Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

František Machala

Konzepte in den triadischen Kontext

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 36 (1997), No. 1, (141)--147

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120360

Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Mathematica **36** (1997) 141–147

Konzepte in den triadischen Kontext *

FRANTIŠEK MACHALA

*Department of Algebra and Geometry, Faculty of Science,
Palacký University, Tomkova 40, 779 00 Olomouc, Czech Republic
e-mail: machala@risc.upol.cz*

(Vorgelegt am 30. August 1996)

Abstract

R. Wille defined the triadic contexts. In this paper, an "alternative" theory of concepts in the triadic contexts is developped so thet the appropriate triples of sets are defined by means of appropriate non-empty sets using inner tools of the theory.

Key words: Context, concept, triadic context.

1991 Mathematics Subject Classification: 08A02, 06A15

In [2] definierte R. Wille triadische Kontexte als die Verallgemeinerung der (diadischen) Kontexte aus [1]. In der Theorie der triadischen Kontexte werden spezielle geordnete Tripel der Mengen, sog. Konzepte studiert,wobei die Benutzung der leeren Menge nicht ausgeschlossen ist. Stillschweigend wird dabei die eingeführten Konventionen verwendet.

In der vorgelegten Note werden zulässige Tripel der nichleeren Mengen im gegebenen triadischen Kontext definiert. Durch diese Tripel sind dann solche zulässige Tripel bestimmt, in denen auch die leere Menge vorgekommen wird. Es zeigt sich, daß dieses Verfahren zu der gleichen Theorie der Konzepte führt, wie in [1].

Definition 1. Ein triadischer Kontext ist ein Quadrupel $K = (K_1, K_2, K_3, Y)$, wo K_1, K_2, K_3 Mengen und $Y \subseteq K_1 \times K_2 \times K_3$ eine Ternärrelation sind.

Bemerkung 1. Wegen der Vereinfachung unserer Betrachtungen wird ferner vorausgesetzt, daß die Mengen K_1, K_2, K_3 nichtleer sind.

*Supported by grant No 201/95/1631 of The Grant Agency of Czech Republic.

Definition 2. Nichtleere Teilmengen $X_i \subseteq K_i$, $i \in \{1,2,3\}$, sind zulässig (im Hinblick auf Y) genau dann, wenn $(x_1, x_2, x_3) \in Y$ für alle $x_i \in X_i$ gilt. Sind X_i zulässig, dann schreibt man $(X_1, X_2, X_3)_Y$, im umgekehrten Fall $(X_1, X_2, X_3)_{\neg Y}$.

Bemerkung 2. Zu den nichtleeren Mengen $X_i \subseteq K_i, X_j \subseteq K_j$ läßt sich nicht stets eine nichleere Menge X_k mit $(X_1, X_2, X_3)_Y$ bestimmen. Es ist daher notwendig, die Definition 2 über die leere Menge zu erweitern. Im Folgenden werden zwei Möglichkeiten gezeigt.

Definition 3. Mengen $X_i \subseteq K_i$, $i \in \{1,2,3\}$, heißen 1-zulässig ($(X_1, X_2, X_3)_1$), wenn gilt:

a) Sind alle Mengen X_i nichtleer, dann $(X_1, X_2, X_3)_1 \Leftrightarrow (X_1, X_2, X_3)_Y$.

b) Ist mindestens eine der Mengen X_i leer, dann gilt stets $(X_1, X_2, X_3)_1$.

