Holger Boche

Über das Lokalisierungsprinzip bei mehrdimensionalen Shannonschen und konjugierten Shannonschen Abtastreihen

Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 5 (1997), No. 1, 27--37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120511

Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 5 (1997) 27–37

Über das Lokalisierungsprinzip bei mehrdimensionalen Shannonschen und konjugierten Shannonschen Abtastreihen

Holger Boche

Abstract: In this paper the behaviour of multidimensional Shannon and conjugated Shannon Sampling Series is investigated. For the one-dimensional Shannon as well as the one-dimensional conjugated Shannon Sampling Series there hold some localization principles. These localization principles are usefull for the investigation of the convergence behaviour of the one-dimensional Shannon and conjugated Shannon Sampling Series. In this paper it is shown that for more than one dimension these localization principles cannot hold. These results solve a problem proposed by P.L. Butzer [2].

Mathematics Subject Classification: 41A05, 42A50, 94A05, 94A12

Key Words: Multidimensional Shannon and conjugated Shannon Sampling Series, Hilbert Transform, Localization Principle, Convergence and Divergence Behaviour

1. Einleitung und Ergebnisse

Die Shannonsche Abtastreihe einer auf dem Intervall $[0,1]$ konzentrierten stetigen Funktion f ist durch

$$(A_n f)(t) = \frac{1}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\sin n\pi(t-\frac{k}{n})}{t-\frac{k}{n}} \tag{1}$$

definiert. Die Shannonsche Abtastreihe besitzt für die Signaltheorie eine große Bedeutung [8] [9] [10]. Von mathematischer Seite wurde die Shannonsche Abtastreihe in den letzten 30 Jahren ausgiebig untersucht. Ein Überblick über den Entwicklungsstand wurde in den Übersichtsarbeiten von Butzer [3] [4] [5] gegeben. Für Anwendungen auf Fragen der Approximationstheorie sei auf [6] [7] verwiesen.

Für die eindimensionalen Abtastreihen gilt das folgende Lokalisierungsprinzip. Es sei $f \in C_0[0,1]$ eine beliebige Funktion, welche auf einem Intervall $[a,b] \subset (0,1)$ gleich Null ist. Dann konvergiert die Folge der Shannonschen Abtastreihe $A_n f$ für alle $t \in (a,b)$

gegen Null. Für jedes abgeschlossene Teilintervall von (a,b) konvergiert die Folge gleichmäßig gegen Null. Diese Eigenschaft der eindimensionalen Shannonschen Abtastreihe ist für die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Abtastreihen äußerst nützlich [15]. Mit dieser Eigenschaft ist es möglich, hinreichende Konvergenzbedingungen stets lokal zu formulieren [11] [15]. Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob für mehrdimensionale Shannonsche Abtastreihen diese Aussage ebenfalls gilt.
Für stetige auf dem Quadrat $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ konzentrierte Funktionen f ist die zweidimensionale Shannonsche Abtastreihe durch

$$(2) \qquad (A_n^2 f)(x,y) = \frac{1}{n^2\pi^2} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-1} f\Big(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\Big) \frac{\sin n\pi(x - \frac{k_1}{n})}{x - \frac{k_1}{n}} \frac{\sin n\pi(y - \frac{k_2}{n})}{y - \frac{k_2}{n}}$$

definiert [3] [9]. Die Menge dieser Funktionen f bezeichnen wir im weiteren mit $C_0[0,1]^2$. Wir versehen die Menge $C_0[0,1]^2$ mit der üblichen Maximum-Norm.
Von P.L. Butzer [2] stammt die Vermutung, daß das Lokalisierungsprinzip für mehrdimensionale Shannonsche Abtastreihen nicht gilt. Wir wollen in dieser Arbeit die Gültigkeit dieser Vermutung beweisen. Diese Aussage ist in dem folgenden Satz enthalten.

