František Machala

Konstruktionen einiger endlicher modularer Inzidenzstrukturen

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 30 (1991), No. 1, 235--255

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120261

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1991 MATHEMATICA XXX VOL. 100

Katedra algebry a geometrie
přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Doc.RNDr.Jiří Rachůnek, CSc.

KONSTRUKTIONEN EINIGER ENDLICHER MODULARER INZIDENZSTRUKTUREN

FRANTIŠEK MACHALA

(Vorgelegt am 26.März, 1990)

Abstract: All modular incidence structures containing a point with three or four, respectively, incident lines and dual incidence structures are found here.

Key words: Ordered sets, modular ordered sets, finite incidence structures.

MS Classification: Primary 50A10, 50B99, Secondary 06A10

In [1] wurden modulare angeordnete Mengen als eine Verallgemeinerung modularer Verbände definiert. Jede Inzidenzstruktur kann als eine angeordnete Menge verstanden werden. Solche Inzidenzstruktur, die gleichzeitig eine modulare angeordnete Menge ist, wird modular gennant. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst einige Beispiele modularer Inzidenzstrukturen angeführt. Dann werden hier alle (eigentlichen) endlichen modularen Inzidenzstrukturen gefunden, die solche Punkte enthalten, durch die drei bzw. vier Geraden gehen. Es werden auch duale modulare Inzidenzstrukturen untersucht, in denen es solche Geraden gibt, die genau drei bzw. vier Punkte enthalten.

Eine <u>Inzidenzstruktur</u> $\mathcal{J}$ ist ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, wo $\mathcal{P}$ eine Punktmenge, $\mathcal{L}$ eine Geradenmenge und $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ eine Inzidenzrelation sind, wobei $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ gilt. Statt $(a,m) \in I$ schreibt man a I m, im Gegenteil a $\not{I}$ m. Es wird dabei die übliche geometrische Bezeichnung verwendet: Ein Punkt liegt auf einer Geraden, eine Gerade geht durch einen Punkt usw.

Eine Abbildung φ von Inzidenzstrukturen $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, $\mathcal{J}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ heißt <u>Isomorphismus</u>, wenn sie eine bijektive Abbildung der Menge $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ auf die Menge $\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}'$ ist mit $\varphi\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, $\varphi\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ und a I m $\Longleftrightarrow$ φa I$'$ φm für beliebige $a \in \mathcal{P}$, $m \in \mathcal{L}$. Ist ein Isomorphismus der Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ auf $\mathcal{J}'$, kurz $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$, dann gibt es eine inverse Abbildung $\varphi^{-1} : \mathcal{J}' \longrightarrow \mathcal{J}$, die ebenfalls ein Isomorphismus ist.

Eine Abbildung $\varkappa$ von Inzidenzstrukturen heißt <u>dual</u>, wenn sie eine bijektive Abbildung der Menge $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ auf die Menge $\mathcal{P}' \cup \mathcal{L}'$ ist mit $\varkappa\mathcal{P} = \mathcal{L}'$, $\varkappa\mathcal{L} = \mathcal{P}'$ und a I m $\Longleftrightarrow$ $\varkappa$m I$'$ $\varkappa$a für beliebige $a \in \mathcal{P}$, $m \in \mathcal{L}$. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ ist <u>selbstdual</u>, wenn es eine duale Abbildung von $\mathcal{J}$ auf sich gibt.

(1) Ist eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ selbstdual, dann ist selbstdual auch jede Inzidenzstruktur, die zu $\mathcal{J}$ isomorph ist: Es seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ Inzidenzstrukturen, $\varkappa : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ eine duale Abbildung und $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$ ein Isomorphismus. Dann ist $\varphi\varkappa\varphi^{-1} : \mathcal{J}' \longrightarrow \mathcal{J}'$ eine duale Abbildung.

(2) Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ ist selbstdual, wenn jede zu $\mathcal{J}$ duale Inzidenzstruktur zugleich zu $\mathcal{J}$ isomorph ist: Sind $\varkappa : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$, $\xi : \mathcal{J} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}'$ duale Abbildungen, dann ist $\xi\varkappa : \tilde{\mathcal{J}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}'$ ein Isomorphismus. Sind umgekehrt $\varkappa : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$ eine duale Abbildung und $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$ ein Isomorphismus, dann ist $\varphi^{-1}\varkappa : \tilde{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{J}$ eine duale Abbildung.

Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ heißt <u>endlich</u>, wenn $\mathcal{P}$ und $\mathcal{L}$ endliche Mengen sind. Ferner werden nur endliche modulare Inzidenzstrukturen untersucht. Diese Inzidenzstrukturen werden wir durch Inzidenztabellen darstellen. In der ersten Zeile schreiben wir alle Punkte, in der ersten Spalte alle Geraden ein und die Inzidenz bezeichnen wir mit Strich (siehe z.B. die Figur 1, wo a_4 I I m_2, a_5 $\not{I}$ m_4, usw.). Inzidenztabellen bezeichnen wir manchmal auch kurz mit dem Symbol (a_i, m_j), wo die Buchstaben a_i Punkte und m_j Geraden bedeuten. Die Indizes i,j laufen gewisse Indizesmengen $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ durch.

Es seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ Inzidenzstrukturen und (a_i, m_j), (b_k, n_l) zu ihnen gehörige Inzidenztabellen. Die Indizesmengen bezeichnen wir schrittweise mit $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$. Die Inzidenzstrukturen $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ sind genau dann isomorph, wenn es bijektive Abbildungen $\mathcal{T}: \mathcal{I} \to \mathcal{K}$, $\nu: \mathcal{J} \to \mathcal{L}$ mit $a_i \mathrel{I} m_j \Longleftrightarrow b_{\mathcal{T}(i)} \mathrel{I} n_{\nu(j)}$ gibt.

(3) Ist eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ durch eine Inzidenztabelle gegeben, dann erhalten wir Inzidenztabellen aller zu $\mathcal{J}$ isomorphen Inzidenzstrukturen durch Permutationen der Zeilen und der Spalten in der ursprünglichen Inzidenztabelle.

Es seien Inzidenzstrukturen $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ durch die Inzidenztabellen (a_i, m_j), (b_k, n_l) mit den Indizesmengen , $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ dargestellt. Dann sind $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ dual genau dann, wenn es bijektive Abbildungen $\mathcal{T}: \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{L}$, $\nu: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ mit $a_i \mathrel{I} m_j \Longleftrightarrow b_{\nu(j)} \mathrel{I} n_{\mathcal{T}(i)}$ gibt. Die zustaändige duale Abbildung ist durch die Beziehungen $\mathcal{X}a_i = n_{\mathcal{T}(i)}$, $\mathcal{X}m_j = b_{\nu(j)}$ bestimmt.

(4) Es sei die Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ durch solche Inzidenztabelle (a_i, m_i) dargestellt, die nach der Hauptdiagonale symmetrisch ist, was gleichbedeutend mit $a_i \mathrel{I} m_j \Longleftrightarrow a_j \mathrel{I} m_i$ ist. Dann ist $\mathcal{J}$ selbstdual: In den vorigen Beziehungen $\mathcal{X}a_i = n_{\mathcal{T}(i)}$, $\mathcal{X}m_j = b_{\nu(j)}$ setzen wir $a_i = b_i$, $m_j = n_j$ und $\mathcal{T}$, ν betrachten wir als identische Abbildungen.

Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ heißt <u>modular</u>, wenn folgende vier Bedingungen (A1) - (A4) gelten:

(A1) Durch je zwei Punkte geht mindestens eine Gerade.

(A2) Je zwei Geraden haben mindestens einen Punkt gemeinsam.

(A3) Wir nehmen an, daß alle durch die Punkte a,b gehenden Geraden noch einen weiteren Punkt $x \neq a$ gemeinsam haben. Dann geht jede Gerade, die durch die Punkte a,x geht, auch durch b.

(A4) Nehmen wir an, daß durch alle gemeinsamen Punkte der Geraden b,c noch eine Gerade $x \neq c$ geht. Dann geht durch jeden gemeinsamen Punkt der Geraden c,x auch die Gerade b.

(5) Aus der vorangehenden Definition folgt, daß jede Inzidenzstruktur, die zu einer modularen Inzidenzstruktur isomorph bzw. dual ist, wieder modular ist.