Definition 4. Mengen $X_i \subseteq K_i$, $i \in \{1,2,3\}$, heißen 2-zulässig ($(X_1, X_2, X_3)_2$), wenn gilt:

a) Sind alle Mengen X_i nichtleer, dann $(X_1, X_2, X_3)_2 \Leftrightarrow (X_1, X_2, X_3)_Y$.

b) Sind X_1, X_2 nichtleer und $X_3 = \emptyset$, dann gilt $(X_1, X_2, \emptyset)_2$ genau dann, wenn $(X_1, X_2, A)_{\neg Y}$ für alle nichtleeren Mengen $A \subseteq K_3$ ist. Ähnlicherweise definieren wir $(X_1, \emptyset, X_3)_2, (\emptyset, X_2, X_3)_2$ für nichleere Mengen X_i.

c) Sind X_1 nichtleer und $X_2 = X_3 = \emptyset$, dann gilt $(X_1, \emptyset, \emptyset)_2$ genau dann, wenn $(X_1, M, N)_{\neg Y}$ für alle nichtleeren Mengen $M \subseteq K_2$, $N \subseteq K_3$ ist. Ähnlicherweise definieren wir $(\emptyset, X_2, \emptyset)_2$, $(\emptyset, \emptyset, X_3)_2$ für nichleere Mengen X_2, X_3.

d) Es gilt $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)_2$.

Bemerkung 3. Es gilt $(X_1, X_2, X_3)_2 \Rightarrow (X_1, X_2, X_3)_1$, aber die umgekehrte Implikation gilt im Allgemeinen nicht. Für nichleere Mengen $X_i \subseteq K_i$ ergibt sich

$$(X_1, X_2, X_3)_Y \Leftrightarrow (X_1, X_2, X_3)_1 \Leftrightarrow (X_1, X_2, X_3)_2.$$

Bemerkung 4. Für eine nichleere Menge $X_3 \subseteq K_3$ gilt $(\emptyset, \emptyset, X_3)_2$ genau dann, wenn $(\emptyset, B, X_3)_2$ bzw. $(A, \emptyset, X_3)_2$ für alle nichleeren Mengen $A \subseteq K_1$ bzw. $B \subseteq K_2$ erfüllt ist. Dies gilt auch für Mengen $X_1 \subseteq K_1, X_2 \subseteq K_2$. Wenn $X_i \subseteq K_i, i \in \{1,2,3\}$ nicht 1-zulässig bzw. 2-zulässig sind, so schreibt man $(X_1, X_2, X_3)_{\neg 1}$ bzw. $(X_1, X_2, X_3)_{\neg 2}$.

Satz 1. *Es seien $X_i, X_i' \subseteq K_i$ Mengen mit $X_i' \subseteq X_i$ für alle $i \in \{1,2,3\}$.*

1. Sind alle Mengen X_i' nichtleer, dann $(X_1, X_2, X_3)_Y \Rightarrow (X_1', X_2', X_3')_Y$.

2. Ist mindestens eine der Mengen X_i' leer, wobei $X_k = \emptyset \Leftrightarrow X_k' = \emptyset$, dann $(X_1', X_2', X_3')_j \Rightarrow (X_1, X_2, X_3)_j$ für $j \in \{1,2\}$.

Beweis. 1. Gilt $(X_1, X_2, X_3)_Y$, dann aus $x_i' \in X_i'$ folgt $x_i \in X_i$ und $(x_1', x_2', x_3') \in Y$, was $(X_1', X_2', X_3')_Y$ bedeutet.

2. Für $j = 1$ ist unsere Behauptung offensichtlich. Nehmen wir $(\emptyset, X_2', X_3')_2$ an, wo X_2', X_3' nichtleer sind. Unserer Voraussetzung nach ist dann $X_2 \neq \emptyset, X_3 \neq \emptyset$. Gilt $(M, X_2, X_3)_Y$ für eine nichtleere Menge $M \subseteq K_1$, dann aus dem Fall 1 folgt $(M, X_2', X_3')_Y$, was aber ein Wiederspruch zu $(\emptyset, X_2', X_3')$ ist. Deshalb gilt $(\emptyset, X_2, X_3)_2$. Ähnlicherweise verfährt man in den übrigen Fällen.

Satz 2. *Für $X_1 \subseteq K_1, X_2 \subseteq K_2$ sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(1) Es gilt $(X_1, X_2, X_3)_{\neg 2}$ für alle Mengen $X_3 \subseteq K_3$.