Satz 1. *Es existiert eine in dem Rechteck $[0,1] \times [0,\frac{1}{4}]$ konzentrierte stetige Funktion g_1 derart, daß*

$$(3) \qquad \limsup_{n\to\infty} \Big| \big(A_n^2 g_1\big)\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \Big| = \infty$$

gilt.

Damit kann offensichtlich das Lokalisierungsprinzip für die Shannonsche Abtastreihe in höheren Raumdimensionen nicht gelten. Wir wollen nun noch eine einfache hinreichende Bedingung für die Gültigkeit eines Lokalisierungsprinzips angeben. Dazu führen wir die folgende Bezeichnung ein. Es sei $\delta > 0$ eine reelle Zahl und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dann bezeichnen wir mit $A_\delta(x_0,y_0)$ die Menge aller $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $|x - x_0| < \delta$ oder $|y - y_0| < \delta$ gilt. Mit dieser Bezeichnung erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 2. *Es sei $f \in C_0[0,1]^2$ eine beliebige Funktion mit der Eigenschaft, daß ein Punkt $(x_0,y_0) \in (0,1) \times (0,1)$ und eine Zahl $\delta > 0$ existieren, für die $f(x,y) = 0$ mit $(x,y) \in A_\delta(x_0,y_0)$ gilt. Für diese Funktionen f haben wir*

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} (A_n^2 f)(x_0,y_0) = 0.$$

Der Satz 2 gibt damit eine gewisse schwächere Variante des Lokalisierungsprinzips aus dem eindimensionalen Fall an. Der Satz 1 zeigt, daß die Voraussetzungen des

Satzes 2 ohne zusätzliche Glattheitsanforderungen an die Funktion f nicht abgeschwächt werden können.
Als nächstes wird eine ähnliche Fragestellung für die konjugierte Shannonsche Abtastreihe untersucht. Diese ist als Hilbert-Transformierte der Shannonschen Abtastreihe definiert. Für ein Signal $f \in C_0[0,1]$ ist die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t-\epsilon}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{t+\epsilon}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right) \\ &= V.P.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \end{aligned} \tag{5}$$

definiert. Im weiteren wird mit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet, welche nur auf einer kompakten Menge von Null verschieden sind. Mit $L^2(\mathbb{R})$ wird die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen mit der üblichen $L^2(\mathbb{R})$-Norm bezeichnet. Die Fourier-Transformierte einer Funktion $L^2(\mathbb{R})$ wird mit $\hat{f}$ bezeichnet. Für die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ einer Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ergibt sich damit die Darstellung

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)(-j\,sign(\omega))e^{j\omega t}\,d\omega\ . \tag{6}$$

Hierbei ist die $sign$-Funktion durch

$$sign(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \tag{7}$$

definiert. Für die konjugierte Shannonsche Abtastreihe $\tilde{A}_n$ ergibt sich damit die Darstellung

$$(\tilde{A}_n f)(t) = \frac{2}{n\pi}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}(t-\frac{k}{n})}{t-\frac{k}{n}}\ . \tag{8}$$

Hierbei ist $f \in C_0[0,1]$ eine beliebige Funktion. Sie wurden bereits ausführlich in der Literatur untersucht [3], [4], [12], [13], [14].
Für die konjugierte Shannonsche Abtastreihe gilt das folgende Lokalisierungsprinzip: [11] [15]
Es seien $f, g \in C_0[0,1]$ zwei beliebige Funktionen derart, daß ein Intervall $[a,b] \subset [0,1]$ existiert, so daß $f(t) = g(t)$ für $t \in [a,b]$ gilt. Dann existiert für jedes Teilintervall

