = \bar{\alpha} = X_3\, p(\bar{\pi}_1\bar{\pi}_2) \; . \tag{5}$$

Weiters sei

$$\beta = iY_3\, p(\bar{\pi}_1\pi_2) \; , \tag{6}$$

dann setzen wir

$$\gamma = -\bar{\beta} = iY_3\, p(\pi_1\bar{\pi}_2) \; . \tag{7}$$

Es ist dann die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = X_3^2 + Y_3^2 = 1 \; . \tag{8}$$

Nehmen wir wieder ganze Zahlen $l_1, l_2, l_3$, dann können wir statt den $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ die Potenzen $\pi_1^{l_1}, \pi_2^{l_2}, \pi_3^{l_3}$ nehmen, am einfachsten $l_1 = l_2 = l_3$.

Die zugehörigen Lösungen bezeichnen wir dann mit $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l, \delta_l$.

Wir zerlegen (es genügt $l = 1$ zu betrachten,) zunächst $\alpha$ in Real- und Imaginärteil

$$\alpha = A + iB = X_3(X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) \; , \tag{9}$$

dann ist

$$A = (X_1X_2 - Y_1Y_2)X_3 \tag{10}$$

$$B = (X_1Y_2 - X_2Y_1)X_3 \; . \tag{10'}$$

Natürlich ist $\delta = A - iB$.

Jetzt machen wir dasselbe mit $\beta$ bzw. $\gamma$, wir zerlegen in Real- und Imaginärteil

$$\gamma = Y_3(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2) \tag{11}$$

mit

$$C = Y_3(X_1X_2 + Y_1Y_2) \tag{12}$$

$$D = Y_3(Y_1X_2 - Y_2X_1) \; . \tag{12'}$$

Es ist natürlich

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = (X_1^2 + iY_1^2)(X_2^2 + Y_2^2)(X_3^2 + Y_3^2) = 1 \; . \tag{13}$$

Es ist

$$p(\pi_j) = \cos\varphi_j + i\sin\varphi_j = e^{i\varphi_j} \; .$$

Es ist also

$$\alpha = X_3\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \gamma = Y_3\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \; . \tag{14}$$

Wir setzen noch

$$\vartheta = 2\varphi_3 \; , \quad \varphi = 2\varphi_1 \; , \quad \psi = 2\varphi_2 \; . \tag{15}$$

Wir betrachten die Abbildung

$$w(z) = \frac{(A+iB)z + C + iD}{(-C+iD)z + A - iB}\,, \tag{16}$$

wobei also

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

ist. Wir betrachten zuerst die Fixpunkte $z_1, z_2$ dieser Abbildung, also die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$w(z) = z\,,$$

explizit

$$(-C+iD)z^2 - 2iBz - (C+iD) = 0\,. \tag{17}$$

Die Lösung lautet

$$z_{1,2} = \frac{iB \pm \sqrt{-(B^2+C^2+D^2)}}{-C+iD}\,. \tag{18}$$

Da

$$B^2 + C^2 + D^2 = 1 - A^2$$

ist, so erhalten wir

$$z_1 = \frac{i(B - \sqrt{1-A^2})}{-C+iD} \tag{19}$$

$$z_2 = \frac{i(B + \sqrt{1-A^2})}{-C+iD}\,. \tag{19'}$$

Wir bilden uns nun das Doppelverhältnis

$$DV(z_1, z_2; w, z) = \frac{w(z) - z_1}{w(z) - z_2} \cdot \frac{(z - z_2)}{(z - z_1)}\,. \tag{20}$$

Es ist nun

$$\frac{w(z) - z_1}{w(z) - z_2} = \frac{w(z) - w(z_1)}{w(z) - w(z_2)}\,.$$

Wir erhalten also durch Einsetzen in (16) für (20)

$$DV = \frac{(-C+iD)z_2 + A - iB}{(-C+iD)z_1 + A - iB}\,. \tag{21}$$

Setzen wir für $z_1$ und $z_2$ ein, so erhalten wir

$$DV(z_1, z_2; w, z) = \frac{A + i\sqrt{1-A^2}}{A - i\sqrt{1-A^2}}\,. \tag{22}$$

Wir erhalten dann die Gleichung

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = e^{i\vartheta} \frac{z - z_1}{z - z_2} \tag{23}$$

oder

$$e^{-i\frac{\vartheta}{2}} \frac{w - z_1}{w - z_2} = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \frac{z - z_1}{z - z_2}\,,$$

wo wir für

$$\frac{A + i\sqrt{1-A^2}}{A - i\sqrt{1-A^2}} = e^{i\vartheta} \tag{24}$$

gesetzt haben. Machen wir die Substitution

$$w'(z) = \frac{w - z_1}{w - z_2}, \qquad z' = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{24'}$$

so erhalten wir

$$w' = e^{i\vartheta} z'. \tag{25}$$

Es liegt also eine Drehung um den Winkel $\vartheta$ vor.

Es gibt bekanntlich die stereographische Abbildung der Gaußschen Ebene auf die Einheitssphäre (Riemannsche Zahlenkugel) gegeben durch

$$x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 + \zeta}, \tag{26}$$

wo

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ist und

$$\xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \quad \zeta = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}. \tag{27}$$

Setzen wir

$$w = X + iY, \quad z = x + iy, \tag{28}$$

so haben wir

$$w(z) = X + iY = \frac{\hat{\xi} + i\hat{\eta}}{1 - \hat{\zeta}}, \qquad z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta},$$

so erhalten wir eine Abbildung der Sphäre auf sich selber.

Setzen wir

$$z_1 = \frac{\xi_0 + i\eta_0}{1 + \zeta_0} = \frac{1 - \zeta_0}{\xi_0 - i\eta_0}. \tag{29}$$

Es ist

$$z_2 = -\frac{1}{\bar{z}_1}, \tag{29'}$$

denn aus (1) folgt

$$\left(B - \sqrt{1 - A^2}\right)\left(B + \sqrt{1 - A^2}\right) = -(C + iD)(C - iD),$$

also ist

$$z_2 = \frac{-\xi_0 + i\eta_0}{1 - \zeta_0}. \tag{30}$$

Die Gleichung (23) schreibt sich wie folgt, wenn wir (30) benützen

$$\frac{w - z_1}{1 + \bar{z}_1 w} = e^{i\vartheta} \frac{z - z_1}{1 + \bar{z}_1 z}.$$

Die Punkte $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, $(-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0)$ bleiben also fest. Wir haben also eine Drehung der Sphäre in sich selbst, wobei die Verbindungslinie der beiden Fixpunkte die Drehachse ist.