(2) Genau eine der Mengen X_1, X_2 ist leer. Gilt $X_1 = \emptyset, X_2 \neq \emptyset$, so gibt es eine nichleere Menge $B_1 \subseteq K_1$ mit $(B_1, X_2, X_3)_Y$. Gilt $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 = \emptyset$, so gibt es eine nichleere Menge $B_2 \subseteq K_2$ mit $(X_1, B_2, K_3)_Y$.

Beweis. (1)⇒(2). Es sei $(X_1, X_2, X_3)_{\neg 2}$ für alle $X_3 \subseteq K_3$. Zuerst nehmen wir an, daß die Mengen X_1, X_2 nichtleer sind. Unserer Voraussetzung nach gilt $(X_1, X_2, X_3)_{\neg Y}$ für beliebige nichleere Menge $X_3 \subseteq K_3$, woraus $(X_1, X_2, \emptyset)_2$ folgt, was aber ein Wiederspruch ist. Ähnlicherweise gilt $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)_2$ auch im Fall $X_1 = X_2 = \emptyset$.

Nehmen wir also $X_1 = \emptyset$ und $X_2 \neq \emptyset$ an. Dann ist $(\emptyset, X_2, X_3)_{\neg 2}$ und es gibt eine nichtleere Menge $B_1 \subseteq K_1$ mit $(B_1, X_2, X_3)_Y$. Ganz ähnlich verfährt man im Fall $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 = \emptyset$.

(2)⇒(1) Nehmen wir an,daß $X_1 = \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$ und $(B_1, X_2, K_3)_Y$ mit $B_1 \neq \emptyset$ gilt. Dann ist $(\emptyset, X_2, \emptyset)_{\neg 2}$. Für beliebige nichtleere Menge $X_3 \subseteq K_3$ gilt nach Satz 1 $(B_1, X_2, K_3)_Y \Rightarrow (B_1, X_2, X_3)_Y$, woraus $(\emptyset, X_2, X_3)$ $_{\neg 2}$ folgt.

Definition 5. Ein Kontext K heißt 3-vollständig, wenn es nichtleere Mengen $M \subseteq K_1, N \subseteq K_2$ mit $(M, N, K_3)_Y$ gibt. Ähnlicherweise wird ein 1-vollständiger bzw. 2-vollständiger Kontext definiert. Ein Kontext ist vollständig, wenn er i-vollständig für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ ist.

Bemerkung 5. Ein Kontext K ist 3-vollständig genau dann, wenn es Teilmengen $X_1 \subseteq K_1, X_2 \subseteq K_2$ gibt, die die Bedingung (1) des Satzes 2 erfüllen.

Definition 6. Für beliebige Mengen $X_1 \subseteq K_1, X_2 \subseteq K_2$ setzen wir $A_3 = [X_1, X_2]_j$ für $j \in \{1, 2\}$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es gilt $(X_1, X_2, A_3)_j$ und für beliebige Menge $M \subseteq K_3$ aus $(X_1, X_2, M)_j$ folgt $M \subseteq A_3$.

2. Gilt $(X_1, X_2, M)_{\neg 2}$ für jede Menge $M \subseteq K_3$, dann $A_3 = [X_1, X_2]_2 = K_3$.

Ganz ähnlich wird $A_2 = [X_1, X_3]_j$ und $A_1 = [X_2, X_3]_j$ definiert.

Satz 3. *Für beliebige Mengen $X_1 \subseteq K_1, X_2 \subseteq K_2$ gibt es genau eine Menge $A_3 = [X_1, X_2]_j$, $j \in \{1, 2\}$. Ist K 3-vollständig und gilt $X_1 = X_2 = \emptyset$, dann $[X_1, X_2]_2 = \emptyset$ und $[X_1, X_2]_1 = K_3$. In allen übrigen Fällen gilt $[X_1, X_2]_1 = [X_1, X_2]_2$. Ist dabei mindestens eine der Mengen X_1, X_2 leer, dann $[X_1, X_2]_1 = [X_1, X_2]_2 = K_3$.*