$[c,d] \subset [a,b]$ mit $a < c < d < b$ eine Konstante $C_1 = C_1(c,d)$, so daß für die konjugierte Shannonsche Abtastreihe die Beziehung

$$\max_{t\in[c,d]} \left|(\tilde{A}_n f)(t) - (\tilde{A}_n g)(t)\right| \leq C_1 \tag{9}$$

gilt. Die Differenz der konjugierten Shannonschen Abtastreihe der Funktionen f und g bleibt also für alle $t \in [c,d]$ beschränkt. Im folgenden wird das Verhalten der mehrdimensionalen konjugierten Shannonschen Abtastreihe untersucht. Dazu mußals erstes die mehrdimensionale Hilbert-Transformation eingeführt werden. Dazu wird von der Darstellung 6 ausgegangen. Die Hilbert-Transformierte $\tilde{f}$ einer Funktion $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ wird durch

$$(10)\tilde{f}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_1,\omega_2)(-jsign(\omega_1))(-jsign(\omega_2))e^{j\omega_1 x}e^{j\omega_2 y}\,d\omega_1\,d\omega_2\ .$$

definiert. Das Intergal in (10) ist absolut konvergent. Damit ist $\tilde{f}$ eine stetige Funktion. Mit der Parsevalschen Gleichung erhält man aufgrund der Darstellung (10) die Beziehung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x,y)|^2\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2\,dx\,dy\ , \tag{11}$$

d.h. die zweidimensionale Hilbert-Transformation ist ein stetiger und linearer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^2)$. Damit ergibt sich für die konjugierte Shannonsche Abtastreihe die Darstellung

$$(\tilde{A}_n^2 f)(x,y) = \frac{4}{n^2\pi^2}\sum_{k_1=1}^{n-1}\sum_{k_2=1}^{n-1} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\frac{\sin\frac{n\pi}{2}(x-\frac{k_1}{n})}{x-\frac{k_1}{n}}\,\frac{\sin\frac{n\pi}{2}(y-\frac{k_2}{n})}{y-\frac{k_2}{n}}\ . \tag{12}$$

Hierbei ist $f \in C_0[0,1]^2$.
In der Arbeit wird gezeigt, daß das Lokalisierungsprinzip für die mehrdimensionale Shannonsche Abtastreihe nicht mehr gilt. Diese Tatsache ist in dem folgenden Satz enthalten.

Satz 3. *Es existiert eine auf dem Rechteck $[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]$ konzentrierte stetige Funktion g_2 mit einer stetigen Hilbert-Transformierten $\tilde{g}_2$ derart, daß für die konjugierte Shannonsche Abtastreihe die Beziehung*

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\,(\tilde{A}_n^2 g_2)(x,y)\,\right| = \infty \tag{13}$$

für fast alle $(x,y) \in [0,1]\times[\frac{1}{2},1]$ gilt.

Die Arbeit ist während eines Arbeitsaufenthalts an der RWTH-Aachen entstanden. Der Verfasser dankt Herrn Professor P.L. Butzer für die Diskussionen zu dieser Arbeit.

2. Shannonsche Abtastreihe

In diesem Abschnitt werden die Sätze 1 und 2 bewiesen.
Beweis.(Satz 1) Es sei $l > 4$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir konstruieren eine stetige Funktion f_l mit einem Träger im Rechteck $[0,1] \times [0, \frac{1}{4}]$. Dazu sei k_l die größte natürliche Zahl mit $k_l < \frac{l}{4}$. Wir definieren die gesuchte Funktion f_l als erstes für die Punktmenge $(\frac{k_1}{2l+1}, \frac{k_2}{2l+1})$. Dazu setzen wir

$$f_l\Big(\frac{k_1}{2l+1}, \frac{k_2}{2l+1}\Big) = \begin{cases} (-1)^{k_1+k_2} & 0 < k_1 \le l \text{ und } 0 < k_2 \le k_l \\ (-1)^{k_1+k_2+1} & l < k_1 \le 2l \text{ und } 0 < k_2 \le k_l \\ 0 & k_2 > k_l \ . \end{cases}$$