Wir nehmen wieder drei geeignete Primzahlen $p_1, p_2, p_3$. Die zugehörigen Gaußschen Primzahlen seien

$$\pi_1 = u + iv, \quad \pi_2 = a + ib, \quad \pi_3 = c + id.$$

Wir setzen zunächst
$$A = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \tag{31}$$
also wird
$$\sqrt{1 - A^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}. \tag{31'}$$
Setzen wir $A = \cos\frac{\vartheta}{2}$, dann wird $\sqrt{1-A^2} = \sin\frac{\vartheta}{2}$. Es wird
$$\frac{A + i\sqrt{1-A^2}}{A - i\sqrt{1-A^2}} = e^{i\vartheta},$$
also ist $\vartheta$ der **Drehwinkel** der Drehung.

Die Gleichung $\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1$ erfüllen wir nach §1 (10), (10'), (10'') durch
$$\xi_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\frac{2cd}{c^2 + d^2} \tag{32}$$
$$\eta_0 = \frac{2ab}{a^2 + b^2}\frac{2cd}{c^2 + d^2} \tag{32'}$$
$$\zeta_0 = \varepsilon\frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2}. \tag{32''}$$
Wir setzen jetzt
$$B = \sqrt{1-A^2}\zeta_0 = \sin\frac{\vartheta}{2}\zeta_0 \tag{33}$$
$$C = \sqrt{1-A^2}\eta_0 = \sin\frac{\vartheta}{2}\eta_0 \tag{34}$$
$$D = -\sqrt{1-A^2}\xi_0 = -\sin\frac{\vartheta}{2}\xi_0. \tag{35}$$
Es ist also die Verbindungslinie der beiden Punkte $N(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ und $P(-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0)$ die **Drehachse**. Wir setzen noch $\xi_0 = \cos\alpha, \eta_0 = \cos\beta, \zeta = \cos\gamma$.

Die Transformation lautet also
$$w = \frac{\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\cos\gamma\right)z + \sin\frac{\vartheta}{2}\left(\cos\beta + i\cos\alpha\right)}{\sin\frac{\vartheta}{2}\left(\cos\beta - i\cos\alpha\right)z + \left(\cos\frac{\vartheta}{2} - i\cos\gamma\right)}. \tag{36}$$
Wir führen das Quaternion ein
$$Q = e\cos\frac{\vartheta}{2} + \vec{q}\sin\frac{\vartheta}{2}, \tag{37}$$
wo
$$\vec{q} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{38}$$
die Drehachse und $\frac{\vartheta}{2}$ der halbe Drehwinkel sind.

Wir schreiben
$$Q = e\cos\frac{\vartheta}{2} + i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma, \tag{39}$$
$(e, i, j, k)$ sind die Quaternioneneinheiten und es wird
$$Q = Ae - Di + Cj + Bk. \tag{40}$$

Wir konnen mit C. Stéphanos der Drehung bzw. dem Quaternion $Q$ einen Punkt des Raumes zuordnen mit den Koordinaten

$$\sim\sim \acute{A}'A'A) \quad '$$

wobei der Ortsvektor die Richtung der Drehachse ist und die Lange des Ortsvektors |tg |j entspricht. Dabei ist $\mathring{u}$ der Drehwinkel.

Die Drehung selbst láfit sich darstellen in der Form

$(A, -D, C, B)$ sind seine „homogenen Koordinaten".

Die Schiebungen im $R^4$ werden gegeben durch

$$r' = Q\backslash r \ , \quad \text{bzw.} \quad r' - rQ^{\wedge J} \ ,$$

wo $r, r'$ Vektoren im $R^4$ sind. $v' = QrQ^{\sim J}$ sind Drehungen im $JR^4$. Dabei seien Qi>Q2 pythagoráische Quatemionen.

Wir nennen die Schiebungen bzw. Drehungen pythagoráische Schiebungen bzw. Drehungen im $R^4$.

Wir nennen ein Quaternion pythagoráisch, wenn wir fiir $A, B,$ C, $D$ die Formeln (31), (32), (32'), (32") einsetzen.

Wir werden wieder die Primzahlen $ITJ$ durch die Potenzen 7r ? ersetzen. Den Buchstaben $u, v,$ a, 6, c, $d$ hángen wir die entsprechenden Indizes $I1J2$ und £3 an. Wir werden dann das Vorzeichen $e$ als £(íi,/2ita) schreiben. Man kann das Vorzeichen beliebig wáhlen. Wir konnen, wenn wir z.B. $li - l_2 = I3$ nehmen, eine gleichverteilte Folge wáhlen bzw. erzwingen. Am einfachsten nimmt man eine weitere geeignete Primzahl P4 mit dem zugehorigen TT4. Wir betrachten den zugehorigen Winkel $a$ definiert durch

$$« - = 21.$$

Wir wissen, dafi die Folge $(2a)$ gleichverteilt modulo 1 ist. Man nimmt ein Teilintervall / = $(Q,p)$ mit $0 < p < 1$, z.B. $p$ — J, dann ist $et - 1 - 2x(l\&)$, wo $x$ die Indikatorfunktion von / ist, eine geeignete Folge vom Vorzeichen $e(l)$. Wir werden dies spátér in einer anderen Arbeit weiterverfolgen.

Bemerkung. Wir nennen die Formeln (30), (31), (31'), (31") die Formelreihe I und (10), (10'), (11), (12), (12') die Formelreihe II.

Bei I wird der Vektor (B, C, $D)$ eingefuhrt durch den Drehwinkel

$$(Ci?hO = \frac{1}{VB^2 + C^2 + D^{2K}} = (B, C, D)$$

und $A$ wird durch den Drehwinkel festgelegt. Es ist

$$B^2 + C^2 + D^2 = 1 - A^2 \ .$$

Bei der Formelreihe II werden die Vektoren $(A, B)$ und (C, $D)$ durch

Dabei ist $y/A^2$ 4 $B^2$ = cos $p$, $y/C^2$ 4 $D^2$ = sin $p$, wobei

$$\cos^2 p \; 4 \; \sin^2 p = A^2 \; 4 \; B^2 \; 4 \; C^2 \; 4 \; D^2 = 1 \; .$$

Die Formelreihen gehóren also zu verschiedenen Winkeln, der Zusammenhang wird durch Formeln der spharischen Trigonometrie gegeben, die wir nicht weiter hinschreiben wollen.