Beweis. a) Es seien X_1, X_2 nichtleer. Nehmen wir zuerst an, daß es eine nichtleere Menge $X_3 \subseteq K_3$ mit $(X_1, X_2, X_3)_Y$ gibt. Setzen wir $A_3 = \{x_3 \in K_3 \mid (X_1, X_2, \{x_3\})_Y\}$, dann $A_3 = [X_1, X_2]_1 = [X_1, X_2]_2$. Gilt $(X_1, X_2, X_3)_{\neg Y}$ für alle nichleeren Mengen $X_3 \subseteq K_3$, dann gilt $(X_1, X_2, \emptyset)_1$, $(X_1, X_2, \emptyset)_2$ und folglich $[X_1, X_2]_1 = [X_1, X_2]_2 = \emptyset$.

b) Wir setzen voraus, daß genau eine der Mengen X_1, X_2 leer ist. Es sei z.B. $X_1 = \emptyset$. Gibt es eine nichtleere Menge $X_3 \subseteq K_3$ mit $(\emptyset, X_2, X_3)_2$, dann gilt nach Satz 1 $(\emptyset, X_2, K_3)_2$, woraus sich $[X_1, X_2]_2 = K_3$ ergibt. Aus $(\emptyset, X_2, \emptyset)_2$ folgt nach Bemerkung 4 $(\emptyset, X_2, K_3)_2$, was $[X_1, X_2]_2 = K_3$ bedeutet. Gilt $(\emptyset, X_2, X_3)_{\neg 2}$ für alle Mengen $X_3 \subseteq K_3$, dann ist $K_3 = [X_1, X_2]_2$ geradeaus nach Definition 6.

c) Es seien beide Mengen X_1, X_2 leer. Dann gilt $(\emptyset, \emptyset, K_3)_1$ und folglich $K_3 = [X_1, X_2]_1$. Ist der Kontext K 3-vollständig, so gibt es nichtleere Mengen $M \subseteq K_1, N \subseteq K_2$ mit $(M, N, K_3)_Y$. Für beliebige nichtleere Menge $X_3 \subseteq K_3$ erhält man nach Satz 1 $(M, N, X_3)_Y$ und folglich $(\emptyset, \emptyset, X_3)_{\neg 2}$. Wegen $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)_2$ gilt also $\emptyset = [X_1, X_2]_2$. Ist K nicht 3-vollständig, dann gilt $(\emptyset, \emptyset, K_3)_2$, weil $(M, N, K_3)_{\neg 2}$ für beliebige nichtleere Mengen $M \subseteq K_1$, $N \subseteq K_2$ ist. Daraus ergibt sich $K_3 = [X_1, X_2]_2$.

Bemerkung 6. Durch die Vertauschung der Indizes in den Sätzen 2, 3 erhält man die entsprechenden Behauptungen auch für die Mengen $X_1 \subseteq K_1$, $X_3 \subseteq K_3$ bzw. $X_2 \subseteq K_2$, $X_3 \subseteq K_3$.

Verabredung. Gilt $[X_i, X_j]_1 = [X_i, X_j]_2 = A_k$ für $X_i \subseteq K_i$, $X_j \subseteq K_j$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, so setzen wir $A_k = [X_i, X_j]$.

Satz 4. *Es seien $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ verschiedene Indizes mit $i < j$ und seien $A_i, B_i \subseteq K_i$, $A_j, B_j \subseteq K_j$ Mengen mit $B_i \subseteq A_i$, $B_j \subseteq A_j$. Ist $B_k = [B_i, B_j]$ erfüllt, dann gilt $A_k = [A_i, A_j]$ und $A_k \subseteq B_k$.*

Beweis. Wegen der Bestimmtheit setzen wir $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Es sei $B_3 = [B_1, B_2]$ und nehmen wir dabei $[A_1, A_2]_1 \neq [A_1, A_2]_2$ an. Nach Satz 3 gilt dann $A_1 = A_2 = \emptyset$ und K ist 3-vollständig. Aus $B_1 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq A_2$ folgt $B_1 = B_2 = \emptyset$ und wieder nach Satz 3 erhält man $[B_1, B_2]_1 \neq [B_1, B_2]_2$, was ein Wiederspruch ist. Somit gilt $A_3 = [A_1, A_2]$.