Es sei weiterhin $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, mit einem Träger im Quadrat $[-1,1]^2$ und $q(0,0) = 1$. Wir können nun stets eine positive reelle Zahl η_l finden, so daß mit $q_{\eta_l}(x,y) = q(\frac{x}{\eta_l}, \frac{y}{\eta_l})$ die Funktion

$$f_l(x,y) = \sum_{k_1=1}^{2l} \sum_{k_2=1}^{k_l} f_l\Big(\frac{k_1}{2l+1}, \frac{k_2}{2l+1}\Big) q_{\eta_l}\Big(x - \frac{k_1}{2l+1}, y - \frac{k_2}{2l+1}\Big)$$

einen Träger im Rechteck $[0,1] \times [0, \frac{1}{4}]$ hat und auf der diskreten Punktmenge die vorgeschriebenen Werte annimmt. Wir wollen nun das Verhalten der Shannonschen Abtastreihe im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ untersuchen. Es ist

$$\begin{aligned} \Big|(A^2_{2l+1} f_l)\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\Big| &= \frac{1}{(2l+1)^2\pi^2} \Big| \sum_{k_1=1}^{2l} \sum_{k_2=1}^{k_l} f_l\Big(\frac{k_1}{2l+1}, \frac{k_2}{2l+1}\Big) \frac{(-1)^{k_1}}{\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2l+1}} \frac{(-1)^{k_2}}{\frac{1}{2} - \frac{k_2}{2l+1}} \Big| \\ &= \frac{1}{\pi^2}\Big(\frac{1}{2l+1} \sum_{k_1=1}^{l} \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2l+1}} + \frac{1}{2l+1} \sum_{k_1=l+1}^{2l} \frac{1}{\frac{k_1}{2l+1} - \frac{1}{2}} \Big) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{2l+1} \sum_{k_2=1}^{k_l} \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{k_2}{2l+1}} \ . \end{aligned}$$

Wir wollen nun die einzelnen Faktoren der rechten Seite untersuchen. Für den ersten erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l+1} \sum_{k_1=1}^{l} \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{k_1}{2l+1}} &= 2 \sum_{k_1=1}^{l} \frac{1}{2l+1-2k_1} = 2 \sum_{k_1=0}^{l-1} \frac{1}{2k_1+1} \\ &> 2 \int_0^l \frac{1}{1+2x}\, dx = \ln(2l+1) \ . \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\frac{1}{2l+1}\sum_{k_1=l+1}^{2l}\frac{1}{\frac{k_1}{2l+1}-\frac{1}{2}} > \ln(2l+1)\ .$$

Wir wollen nun den zweiten Faktor untersuchen. Hier gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2l+1}\sum_{k_2=1}^{k_l}\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{k_2}{2l+1}} &> \int\limits_0^{\frac{k_l}{2l+1}}\frac{1}{\frac{1}{2}-x}\,dx\\ &> \int\limits_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\frac{1}{2}-x}\,dx = \ln 3\ .\end{aligned}$$

Bei der Rechnung haben wir

$$\frac{1}{2l+1}\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{k}{2l+1}} > \int\limits_{\frac{k-1}{2l+1}}^{\frac{k}{2l+1}}\frac{1}{\frac{1}{2}-x}\,dx$$

für $k \geq 1$ beachtet. Dies ergibt für die Abtastreihe

$$\left|(A^2_{2l+1}f_l)\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\right| > \frac{2\ln 3}{\pi^2}\ln(2l+1)\ . \tag{14}$$

Wir wollen nun die gesuchte Funktion g_1 konstruieren.
Dazu konstruieren wir als erstes eine Folge natürlicher Zahlen. Es sei $l_0 = 5$. Angenommen wir haben die Zahlen $l_1 < \ldots < l_m$ bereits definiert, dann sei l_{m+1} die kleinste natürliche Zahl für die die folgenden Forderungen erfüllt sind.
i) $\ln(l_{m+1}) > 2(\ln(l_m))^4$
ii) Für die durch

$$h_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f_{l_k}(x,y)}{\sqrt{\ln l_k}}$$

definierte Funktion gilt für alle $n \geq l_{m+1}$

$$|(A^2_n h_m)(x,y)| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{\ln 5}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\ .$$

Eine solche Wahl der Folge ist immer möglich. Dies sieht man wie folgt ein. Die Funktion h_m ist unendlich oft differenzierbar mit einem Träger im Quadrat $[0,1]^2$.