§5. Wir betrachten mit C.F. Gaufi ([GAU01], S. 345-347) einen Wtirfel $W$ mit der Kantenlánge 1. Es sei $O$ ein Eckpunkt des Wurfels. Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem $S$ rnit $O$ als Ursprung. Die Kanten, die von $O$ ausgehen, deren zugehorige Halbachsen, die wir als x-Achse, y-Achse und z-Achse nehmen, kónnen wir als Einheitsvektoren ei, 62,63 auffassen, die aufeinander senkrecht stehen. Wir konnen fiir $j$ — 1,2,3 als Koordinaten dieser Vektoren ansetzen:

$$ej \; — \; (\cos \; a.j, \; \cos \; j3j, \; \cos \; 7j) \; , \qquad (1)$$

wo Q'j, $pj$, $jj$ die Winkel der $ej$ mit dem Koordinatenachsen sind. Wir nehmen jetzt die $xy$-*Ehene* als Gaufische Zahlenebene und fiir $jj$ = 1,2,3 als Gaufische Zahlen

$$Uj = \cos Oj \; 4\text{-} \; \backslash/\text{—}l\sin/?j \; . \qquad (2)$$

Es ist die Šumme

$$\backslash J\backslash \; 4 \; U^2 \; 4 \; ř/f \; = \; \hat{}2_{3=1}^{3} \left(\cos 2 \, {}^a J \sim \cos 2 \; \text{ft} + 2?\text{, } cosa \; j \cos \; fij\right)$$

$$= > \sum_{i=i}^{3} \text{COS}^2 \; Cĵ \; - \; V\hat{}_{i=i}^{3} \; \text{COS}^2 \; Pj \; 4 \; 2? \; \sum_{J\text{»}l}^{3} Vj \; \text{COS} \; Qj \; \text{COS} \; /3j$$

$$- \quad 1 - 1 + 0 = 0 .$$

Wir betrachten die Gleichung

$$f/^2 \; 4\text{-} \; U\backslash \; 4\text{-}1/| = 0 \qquad (3)$$

wieder als diophantische Gleichung in Z(z) und nehmen zwei geeignete Primzahlen $p\backslash$, P2 mit den Gaufjschen Primzahlen

$$m = A \; 4 \; ?\!:\!\#, \qquad 7r_2 = c + i£>$$

und haben die Losungen

$$U_x = 7ri\text{-}ir^2\hat{}\{A + iB)^2 - (C \; 4\text{-} \; iD)^2$$

$$ř/_2 \; - \; H \,) \; W + \hat{}_2^2) = (\text{-}í)((A4i£)^2\text{-}(C4i£>)^2)$$

$$C/_3 = 27T17T2 = 2(A \; 4 \; iB) - (C \; 4 \; i/5) \; \bullet$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{TTJ-TT}^2 &= A^2 4\text{-}D^2 \sim\sim B^2 \sim C^2 + 2i\{A\text{-}B\text{-}C\text{-}D) \\ (\text{-}i) \; (\text{TT}^2 \; 4 \; 7r^2) &= (2AB \; 4\text{-} \; CD) + i \; \{B^2 + D^2 - A^2 - C^2) \qquad (3") \\ 27ri7r_2 &\ll 2(AC - £D) \; 4 \; 2Í(AD \; 4 \; DC) \; . \end{aligned}$$

Wir erhalten den Vektor $(\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \cos\gamma_3)$ als Vektorprodukt der beiden anderen Vektoren $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$, $(\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$ in der Gestalt

$$\frac{1}{\Delta}\left(2(AC - BD), 2(BC + AD), C^2 - D^2 - A^2 - B^2\right) ,$$

wo $\Delta = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$. Wenn wir statt $\pi_1, \pi_2$ die Potenzen $\pi_1^l, \pi_2^l$ nehmen und bei den $A, B, C, D$ den Index $l$ anbringen, so erhalten wir für die neun Kosinusse als Drehmatrix

$$D_l = \frac{1}{\Delta_l}\begin{bmatrix} a_{11}^l & a_{12}^l & a_{13}^l \\ a_{21}^l & a_{22}^l & a_{23}^l \\ a_{31}^l & a_{32}^l & a_{33}^l \end{bmatrix} , \tag{4}$$

wo

$$\Delta_l = A_l^2 + B_1^2 + C_l^2 + D_l^2 \tag{5}$$

ist.

$$\begin{aligned} a_{11}^l &= A_l^2 + D_l^2 - B_l^2 - C_l^2 , & a_{12}^l &= 2(A_lB_l - C_lD_l) , & a_{13}^l &= 2(A_lC_l + B_lD_l) \\ a_{22}^l &= B_l^2 + D_l^2 - A_l^2 - C_l^2 , & a_{21}^l &= 2(A_lB_l - C_lD_l) , & a_{23}^l &= 2(B_lC_l - A_lD_l) \\ a_{33}^l &= C_l^2 + D_l^2 - A_l^2 - B_l^2 , & a_{31}^l &= 2(A_lC_l - D_lB_l) , & a_{32}^l &= 2(A_lD_l + B_lC_l) . \end{aligned} \tag{6}$$

Dies ist die berühmte Eulersche Formel. Bei uns sind die auftretenden Zahlen $A, B, C, D$ ganze Zahlen.

Bezüglich des Zusammenhangs zwischen (6) und §4 (16) vergleiche [GRÖ01], S. 254-256.

Wir können die Matrix auch in folgender Weise schreiben

$$(D_l^2 - A_l^2 - B_l^2 - C_l^2)\,E + 2\begin{bmatrix} A_l^2 & A_lB_l & A_lC_l \\ B_lA_l & B_l^2 & B_lC_l \\ C_lA_l & C_lB_l & C_l^2 \end{bmatrix} + 2D_l\begin{bmatrix} 0 & -C_l & B_l \\ C_l & 0 & -A_l \\ -B_l & A_l & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

($E$ Einheitsmatrix).

Die Bedeutung dieser Darstellung ist wohlbekannt. Es ist die Darstellung einer Drehung um die Achse

$$\vec{a}(a_l, b_l, c_l) = \frac{1}{\Delta_l^{\frac{1}{2}}}(A_l, B_l, C_l) \tag{8}$$

und um den Drehwinkel $\vartheta_l$ mit

$$\cos\vartheta_l = \frac{1}{\Delta_l}(D_l^2 - A_l^2 - B_l^2 - C_l^2) . \tag{9}$$

Es ist

$$\sin\vartheta_l = -\frac{2D_l\sqrt{A_l^2 + B_l^2 + C_l^2}}{\Delta_l} . \tag{10}$$

Wir führen noch die halben Winkel ein und haben nun die Gleichungen

$$1 + \cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2} , \qquad 1 - \cos\vartheta = 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \varepsilon\frac{D_l}{\sqrt{\Delta_l}} , \qquad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{A_l^2 + B_l^2 + C_l^2}}{\sqrt{\Delta_l}} . \tag{11}$$

Bilden wir uns das Quaternion nach §4 (15), so ist

$$\begin{aligned} Q &= -\cos\frac{\vartheta}{2} + \vec{a}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ Q^{-1} &= -\cos\frac{\vartheta}{2} - \vec{a}\sin\frac{\vartheta}{2}\,, \end{aligned} \tag{12}$$

so läßt sich die Drehung in der Form

$$r' = Q^{-1} r Q \tag{13}$$

schreiben.