Nehmen wir an, daß die Mengen B_1, B_2 nichtleer sind. Dann sind auch A_1, A_2 nichtleer. Ist dabei A_3 leer, so $A_3 \subseteq B_3$. Es sei also A_3 nichtleer. Wegen $A_3 = [A_1, A_2]$ gilt $(A_1, A_2, A_3)_Y$. Ist B_3 leer, dann aus $[B_1, B_2]_2 = \emptyset$ folgt $(B_1, B_2, \emptyset)_2$. Nach Satz 1 ergibt sich daraus $(A_1, A_2, \emptyset)_2$, was ein Wiederspruch zu $(A_1, A_2, A_3)_Y$ ist. Deshalb ist B_3 nichtleer und nach Satz 1 gilt $(A_1, A_2, A_3)_Y \Rightarrow (B_1, B_2, A_3)_Y$, woraus man aus $B_3 = [B_1, B_2]$ die Inklusion $A_3 \subseteq B_3$ enthält.

Ist mindestens eine der Mengen B_1, B_2 leer, so gilt nach Satz 3 $B_3 = K_3$ und damit $A_3 \subseteq B_3$.

Bemerkung 7. Es sei der Kontext K 3-vollständig und seien A_1, B_1, A_2, B_2 die Mengen aus dem Satz 4,wobei B_1, B_2 leer sind. Dann gilt $B_3^1 = [B_1, B_2]_1 = K_3$

und $B_3^2 = [B_1, B_2]_2 = \emptyset$. Setzen wir $A_3^1 = [A_1, A_2]_1$, $A_3^2 = [A_1, A_2]_2$, so gilt $A_3^1 \subseteq B_3^1$, aber $B_3^2 \subseteq A_3^2$.

Definition 7. Ein Tripel $(A_1, A_2, A_3) \subseteq K_1 \times K_2 \times K_3$ heißt ein i-Konzept für $i \in \{1, 2\}$, wenn $A_1 = [A_2, A_3]_i$, $A_2 = [A_1, A_3]_i$, $A_3 = [A_1, A_2]_i$ gilt. Die Tatsache, daß das Tripel (A_1, A_2, A_3) einen i-Konzept bildet, wird mit dem Symbol $[A_1, A_2, A_3]_i$ bezeichnet. Gilt $[A_1, A_2, A_3]_1 = [A_1, A_2, A_3]_2$, dann ist das Tripel (A_1, A_2, A_3) ein Konzept, was man mit $[A_1, A_2, A_3]$ bezeichnet.

Bemerkung 8. Aus dem Satz 3 erhält man folgende Behauptungen: Es sei $(A_1, A_2, A_3) \subseteq K_1 \times K_2 \times K_3$. Gilt $(A_1, A_2, A_3) \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, dann $[A_1, A_2, A_3]_1 \Leftrightarrow [A_1, A_2, A_3]_2$. Ist dabei z.B. die Menge A_i leer, so gilt $A_j = K_j$, $A_k = K_k$, wo i, j, k die miteinander verschiedenen Indizes sind. Das Tripel $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ist ein 1-Konzept in keinem Kontext und $[\emptyset, \emptyset, \emptyset]_2$ gilt genau dann, wenn K vollständig ist. In einem Konzept kann die leere Menge nur in den Fällen $[\emptyset, K_2, K_3]$, $[K_1, \emptyset, K_3]$, $[K_1, K_2, \emptyset]$ vorkommen.

Folgende Behauptungen sind die unmittelbaren Folgerungen des Satzes 4.