Damit konvergiert die Folge der Shannonschen Abtastreihen gleichmäßig gegen die Funktion h_m [3]. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} |h_m(x,y)| &\leq \sum_{k=0}^{m} \frac{|f_{l_k}(x,y)|}{\sqrt{\ln l_k}} \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\sqrt{\ln l_k}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\ln 5}} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(\sqrt{2})^k} < \frac{1}{\sqrt{\ln 5}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} . \end{aligned}$$

Wir definieren nun die gesuchte Funktion g_1 durch

$$g_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{l_k}(x,y)}{\sqrt{\ln l_k}} . \tag{15}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (6) ist g_1 eine stetige Funktion mit dem Träger im Rechteck $[0,1]\times[0,\frac{1}{4}]$. Wir wollen nun die Abtastreihe der Funktion g_1 untersuchen. Es ist

$$\left(A_{l_m}^2 g_1\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(A_{l_m}^2 h_{m-1}\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(A_{l_m}^2 f_{l_m}\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\ln l_m}} + \left(A_{l_m}^2 R_m\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) . \tag{16}$$

Die Funktion R_m ist durch

$$R_m(x,y) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{f_{l_k}(x,y)}{\sqrt{\ln l_k}} \tag{17}$$

definiert. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left|\left(A_{l_m}^2 R_m\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| &\leq \pi^2(\ln l_m)^2 \|R_m\|_{C_0[0,1]^2} \\ &\leq \pi^2(\ln l_m)^2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln l_k}} \\ &\leq \pi^2 \frac{(\ln l_m)^2}{\sqrt{\ln l_{m+1}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^k} < \pi^2 \frac{1}{2-\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, daß für alle $f \in C_0[0,1]^2$ die Beziehung

$$|(A_n^2 f)(x,y)| \leq \pi^2(\ln n)^2 \|f\|_{C_0[0,1]^2}$$

gilt [3]. Dies ergibt mit der Forderung (ii)

$$\left|\left(A_{l_m}^2 g_1\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| \geq \frac{2\ln 3}{\pi^2}\sqrt{\ln l_m} - \frac{\pi^2}{2-\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln 5}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} . \tag{18}$$

Da diese Beziehung für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir

$$\lim_{m\to\infty} \left|\left(A_{l_m}^2 g_1\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = \infty \,. \tag{19}$$

■

Beweis.(Satz 2) Es sei also $f(x,y) = 0$ für $(x,y) \in A_\delta(x_0,y_0)$. Wir betrachten im weiteren natürliche Zahlen n mit $n > (2\delta)^{-1}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
|(A_n^2 f)(x_0,y_0)| &\le \frac{1}{n^2\pi^2}\sum_{k_1=1}^{n-1}\sum_{k_2=1}^{n-1}\left|f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\right|\cdot\left|\frac{\sin n\pi(x_0-\frac{k_1}{n})}{x_0-\frac{k_1}{n}}\right|\cdot\left|\frac{\sin n\pi(y_0-\frac{k_2}{n})}{y_0-\frac{k_2}{n}}\right| \\
&\le \|f\|_{C_0[0,1]^2}\frac{1}{n^2\pi^2}\sum_{\substack{k_1=1;\\ |y_0-\frac{k_2}{n}|\ge\delta}}^{n-1}\ \sum_{\substack{k_2=1;\\ |y_0-\frac{k_2}{n}|\ge\delta}}^{n-1}\frac{1}{|x_0-\frac{k_1}{n}|}\frac{1}{|y_0-\frac{k_2}{n}|} \\
&\le \frac{1}{\pi^2\delta^2}\|f\|_{C_0[0,1]^2}\,.
\end{aligned}$$

Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Es existiert eine Funktion $\phi \in C_0^\infty[0,1]^2$ mit $\|f-\phi\|_{C_0[0,1]^2} < \epsilon$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
|(A_n f)(x_0,y_0)| &\le |(A_n(f-\phi))(x_0,y_0)| + |(A_n\phi)(x_0,y_0)| \\
&\le \frac{1}{\pi^2\delta^2}\|f-\phi\|_{C_0[0,1]^2} + |(A_n\phi)(x_0,y_0)| < \frac{1}{\pi^2\delta^2}\epsilon + |(A_n\phi)(x_0,y_0)|.
\end{aligned}$$

Nun ist $|\phi(x_0,y_0)| < \epsilon$. Da die Funktion ϕ unendlich oft differenzierbar ist, konvergiert die Shannonsche Abtastreihe gleichmäßig gegen die Funktion ϕ. Es existiert also eine natürliche Zahl n_0 mit

$$|\phi(x_0,y_0) - (A_n\phi)(x_0,y_0)| < \epsilon$$

für alle $n > n_0$. Damit haben wir für alle $n > n_0$

$$(A_n\phi)(x_0,y_0)| < \frac{1}{\pi^2\delta^2}\epsilon + 2\epsilon. \tag{20}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, haben wir den Satz 2 bewiesen.

■

3. Konjugierte Shannonsche Abtastreihe

In diesem Abschnitt wird der Satz 3 bewiesen. Für den Beweis des Satzes 3 wird das fogende Resultat aus [1] benötigt.

Satz 4. *Es existiert eine auf dem Intervall* $[0,1]$ *konzentrierte stetige Funktion* q_1 *mit einer stetigen Hilbert-Transformierten* $\tilde{q}_1$ *derart, daß für fast alle* $t \in (0,1)$ *die Beziehung*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} q_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\sin \frac{n\pi}{2}(t-\frac{k}{n})}{t-\frac{k}{n}} \right| = \infty \tag{21}$$

gilt.

Als nächstes wird der Satz 3 bewiesen.
Beweis.(Satz 3)

Es sei $\phi \in C_0^\infty[0,\frac{1}{2}]$ eine Funktion mit $\phi(t) > 0$ für $t \in (0,\frac{1}{2})$ und $\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \phi(t)\,dt = 1$. Mit der im Satz 4 angegeben Funktion q_1 wird die Funktion

$$g_2(x,y) = q_1(x) \cdot \phi(y) \tag{22}$$

betrachtet. Da die Funktion ϕ unendlich oft differenzierbar ist, muß die Hilbert-Transformierte $\tilde{\phi}$ ebenfalls unendlich oft differenzierbar sein. Weiterhin hat man

$$\tilde{g}_2(x,y) = \tilde{q}_1(x) \cdot \tilde{\phi}(y)\ . \tag{23}$$

Damit ist die Hilbert-Transformierte $\tilde{g}_2$ stetig. Da die Funktion unendlich oft differenzierbar ist, konvergiert die konjugierte Shannonsche Abtastreihe gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Hilbert-Transformierte $\tilde{\phi}$, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $n_0 = n_0(\epsilon)$ mit

$$\left| \tilde{\phi}(t) - \frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \phi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\sin \frac{n\pi}{2}(t-\frac{k}{n})}{t-\frac{k}{n}} \right| < \epsilon \tag{24}$$

für alle $n \geq n_0$. Für $\frac{1}{2} < y < 1$ gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(y_1)}{y-y_1}\,dy_1 > \frac{1}{y\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} f(y_1)\,dy_1 \\ &> \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} f(y_1)\,dy_1 = 1\ . \end{aligned} \tag{25}$$