Dabei sind die Ortsvektoren $r$ und $r'$ als vektorielle Quaternionen zu schreiben

$$r = xi + yj + zk\,, \qquad \text{analog } r'\,.$$

Wir nennen $Q$ wie schon vorher in §4 das pythagoräische Quaternion, wo wir für $\cos\frac{\vartheta}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta}{2}$ die obigen Werte nehmen.

Wir behandeln noch ein anderes Thema mit dem Titel: **Darstellungen der Drehgruppe** (Clebsch-Gordan-Reihe).

Es seien $x_1, x_2$ zwei (unbestimmte) Variable und $n$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten die $n+1$ Potenzen

$$x_1^n, x_1^{n-1}x_2, \ldots, x_2^n$$

(Basis genannt) und eine Transformation (Drehung) (§4 (2), (2′) und (16))

$$w = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$$

mit $\alpha = A + iB,\ \beta = C + iD$ und

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,.$$

Es ist

$$w^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix}\,.$$

die Transformation lautet dann

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = w^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\,,$$

also explizit

$$y_1 = \bar{\alpha}x_1 - \beta x_2\,, \qquad y_2 = \bar{\beta}x_1 + \alpha x_2\,.$$

Wir bilden uns nun die Potenzen

$$y_1^n, y_1^{n-1}y_2, \ldots, y_2^n$$

und erhalten eine Transformation

$$\begin{bmatrix} y_1^n \\ y_1^{n-1}y_2 \\ \vdots \\ y_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_1^{n-1}x_2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{bmatrix}\,.$$

Wir bezeichnen die Matrix mit $w^{(n)}$.

Führen wir dies für $n = 2$ vor, so haben wir

$$y_1^2 = (\bar{\alpha}x_1 - \beta x_2)^2 = \bar{\alpha}^2 x_1^2 - 2\bar{\alpha}\beta x_1 x_2 + \beta^2 x_2^2$$

zu bilden und analog

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= (\bar{\alpha} x_1 - \beta x_2)(\bar{\beta} x_1 + \alpha x_2) = \bar{\alpha}\bar{\beta} x_1^2 + (\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}) x_1 x_2 - \alpha\beta x_2^2 \\ y_2^2 &= (\bar{\beta} x_1 + \alpha x_2)^2 = \bar{\beta}^2 x_1^2 + 2\alpha\bar{\beta} x_1 x_2 + \alpha^2 x_2^2 . \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_1 y_2 \\ \vdots \\ y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}^2 & \bar{\alpha}\beta & \bar{\beta}^2 \\ -2\bar{\alpha}\beta & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} & 2\alpha\bar{\beta} \\ \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ \vdots \\ x_2^2 \end{bmatrix} .$$

Nimmt man statt $(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$ die sogenannte Spinorbasis

$$x_1^2 - x_2^2, \frac{x_1^2 + x_2^2}{i}, 2x_1 x_2 ,$$

so erhält man als transformierte Matrix genau die Matrix (6) von Euler in den Formeln $(3'), (3'')$ haben wir statt den Variablen $x_1, x_2$ die Zahlen $\pi_1, \pi_2$.

Wir betrachten jetzt nur solche Transformationen $w$, die durch pythagoräische Tripel erzeugt werden (wie in §4 (4)-(7)). Wir nennen die zugehörige Matrix $w^{(n)}$ eine pythagoräische Matrix, deren Elemente ganzzahlig sind. Damit haben wir die Eulersche Drehformel in die Theorie eingeordnet.

Die Physiker setzen $n = 2l$ mit $l = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

Als Literatur siehe [WEY01], S. 113, [WAE01], S. 58 und [STI01], S. 81 und 99.

Wir setzen nun

$$\vec{s} = (A, B, C, D)$$

und bilden uns die sogenannte KS-Matrix

$$L(\vec{s}) = \begin{bmatrix} A & -B & -C & D \\ B & A & -D & -C \\ C & D & A & B \\ D & -C & B & -A \end{bmatrix} .$$

Wir können nun die Spalten dieser Matrix als Vektoren der Sphäre $S^3$ auffassen, wir bezeichnen sie mit $\vec{s}_1 = \vec{s}, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4$.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} L(\vec{s}_1)(\vec{s}_1) &= \begin{bmatrix} A^2 - B^2 - C^2 + D^2 \\ 2(AB - CD) \\ 2(AC + BD) \\ 0 \end{bmatrix} \\ L(\vec{s}_1)(-\vec{s}_2) &= \begin{bmatrix} 2(AB + CD) \\ B^2 - A^2 + D^2 - C^2 \\ 2(BC - AD) \\ 0 \end{bmatrix} \\ L(\vec{s}_1)(-\vec{s}_3) &= \begin{bmatrix} 2(AC - BD) \\ 2(BC + AD) \\ C^2 + D^2 - A^2 - B^2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und

$$L(\vec{s}_1)(\vec{s}_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Behalten wir nun in den ersten drei Vektoren die ersten drei Zeilen bei, – die letzte Zeile ist ja 0, so sind sie von der Länge 1. Sie sind die Ortsvektoren der $S^2$. Wir haben also eine sogenannte H.-Hopf-Abbildung der $S^3$ auf die $S^2$. Reihen wir die gekürzten Vektoren aneinander, dann erhalten wir eine quadratische Matrix mit drei Zeilen und drei Spalten. Man bezeichnet sie als die Cailey-Matrix $C(s)$. Eine solche Matrix haben wir schon als Drehmatrix gesehen (vgl. §5 (6)). $A, B, C, D$ sind jetzt rationale Zahlen (vgl. dazu [STI01]).

**§6.** Wir wollen die Drehungen mit Hilfe der Eulerschen Winkel beschreiben und zwar als Produkt von drei Drehungen, einer Drehung $D_1$ um die $x$-Achse, einer Drehung $D_2$ um die $y$-Achse und einer Drehung $D_3$ um die neue $x$-Achse.