Satz 5. *Sind* $[A_1, A_2, A_3]$, $[B_1, B_2, B_3]$ *Konzepte mit* $B_i \subseteq A_i$, $B_j \subseteq A_j$, *dann* $A_k \subseteq B_k$.

Satz 6. *Sind* $[A_1, A_2, A_3]$, $[B_1, B_2, B_3]$ *Konzepte mit* $B_i \subseteq A_i$ *für alle* $i \in \{1, 2, 3\}$, *dann* $[A_1, A_2, A_3] = [B_1, B_2, B_3]$.

Es sei $\tau(K)$ die Menge aller Konzepte von K. Für Mengen $X_i \subseteq K_i$, $X_j \subseteq K_j$ setzen wir $\mathbf{K}(X_i, X_j) = \{[M_1, M_2, M_3] \in \tau(K) \mid X_i \subseteq M_i,\ X_j \subseteq M_j\}$ und $b_k(X_i, X_j) = \{[A_1, A_2, A_3] \in \mathbf{K}(X_i, X_j) \mid [Q_1, Q_2, Q_3] \in \mathbf{K}(X_i, X_j) \Rightarrow Q_k \subseteq A_k\}$. Aus $[A_1, A_2, A_3]$, $[B_1, B_2, B_3] \in b_k(X_i, X_j)$ folgt offensichtlich $A_k = B_k$.

Es sei $[A_1, A_2, A_3]$ ein Konzept aus $b_k(X_i, X_j)$, für den aus $[Q_1, Q_2, Q_3] \in b_k(X_i, X_j)$ stets $Q_i \subseteq A_i$ folgt. Ist $[B_1, B_2, B_3]$ ein weiterer Konzept aus $b_k(X_i, X_j)$ dieser Eigenschaft, dann gilt $B_i = A_i$, $B_k = A_k$ und folglich $A_j = [A_i, A_k] = [B_i, B_k] = B_j$, und $[A_1, A_2, A_3] = [B_1, B_2, B_3]$. Es gibt daher höchstens einen Konzept beschriebener Eigenschaft, der man mit $b_{ik}(X_i, X_k)$ bezeichnet.

Im nächsten Satz wird bewiesen, daß für beliebige Mengen $X_i \subseteq K_i$, $X_j \subseteq K_j$ stets die Konzepte b_{ik}, b_{jk} existieren. Hier ist auch die Konstruktion solcher Konzepte beschrieben.

Satz 7. *Es seien Mengen* $X_i \subseteq K_i$, $X_j \subseteq K_j$ *gegeben.*

1. Es sei mindestens eine der Mengen X_i, X_j *nichtleer. Setzen wir* $A_k = [X_i, X_j] = B_k$, $A_i = [X_j, A_k]$, $A_j = [A_i, A_k]$, $B_j = [X_i, B_k]$, $B_i = [B_j, B_k]$, *dann gilt* $b_{ik}(X_i, X_j) = [A_1, A_2, A_3]$ *und* $b_{jk}(X_i, X_j) = [B_1, B_2, B_3]$.

2. Es seien die Mengen X_i, X_j leer. Setzen wir $A_k = K_k = B_k$, $A_i = K_i$, $A_j = [K_i, K_k]$, $B_j = K_j$ und $B_i = [K_j, K_k]$, dann gilt $b_{ik}(X_i, X_j) = [A_1, A_2, A_3]$ und $b_{jk}(X_i, X_j) = [B_1, B_2, B_3]$.

Beweis. Zunächst beweisen wir, daß die im Satz beschriebenen Tripel (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) die Konzepte mit $[A_1, A_2, A_3], [B_1, B_2, B_3] \in \mathbf{K}(X_i, X_j)$ bilden. Dabei setzen wir $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ voraus.

1. Es sei mindestens eine der Mengen X_1, X_2 nichtleer. In diesem Fall sollen wir die Gültigkeit von $A_1 = [A_2, A_3]$, $A_3 = [A_1, A_2]$, $B_2 = [B_1, A_3]$ und $X_1 \subseteq A_1, B_1$; $X_2 \subseteq A_2, B_2$ nachprüfen.

a) Es seien beide Mengen X_1, X_2 nichtleer.