Damit existiert eine Zahl n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $\frac{1}{2} < y < 1$ die Beziehung

$$\frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \phi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\sin \frac{n\pi}{2}(t - \frac{k}{n})}{t - \frac{k}{n}} > \frac{1}{2} \tag{26}$$

gilt. Es sei E_1 die Menge aller $x \in (0,1)$, für welche die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} q_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\sin \frac{n\pi}{2}(x - \frac{k}{n})}{x - \frac{k}{n}} \right| = \infty \tag{27}$$

gilt. Mit dem Satz 4 hat man $\mu_1(E_1) = 1$. Hierbei bezeichnet μ_1 das eindimensionale Lebesguesche Maß. Es wird nun die Menge $E_* = E_1 \times (\frac{1}{2}, 1)$ betrachtet. Es gilt für das zweidimensionale Lebesguesche Maß μ_2 der Menge E_* die Beziehung $\mu_2(E_*) = \mu_1(E_1) \cdot \mu_1(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$. Damit gehören fast alle Punkte $(x,y) \in (0,1) \times (\frac{1}{2}, 1)$ zur Menge E_*. Nun gilt aber ebenfalls für alle $(x,y) \in E_*$ die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty} \left| (\tilde{A}_n^2 g_2)(x,y) \right| \geq \frac{1}{n\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} q_1\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\sin \frac{n\pi}{2}(x - \frac{k}{n})}{x - \frac{k}{n}} \right| = \infty\ . \tag{28}$$

Damit wurde der Satz 3 bewiesen.

■

Literatur

[1] H. Boche, *Konvergenzverhalten der konjugierten Shannonschen Abtastreihe*, accepted in Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis

[2] P. Butzer, *Persönliche Mitteilung*, RWTH-Aachen, 1995,

[3] P. Butzer, W. Splettstößer, R. Stens, *The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis*, Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung 90, (1988), S. 1 - 70

[4] P. Butzer, R. Stens, *Sampling Theory for not necessarily band-limited Functions*, SIAM Review, March 1992, Vol. 34, No. 1

[5] P. Butzer, *A survey of Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions*, J. Math. Res. Exposition, 3 (1983), p. 185-212.

[6] D.P. Dryanow, *Equiconvergence and equiapproximation for Entire Functions*, Constructive Theory of Functions, Varna 91, Sofia 1992, p. 123-136

[7] D.P. Dryanow, *On the convergence and saturation problem of a sequence of discrete linear Operators of exponential type in $L_p(-\infty,\infty)$ Spaces*, Acta Math. Hung. 49 (1-2) (1987), p. 103-127

[8] A. Jerri, *The Shannon sampling theorem - its varios extensions and applications: a tutorial review*, Proc. IEEE 65 (1977), 1565-1596

[9] R. J. Marks, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Sringer Texts in Electrical Engineering, Springer Verlag New York, 1991

[10] R. J. Marks ed, *Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*, Sringer Texts in Electrical Engineering, Springer Verlag New York, 1993

[11] S. Ries and R.L. Stens, *A Localization Principle for the Approximation by Sampling Series*, in Proc. Intern. Conf. Theory of Approximation of Functions, Izdat. Nauka, Moscow, 1987, pp. 507-509

[12] R. L. Stens, *Approximation to Duration-Limited Functions by Sampling Sums*, Signal Processing 2 (1980), pp. 173-176

[13] R. L. Stens, *A Unified Approach to Sampling Theorems for Derivatives and Hilbert Transforms*, Signal Processing 5 (1983), pp. 139-151

[14] R. L. Stens, *Approximation of Functions by Whittaker's Cardinal Series*, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 71, 1984, pp. 137-149

[15] R. L. Stens, *Persönliche Mitteilung*, RWTH-Aachen, 1995

Address:
Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik Berlin GmbH
Broadband Mobile Communication Networks
Einsteinufer 37, D-10587 Berlin
Germany
und
ETH-Zurich, Communication Technology Laboratory
ETH-Zentrum, Sternwartstrasse 7
CH-8092 Zurich
Switzerland