Wir nehmen nun drei geeignete Primzahlen $p_1, p_2, p_3$ mit den zugehörigen Gaußschen Primzahlen $\pi_j = A_j + \sqrt{-1}B_j$ für $j = 1, 2, 3$. Wir nehmen die zugehörigen

$$X_j(\pi_j) = \frac{A_j^2 - B_j^2}{A_j^2 + B_j^2}, \quad Y_j(\pi_j) = \frac{2A_jB_j}{A_j^2 + B_j^2},$$

dann ist

$$D = D_1D_2D_3 = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & 0 \\ -Y_1 & X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & Y_2 \\ 0 & -Y_2 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 & Y_3 & 0 \\ -Y_3 & X_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (1)$$

Benützen wir die Potenzen $\pi_1^{l_1}, \pi_2^{l_2}, \pi_3^{l_3}$, wo $l_1, l_2, l_3$ ganze Zahlen sind, so haben wir eine Drehung

$$D_{l_1l_2l_3} = D_1^{l_1} D_2^{l_2} D_3^{l_3} . \quad (2)$$

Diese Drehungen könnten auch für Roboter verwendet werden. Da die Drehwinkel alle irrational sind, sogar linear unabhängig, so können gefährliche Örter nicht eintreten. Man braucht für diese Anwendungen natürlich mehrere Drehungen $D_{l_1l_2l_3}$ (vgl. zur Theorie der Roboter das Buch [DES01]).

Die Drehung lautet

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = D\vec{x} . \quad (3)$$

Die Astronomen pflegen die Drehungen $D_1, D_2, D_3$ auszumultiplizieren

$$D = \begin{bmatrix} X_1X_3 - Y_1Y_3X_2 & -Y_1X_3 - X_1Y_3X_2 & Y_2Y_3 \\ X_1Y_3 + Y_1X_3X_2 & -Y_1Y_3 + X_1X_3X_2 & -Y_2X_3 \\ Y_1Y_2 & X_1Y_2 & X_2 \end{bmatrix} . \quad (4)$$

Wir können die Transformation benützen, um Punkte in der $x, y$-Ebene in den dreidimensionalen Raum emporzuheben, indem wir $x_3 = 0$ nehmen.

Ist $(x_1, x_2)$ ein Pythagoräisches Paar $(X(\alpha), Y(\alpha)$, so ist

$$\vec{X}'(\alpha) = D \begin{bmatrix} X(\alpha) \\ Y(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

ein Pythagoräisches Tripel im Raum und es ist

$$|\vec{X}'(\alpha)|^2 = {X_1'}^2(\alpha) + {X_2'}^2(\alpha) + {X_3'}^2(\alpha) = X^2\left(X^2 + Y^2\right)(\alpha) = 1\,. \tag{6}$$

**Anhang:** Wir können auch einen Richtungskosinus definieren. Es sei wieder ein geeignetes Paar $p_1, p_2$ von Primzahlen, mit den zugehörigen Gaußschen Zahlen $\pi_1 = A + iB$, $\pi_2 = C + iD$ gegeben, dann definieren wir als Richtungsableitungen

$$D^{p_1, p_2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\frac{C^2 - D^2}{C^2 + D^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\frac{2CD}{C^2 + D^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2AB}{A^2 + B^2}\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{7}$$

**Bemerkung zu §6 (2):**

Da das kommutative Gesetz in der Drehgruppe des dreidimensionalen Raumes nicht mehr uneingeschränkt gilt, sind bei mehreren Blöcken von der Gestalt $D_{l_1 l_2 l_3}$ auch verschiedene Primzahltripel $p_1, p_2, p_3$ zu wählen. So sind z.B. bei einem Roboter mit sechs Blöcken 18 verschiedene Primzahlen zu wählen, um gefährliche Örter zu vermeiden.

**Bemerkung zu §6: Lichtkegel, Lorentztransformation**

Der Lichtkegel ist durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \tag{1}$$

definiert.[5]

Wir suchen rationale Punkte $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ des Lichtkegels. Wir geben einige solche an und benützen die Formeln (10), (11) und haben

$$\begin{aligned} x_0 + iy_0 &= 4N(\sigma)N(\tau)\frac{\sigma}{\bar\sigma}\frac{\tau}{\bar\tau} &(2)\\ z_0 &= 2\left((N(\sigma))^2 - (N(\tau))^2\right) . &(3)\end{aligned}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} &\sigma = A + iB\ , \quad \tau = C + iD\ ,\\ &N(\sigma) = A^2 + B^2\ , \quad N(\tau) = C^2 + D^2\ ,\\ &t_0 = \pm 2\left((N(\sigma))^2 + (N(\tau))^2\right) . \end{aligned} \tag{4}$$

Das Punktepaar (4) erfüllt (1). Wir können (1) in der Form

$$\frac{x_0 + iy_0}{t_0 - z_0} = \frac{t_0 + z_0}{x_0 - iy_0} = w_0 \tag{5}$$

schreiben oder in der Form

$$x + iy = w(t - z)\ , \qquad w(x - iy) = t + z\ . \tag{5'}$$

Nehmen wir den Punkt $P$, so ist

$$t_0 + z_0 = 4(N(\sigma))^4\ , \qquad t_0 - z_0 = 4(N(\sigma))^4\ . \tag{6}$$

Es wird

$$w_0 = \left(\frac{N(\tau)}{N(\sigma)}\right)^2 \frac{\sigma}{\bar\sigma}\frac{\tau}{\bar\tau}\ . \tag{7}$$

Setzen wir

$$K = \left(\frac{N(\tau)}{N(\sigma)}\right)^2\ , \qquad \frac{\sigma\tau}{\bar\sigma\bar\tau} = e^{i\varphi}\ , \tag{8}$$

so wird

$$w_0 = Ke^{i\varphi}\ .$$

Betrachten wir jetzt die quadratische indefinite Form

$$Q(x, y, z, t) = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\ , \tag{9}$$

---

[5]Setzen wir $t_1 = t(\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2})$, $t_2 = t(\frac{2AB}{A^2+B^2})$, so ist $t_1^2 + t_2^2 = t^2$, also ist $x^2+y^2+z^2-t_1^2 = t^2 > 0$. Daher sind die Punkte $(x, y, z, t_1), (x, y, z, t_2)$ raumartig. Setzen wir $t_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)t$, $t_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right)t$, so ist $t_3^2 - t_4^2 = t^2$. Dann ist der Punkt $(x, y, z, t_4)$ zeitartig, da dann $x^2+y^2+z^2 = -t_4^2 < 0$ ist.

so ist der Lichtkegel durch $Q = 0$ definiert. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, alle linearen Transformationen zu studieren, welche den Lichtkegel bzw. $Q$ invariant lassen, also die Lorentztransformation aufzustellen. Wir können (9) als Determinante schreiben

$$Q = \operatorname{Det} L ,$$

wo $L$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}$$

ist, denn ihre Determinante ist

$$(t+z)(t-z) - (x-iy)(x+iy) .$$

Es sei nun die Transformation $T$ gegeben durch

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} ,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige komplexe Zahlen mit von Null verschiedener Determinante

$$\Delta = \alpha\beta - \gamma\delta$$

sind. Man kann sie normieren $\Delta = 1$. Wir wollen dies im Augenblick nicht tun.