α) Zuerst nehmen wir an, daß die Menge $A_3 = [X_1, X_2]$ nichtleer ist. Nach Definition 6 gilt dann $(X_1, X_2, A_3)_Y$ und wegen $A_1 = [X_2, A_3]$ erhalten wir daraus $X_1 \subseteq A_1$ und $A_1 \neq \emptyset$. Es gilt also $(A_1, X_2, A_3)_Y$, woraus wir wegen $A_2 = [A_1, A_3]$ wieder $X_2 \subseteq A_2, A_3 \neq \emptyset$ und folglich auch $(A_1, A_2, A_3)_Y$ erhalten. Dies hat zur Folge $A_3 \subseteq [A_1, A_2]$ und $A_1 \subseteq [A_2, A_3]$. Wegen $X_1 \subseteq A_1, X_2 \subseteq A_2$ und $A_3 \subseteq [X_1, X_2]$ gilt nach Satz 4 $[A_1, A_2] \subseteq [X_1, X_2]$ und nach dem Vorangehenden auch $A_3 = [A_1, A_2]$. Aus $X_2 \subseteq A_2$ folgt endlich $[A_1, A_3] \subseteq [X_2, A_3]$ und $A_1 = [A_2, A_3]$.

Ähnlicherweise lassen sich die übrigen Gleichheiten $B_2 = [X_1, A_3]$, $B_1 = [B_2, A_3]$ beweisen.

β) Es sei die Menge A_3 leer.Nach Satz 3 gilt $A_1 = [X_2, \emptyset] = K_1$, $A_2 = [K_1, \emptyset] = K_2$, $B_2 = [X_1, \emptyset] = K_2$ und $B_1 = [K_2, \emptyset] = K_1$, woraus unmittelbar $X_1 \subseteq A_1, B_1$ und $X_2 \subseteq A_2, B_2$ folgt. Wegen $\emptyset = [X_1, X_2]$ ist $(X_1, X_2, \emptyset)_i$ für $i \in \{1, 2\}$ und nach Satz 1 gilt auch $(K_1, K_2, \emptyset)_i$, was $\emptyset = [K_1, K_2] = [A_1, A_2] = [B_1, B_2] = A_3$ bedeutet. Endlich gilt $A_1 = K_1 = [K_2, \emptyset] = [A_2, A_3]$. Ähnlicherweise läßt sich auch $B_2 = K_2 = [K_1, \emptyset] = [B_1, B_3]$ beweisen. Somit ergibt sich $[A_1, A_2, A_3] = [K_1, K_2, \emptyset] = [B_1, B_2, B_3]$.

b) Nehmen wir an, daß genau eine der Mengen X_1, X_2 nichtleer ist; es sei z.B. $X_1 \neq \emptyset$.

α) Nach Satz 3 ist $A_3 = [X_1, \emptyset] = K_3$, $A_1 = [\emptyset, K_3] = K_1$ und $A_2 = [K_1, K_3]$. Ist A_2 leer, dann gilt $A_1 = [\emptyset, K_3] = [A_2, A_3]$ und zugleich $K_3 = [K_1, \emptyset] = [A_1, A_2]$. Daraus ergibt sich $[A_1, A_2, A_3] = [K_1, \emptyset, K_3]$. Ist A_2 nichtleer, dann gilt $(A_1, K_2, K_3)_Y$ und schrittweise auch $K_2 = [A_1, K_3] = [A_1, A_3]$, $K_3 = [A_1, K_2] = [A_1, A_2] = A_3$ und $[A_1, A_2, A_3] = [A_1, K_2, K_3]$. In beiden Fällen ergibt sich offenbar $X_1 \subseteq A_1$, $X_2 \subseteq A_2$.