Es ist bekannt, daß $T$ auf $L$ angewandt

$$L' = TLT^*$$

ist, wo

$$T^* = \bar{T}^t .$$

Dabei ist $\bar{T}^t$ die transponierte Matrix von $\bar{T}$ ist. Also geht die Form $Q$ in die transformierte Form $Q'$

$$Q' = (\operatorname{Det} L')|\Delta|^2$$

über. Wenn $\Delta = 1$ ist, so ist $Q' = \operatorname{Det} L'$.

$Q' = t'^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$ lautet folgendermaßen

$$\begin{aligned}
x' &= \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta)t + \operatorname{Re}(\bar{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\delta)x + \operatorname{Im}(\gamma\bar{\beta} - \alpha\bar{\delta})y + \operatorname{Re}(\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\beta)z \\
y' &= \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta})t - \operatorname{Im}(\bar{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\delta)x + \operatorname{Re}(\alpha\bar{\delta} - \bar{\gamma}\beta)y + \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta})z \\
t' &= \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2\right)t + \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta)x + \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\delta)y \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(|\gamma|^2 + |\delta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2\right)z \\
z' &= \frac{1}{2}\left(|\beta|^2 + |\delta|^2 - |\alpha|^2 - |\gamma|^2\right)t + \operatorname{Re}(\beta\bar{\delta} - \bar{\alpha}\gamma)x + \operatorname{Im}(\bar{\beta}\delta - \bar{\alpha}\gamma) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\delta|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2\right) .
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Lorentztransformation $Q'$.

Wir nehmen jetzt vier verschiedene Gaußsche Primzahlen

$$\pi_1 = A' + iA'' , \qquad \pi_2 = B' + iB'' ,$$
$$\pi_3 = C' + iC'' , \qquad \pi_4 = D' + iD'' ,$$

so ist die Determinante $\Delta(\hat{T}) = \pi_1\pi_4 - \pi_2\pi_3$ von

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_3 & \pi_4 \end{bmatrix}$$

sicher ungleich Null wegen der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung.

Wollen wir normieren, so bilden wir uns

$$T = \frac{\hat{T}}{\sqrt{|\Delta|}} ,$$

dann wird

$$L' = TLT^* = \frac{\hat{T}L\hat{T}^*}{|\Delta|} .$$

Die Koeffizienten von $t', x', y', z'$ sind also ganze rationale Zahlen. Damit erhalten wir auch ganze Zahlen auf dem Lichtkegel. Es ist aber hier nicht notwendig, diese Normierung durchzuführen.

Allgemeines Beispiel: $\alpha = \pi_1^{l_1}$, $\beta = \pi_2^{l_2}$, $\gamma = \pi_3^{l_3}$, $\delta = \pi_4^{l_4}$. Es seien nicht alle $l = 0$ und $l_j$ ganze natürliche Zahlen.

Ein weiteres wichtiges Beispiel siehe §13 (6).

Betrachten wir noch die zweite Darstellung zu (5)

$$\frac{x+iy}{t+z} = \frac{t-z}{x-iy} = w_0^* .$$

Für das Beispiel (2), (3) erhalten wir

$$w_0^* = \left(\frac{N(\tau)}{N(\sigma)}\right)^2 e^{-i\varphi} . \qquad \mathbf{(2')}$$

Die Ebenenschar ($w_0 \neq 0$)

$$\begin{aligned} (x+iy) - w_0(t+z) &= 0 \\ w_0(x-iy) - \quad (t+z) &= 0 \end{aligned}$$

bzw. die Ebenenschar

$$\begin{aligned} (x+iy) - w_0^*(t+z) &= 0 \\ w_0^*(x-iy) - \quad (t-z) &= 0 \end{aligned}$$

sind die Erzeugungsscharen des Lichtkegels.

**Bemerkung:** Geben wir ein Beispiel mit der Möbiustransformation $\alpha = \delta = 1$, $\beta = -a$, $\gamma = \bar{\beta}$, $|a| < 1$ Die zugehörige Lorentztransformation lautet:

$$\begin{aligned} t' &= \left(1+|a|^2\right)t - 2\,\mathrm{Im}(\bar{a})z + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a})x \\ z' &= (2\,\mathrm{Im}(a))t + \mathrm{Re}(1+a^2)z - \mathrm{Im}(1+a^2)x \\ x' &= -2\,\mathrm{Re}(a)t + \mathrm{Im}\left(|\bar{a}|^2-1\right)z + \mathrm{Re}\left(a^2+1\right)x \\ y' &= -\,\mathrm{Re}(a-\bar{a})x + \left(1-|a|^2\right)y . \end{aligned}$$

Eine wichtige Transformation erhalten wir folgendermaßen:
Es sei $\rho = R + iS$ eine eigentliche Gaußsche Zahl. Wir setzen

$$U = \frac{1}{2}\left|\frac{R}{S} + \frac{S}{R}\right| , \qquad V = \frac{1}{2}\left|\frac{R}{S} - \frac{S}{R}\right| .$$

Es sei

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(U+V)}\ ,$$

dann ist

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(U+V)\ , \qquad \alpha^{-2} = \frac{1}{2}(U-V)$$

und

$$U^2 - V^2 = 1\ .$$

Wir betrachten die Transformation

$$L = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}\ ,$$

dann erhalten wir

$$x' = x\ , \quad y' = y\ , \quad z' = uz + vt\ , \quad t' = vz + ut$$

mit Determinante 1.

Diese Transformation ist eine Lorentztransformation mit der Geschwindigkeit

$$v = \left|\frac{V}{U}\right|\ , \qquad \sqrt{1-v^2} = \frac{1}{|U|}\ .$$

Wir erhalten nämlich

$$z' = \frac{z+vt}{\sqrt{1-v^2}}\ , \qquad t' = \frac{vz+t}{\sqrt{1-v^2}}\ .$$

Es ist also $v$ die Geschwindigkeit der Lorentztransformation in der positiven $z$-Richtung.