β) Es gilt $B_2 = [X_1, A_3] = [X_1, K_3]$. Zuerst sei B_2 leer. In diesem Fall ist $B_1 = [B_2, A_3] = [\emptyset, K_3] = K_1$ und $A_3 = K_3 = [K_1, \emptyset] = [B_1, B_2]$. Aus $\emptyset = [X_1, K_3]$ folgt $(X_1, \emptyset, A_3)_i$ und nach Satz 1 ergibt sich daraus $(K_1, \emptyset, K_3)_i$ und $\emptyset = [K_1, K_3] = [B_1, B_3] = B_2$. Somit gilt $[B_1, B_2, A_3] = [K_1, \emptyset, K_3]$.

Es sei B_2 nichtleer. Dann ist $(X_1, B_2, K_3)_i$ und wegen $B_1 = [B_2, K_3]$ auch $(B_1, B_2, K_3)_i$. Daraus folgt $K_3 = [B_1, B_2]$ und $B_2 \subseteq [B_1, K_3]$. Gleichzeitig gilt nach Satz 4 $[B_1, K_3] \subseteq [X_1, K_3] = B_2$. Damit erhält man $B_2 = [B_1, K_3] = [B_1, A_3]$ und schließlich $[B_1, B_2, A_3] = [B_1, B_2, K_3]$.

2. Es seien beide Mengen X_1, X_2 leer. Setzen wir nach unserer Voraussetzung $A_1 = K_1$, $B_2 = K_2$, $A_3 = K_3 = B_3$, $A_2 = [K_1, K_3]$ und $B_1 = [K_2, K_3]$, dann

$A_2 = [A_1, A_3]$, $B_1 = [B_2, B_3]$. Für $A_2 = \emptyset$ gilt $A_3 = K_3 = [K_1, \emptyset] = [A_1, A_2]$ und $A_1 = K_1 = [\emptyset, K_3] = [A_2, A_3]$. Im Fall $A_2 \neq \emptyset$ ergibt sich $(K_1, A_2, K_3)_Y$ und daraus $A_3 = K_3 = [K_1, A_2] = [A_1, A_2]$, $A_1 = K_1 = [A_2, K_3] = [A_2, A_3]$. Ähnlicherweise läßt sich $[B_1, B_2, B_3]$ beweisen.

$[A_1, A_2, A_3]$, $[B_1, B_2, B_3]$ seien die im vorigen Teil beschriebenen Konzepte. Dann gilt $[A_1, A_2, A_3], [B_1, B_2, B_3] \in \mathbf{K}(X_1, X_2)$. Es sei $[Q_1, Q_2, Q_3]$ ein weiterer Konzept aus $\mathbf{K}(X_1, X_2)$. Ist mindestens eine der Mengen X_1, X_2 nichtleer, dann $Q_3 = [Q_1, Q_2] \subseteq [X_1, X_2] = A_3 = B_3$. Sind beide Mengen X_1, X_2 leer, dann $A_3 = K_3 = B_3$. Es gilt daher $[A_1, A_2, A_3], [B_1, B_2, B_3] \in \mathfrak{b}_3(X_1, X_2)$. Es sei nun $[Q_1, Q_2, Q_3]$ ein beliebiger Konzept aus $\mathfrak{b}_3(X_1, X_2)$. Ist mindestens eine der Mengen X_1, X_2 nichtleer, dann gilt $Q_1 = [Q_2, A_3] \subseteq [X_1, A_3] = A_1$ und $[A_1, A_2, A_3] = \mathfrak{b}_{13}(X_1, X_2)$. Ganz ähnlich ist auch $\mathfrak{b}_{23}(X_1, X_2) = [B_1, B_2, B_3]$. Sind X_1, X_2 leer, dann folgen die eingeführten Beziehungen aus den Gleichheiten $A_1 = K_1$ und $B_2 = K_2$.

Literatur

[1] Wille, R.: *Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts.* In: I. Rival (ed.). Ordered sets. Riedel, Dordrecht–Boston, 1982, 445–470.

[2] Wille, R.: *The basic theorem of triadic concept analysis.* Order **12**, 2 (1995), 149–158.