Diese Methode ist nicht anwendbar auf die Spiegelung

$$x' = -x,\ , \quad y' = -y\ , \quad z' = z\ , \quad t' = t\ .$$

Diese Spiegelung ist nicht durch die Matrix $L$ darstellbar. Hier müssen wir die Transformation $L'$ einsetzen

$$L' = \begin{bmatrix} t-z & -(x-iy) \\ -(x+iy) & t+z \end{bmatrix}\ .$$

Es ist

$$L'L = \begin{bmatrix} t^2-(x^2+y^2+z^2) & 0 \\ 0 & t^2-(x^2+y^2+z^2) \end{bmatrix}\ .$$

Wir wollen Lösungen der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ konstruieren. Es seien $r_1, \ldots, r_6$ komplexe Zahlen, wir bilden uns folgende pseudopythagoräische Zahlen

$$X_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}\ , \qquad Y_1 = \frac{2r_1r_2}{r_1^2 + r_2^2}$$

$$X_2 = \frac{r_3^2 - r_4^2}{r_3^2 + r_4^2}\ , \qquad Y_2 = \frac{2r_3r_4}{r_3^2 + r_4^2}$$

$$L_3 = \frac{r_5^2 + r_6^2}{2r_5r_6}\ , \qquad M_3 = \frac{r_5^2 - r_6^2}{2r_5r_6}\ .$$

Alle Nenner sollen von Null verschieden sein.

Wir bilden uns

$$a - XiL_3 + Y_2M_3 \ , \qquad j3 = X_2M_3 - Y_XL_Z$$
$$ó = X_XL_3 - Y_2M_3 \ , \qquad 7 = X_2M_3 + Y_XL_3 \ .$$

Es ist

$$aS - (XiL_3)^2 - (I2M3)^2$$
$$07 - (X2M3)^2 - (F1L3)^2 \ ,$$

also ist

$$aó \sim fa = (\wedge 1 + *?)£,§ - (X| 4- Y_2^2)A4l = £| - Mf = 1 \ .$$

Wir nehmen z.B. sechs Gaufische Prirazahlen *iri,..., TTQ.*

Wollen wir reelle cc, @, 7, *S* haben, so nehmen wir drei Gaufische Primzahlen

$$Vj = A_j + iB_j \ , \qquad \text{fQr } j - 1,2,3.$$

Wáhlen wir fiir *ri,r$,r§* die $A\backslash,A_2,A_3$ und fiir $r_2,r4,rg$ die $B\backslash,B_2,B_3,$

## Literatur


[AIG01]: A. Aigner, *Zahlentheorie,* Veríag Walter de Gruyter, Berlin u. a. 1975.

[HAS01]: H. Hasse, *Vorlesungen uber Zahlentheorie;* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 59, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin u. a. 1964, 171-175.

**[HLA01]:** E. Hlawka, *Uber eine Klasse von gleichverteilten Folgen,* Acta Arithrnetica 53 (1990) 389-402.

**[BEHOl]:** H. Behnke, F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veránderlichen,* Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Bd. 77; Springer, Berlin u.a. 1955.

**[BIAOl]:** L. Bianchi, *Vorlesungen uber Differentialgeometrie,* M, Lukat (Obere.), Teubner, Leipzig 1899.

**[BIE01]:** L. Bieberbach, *Eine singularitátenfreie Fláche konstanter negativer Krilmmung im Hilbertschen Raum,* Comm. Helvetica 4 (1932) 248-255.

**[BLAOl]: D.** Blanuša, *Eine isometrische und singularitátenfreie Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertschen Raum,* Monatshefte f. Mathematik 57 (1955) 102-108.

**[BLA02]:** D. Blanuša, *Uber die Einbettung hyperbolischer Ráume in euklidische Ráume,* Monatshefte f. Mathematik 59 (1957) 217-229.

[BLA03]: W. Blaschke, *Analytische Geometrie,* Lehrbucher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, mathematische Reihe, Bd. 16, 2. Auflage, Birkháuser, Basel u.a. 1954.

[BUROl]: H. Burkhardt (Hrsg.), Jahresberichte der dt. Mathematiker-Vereinigung 10 (2), Teil 1 (1908).

[CHAOl]: K. Chandrasekharan, *EUiptic functions,* Springer, Berlin [u.a.] 1985.

[CONOl]: S. Cohn-Vossen, *Rezension von [BIEQlj,* Zentralblatt f. Mathematik 5 (1933), S. 82.

**[DES01]**: K. Desoyer, P. Kopacek, I. Troch, *Industrieroboter und Handhabungsgeräte,* Verlag Oldenbourg, München-Wien 1985.

**[FEF01]**: S. Feferman (Hrsg.), *K. Goedel, Collected papers*, Vol. II, Oxford Univ. Press 1990, p. 190-198.

**[FEF02]**: S. Feferman (Hrsg.), *K. Goedel, Collected papers*, Vol. III, Oxford Univ. Press 1995, p. 261-289.

**[GAU01]**: C.F. Gauß *Gesammelte Werke, Projektion des Würfels*, Bd. 8, 2. Abdruck, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1990.

**[GÖD01]**: K. Goedel, *An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravity*, Reviews of Modern Physics 21 (3) (1949) 447-450.

**[GRA01]**: H. Grauert, *Discrete Geometry*, Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen 2 (1996) 343-362.

**[GRÖ01]**: W. Gröbner, *Matrizenrechnung*, Bibl. Inst. Mannheim 1966.

**[HAD01]**: H. Hadwiger, *Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie*, El. Math. I (6) (1946) 98-100.

**[HAS01]**: H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 59, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin u.a. 1964, 171-175.

**[HAW01]**: St. Hawking, G.F. Ellis, *The large scale structure of space time*, Cambridge Univ. Press 1973.

**[HAW02]**: St. Hawking, R. Penrose, *Raum und Zeit* (dt. von C. Kiefer), Rowohlt 1998.

**[HEY01]**: M. Heyerhoff, *Zur frühen Geschichte der Solitonentheorie*, in: M. Toepell (Hrsg.), Mathematik im Wandel, Anregungen zum fächer- übergreifenden Mathematikunterricht; Mathematikgeschichte und Unterricht, Bd. 1, Verlag Franzbecker, Hildesheim-Berlin 1998, S. 294-305.

**[HIL01]**: D. Hilbert, St. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*; Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 37, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1932.

**[HLA01]**: E. Hlawka, *Interpolation analytischer Funktionen auf dem Einheitskreis*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis (E. Landau Gedenkband), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968, S. 99-118.

**[HLA02]**: E. Hlawka, *Approximation von Irrationalzahlen und pythagoräische Tripel (Vortrag anläßlich des 70. Geburtstags von Professor E. Peschl*, Bonner Mathematische Schriften 121 (1980) 1-32 und in: P.M. Gruber, W.M. Schmidt (Hrsg.), Edmund Hlawka - Selecta, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1990, S. 431 ff.

**[HLA03]**: E. Hlawka, *Zur Radontransformation*, Sitzungsber., Abt. II, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. 198 (1989) 331-379.

**[HLA04]**: E. Hlawka, *Über eine Klasse von gleichverteilten Folgen*, Acta Arithmetica 53 (1990) 389-402.

**[HLA05]**: Chr. Binder, E. Hlawka, J. Schoissengeier, *Über einige Beispiele zur Theorie der Gleichverteilung*, Math. Slovaca 43 (4) (1993) 427-446.

[**HLA06**]: E. Hlawka, *Statistik und Gleichverteilung,* Grazer Math.Berichte 235 (1998) 1-206.

[**HLA07**]: E. Hlawka, *Pythagorean Tripels,* in: R.P. Bambah, V.C. Dumir, R.J. Hans-Gill (eds.), Number Theory, Hindustan Book Agency 1999.

[**HLA08**]: E. Hlawka, *Über einige geometrische Anwendungen im Zusammenhang mit Pythagoräischen Tripeln und Gleichverteilung,* Aequationes Math. 58 (1999) 1-13.

[**HLA09**]: E. Hlawka, *Beiträge zur Theorie der Gleichverteilung und ihren Anwendungen I–V.* (Dem Andenken an W. Nöbauer gewidmet). Sitzungsber., Abt. II, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. 197 (1988) 1-287.

[**HLA10**]: E. Hlawka, *Über Dirichletsche Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, die mit Schwingungsgleichungen verwandt sind,* Sitzungsber., Abt. II, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. 206 (1997) 217-239.

[**HLA11**]: E. Hlawka, *Über eine Klasse von gleichverteilten Folgen,* Acta Arithmetica 53 (1990) 389-402.

[**HLG01**]: J. Hilgert, *Group Theoretical Aspects of Goedels Cosmological Model,* Jahresbericht der Kurt Gödel Gesellschaft (1990) 3-11.

[**HUR01**]: A. Hurwitz, *Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration,* Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Klasse Bd. II, 1897.

[**HUR02**]: ETH Zürich, Abt. Mathematik und Physik (Hrsg.), *Mathematische Werke von A. Hurwitz,* Birkhäuser, Basel 1933.

[**KLE01**]: F. Klein, *Vorlesungen über die hypergeometrischen Funktionen,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, Bd. XXXIX, Springer-Verlag 1933.

[**KNO01**]: K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen;* Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 2, 3. Auflage, Springer-Verlag 1931.

[**KUN01**]: W. Kundt, *Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen kosmologischen Modell,* Zs. f. Physik 145 (1956) 611-620.

[**MET01**]: W. Metzler, *Note on a chaotic map that generates nowhere-differentiability,* Math. Semesterberichte 40 (1993) 87-90.

[**NEW01**]: A.C. Newell, *The History of the Soliton,* Journal of Applied Mathematics 50 (1983) 1127-1138.

[**PER01**]: O. Perron, *Kreisverwandtschaften in der hyperbolischen Geometrie,* Math. Zeitschrift 93 (1966) 69-79.

[**RIB01**]: P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs,* Springer-Verlag, New York 1999.

[**SAV01**]: D.J. Saville, G.R. Wood, *Statistical Methods – A Geometric Primer,* Springer-Verlag, New York 1996.

[**SCH01**]: W. Scherrer, *Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter,* El. Math. I (6) (1946) 97-98.

[**SCR01**]: E. Schrödinger, *Zur Akustik in der Atmosphäre,* Phys. Zeitschrift 18 (1917) 445-453; Österr. Akademie d. Wissenschaften (Hrsg.), E. Schrödinger, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 4, Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden 1984, S. 3-12.

**[SEE01]:** A. Seeger, H. Donth, A. Kochendörfer, *Theorie der Versetzungen in 1-dimensionalen Atomreihen III*, Zeitschrift für Physik 134 (1953) 173-193.

**[SEE02]:** A. Seeger, *Solitons in Crystals*, in: E. Kröner, K.-H. Anthony (eds.), Continuum Models of Discrete Systems (CMDS3), Proc. $3^{rd}$ Int. Symposium on Continuum Models of Discrete Systems, Freudenstadt, Germany, June 24-30, 1979, Part 2 - Thermodynamics, Plasticity, Defects; SM Study 15, University of Waterloo Press 1980, pp. 253-327.

**[SEE03]:** A. Seeger, *Kristallphysik: Drei Beispiele*, in: Chr. Schneider (eds.), Forschung in der Bundesrepublik Deutschland, Beispiele, Kritik, Vorschläge, Verlag Chemie 1983, S. 587-609.

**[SOB01]:** I.M. Sobol, *Die Monte-Carlo Methode*, Mathematische Schülerbücherei 50, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

**[STI01]:** E. Stiefel, A. Fässler *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung*, Teubner Studienbücher: Mathematik 46, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart 1979.

**[TAS01]:** R.J. Taschner, *Holzwege zur Mathematik I*, Eine Einführung in die höhere Mathematik, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich 1983.

**[TAU01]:** O. Taussky-Todd, *Sums of squares*, Amer. Math. Monthly 77 (1970) 805-830.

**[TAU02]:** O. Taussky-Todd, *Sets of complex matrices which can be transformed to triangular form*, in: Numerical methods (Third Colloq., Keszthely, 1977), Northholland, Amsterdam-New York 1980, prp. 579-590.

**[TOE01]:** M. Toepell (Hrsg.), Mathematik im Wandel, Anregungen zum fächer-übergreifenden Mathematikunterricht; Mathematikgeschichte und Unterricht, Bd. 1, Verlag Franzbecker, Hildesheim-Berlin 1998.

**[WAE01]:** B.L. van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Springer Verlag, Berlin u.a. 1932.

**[WEY01]:** H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2. Auflage, Verlag Hirzel, Leipzig 1947.

**[WUN01]:** W. Wunderlich, *Zur Geometrie der Vogeleier*, Sitzungsber., Abt. II, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. 187 (1978) 1-19.

**[WUN02]:** W. Wunderlich, *Höhere Radkurven*, Österr. Ingenieurarchiv 1 (1947) 277-296.

**[WUN03]:** W. Wunderlich, *Höhere Radlinien als Näherungskurven*, Österr. Ingenieurarchiv 4 (1956) 4-11.

**[ZEIT01]:** H. Zeitler, *Was haben Rollkurven und Mandelbrotmengen miteinander zu tun*, DdM 4 (1995) 276-289.