Wir führen einige Modelle der modularen Inzidenzstrukturen an: Für eine gegebene natürliche Zahl n setzen wir $\mathcal{P} = \{a_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$, $\mathcal{L} = \{m_i \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$ und definieren die Inzidenz durch folgende Forderungen:

M 1. Es sei $n \geq 4$ und l sei eine natürliche Zahl mit $2 \leq l \leq n-2$. Auf jeder Geraden m_j mit $j \in \{1,\dots,l\}$ liegen alle Punkte von $\mathcal{P}$ außerdem a_j. Auf jeder Geraden m_k mit $k \in \{l+1,\dots,n\}$ liegen die Punkte $a_1,\dots,a_i$ und a_k. Auf Figur 1 ist die Tabelle dieser modularen Inzidenzstruktur für $n = 6$ und $l = 3$ dargestellt.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
m_1		-	-	-	-	-
m_2	-	-	-	-	-	-
m_3	-	-		-	-	-
m_4	-	-	-	-		
m_5	-	-	-		-	
m_6	-	-	-			-

Fig. 1

M 2. Es sei $n > 4$ und l sei eine natürliche Zahl mit $2 < l \leq n/2$. Wir setzen $a_j \; I \; m_j \; \forall j \in \{1,\dots,n\}$ und $a_{l+1}, a_{l+2},\dots,a_n \; I \; m_1,\dots,m_l$; $a_1,\dots,a_l \; I \; m_{l+1},\dots,m_n$. Auf Figur 2 ist die Tabelle dieser modularen Inzidenzstruktur für $n = 7$ und $l = 3$ dargestellt.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
m_1	-			-	-	-	-
m_2		-		-	-	-	-
m_3			-	-	-	-	-
m_4	-	-	-	-			
m_5	-	-	-		-		
m_6	-	-	-			-	
m_7	-	-	-				-

Fig. 2

Die in M 1 und M 2 beschriebenen modularen Inzidenzstrukturen sind nach (4) autodual, weil ihre Tabellen nach den Hauptdiagonalen symmetrisch sind. Keine zwei verschiedenen Inzidenzstrukturen von M 1 und M 2 sind isomorph.

Ferner nehmen wir stets an, daß die Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ = $= (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ modular ist. Dabei setzen wir $\overline{a} = \{m \in \mathcal{L} \mid a\ I\ m\}$, $\overline{m} = \{a \in \mathcal{P} \mid a\ I\ m\}$ für beliebige $a \in \mathcal{P}$, $m \in \mathcal{L}$.

Lemma 1. Wir nehmen an, daß jede Gerade der modularen Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ mindestens zwei Punkte enthält. Gibt es zwei Punkte a,b mit $\overline{a} \nsubseteq \overline{b}$, dann gilt $\overline{c} \nsubseteq \overline{d}$ für beliebige verschiedene Punkte c,d.

Beweis. Es seien die ausgesprochenen Voraussetzungen erfüllt. Dann gibt es eine Gerade m, die durch a geht und b nicht enthält. Dabei nehmen wir an, daß $\overline{c} \subseteq \overline{d}$ für verschiedene Punkte gilt.

1. Es sei $\overline{c} \cap \overline{a} \neq \overline{d} \cap \overline{a}$. In diesem Falle gibt es eine Gerade $n \in \overline{a}$, die durch d geht und c nicht enthält. Daraus folgt $a \neq c$.

a) Es sei $d \neq a$. Wegen $\overline{c} \subseteq \overline{d}$ gehen alle die Punkte a,c enthaltenden Geraden auch durch d. Die Gerade n enthält die Punkte a,d und nach (A3) geht sie auch durch c, was ein Widerspruch ist.

b) Es sei $d = a$, also $\overline{c} \subseteq \overline{a}$. Zuerst nehmen wir an, daß die Gerade m durch c geht. Aus $b \not{I}\ m$ folgt $b \neq c$. Jede Gerade, die durch b,c geht, geht auch durch c. Die Gerade m geht durch a,c und nach (A3) geht sie auch durch b, was ein Widerspruch ist. Es sei angenommen, daß die Gerade m den Punkt c nicht enthält. Nach unserer Voraussetzung enthält m noch einen Punkt $e \neq a$ mit $e \neq c$. Jede Gerade, die durch c,e geht, geht nach $\overline{c} \subseteq \overline{a}$ auch durch a. Nach (A3) geht m auch durch c, was ebenfalls zum Widerspruch führt.

2. Es sei $\overline{c} \cap \overline{a} = \overline{d} \cap \overline{a}$. Jede Gerade aus $\overline{a}$ enthält c genau dann, wenn sie d enthält.

a) Es sei $a = c$. Dann gilt $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ und wegen $\overline{a} \nsubseteq \overline{b}$ ist $b \neq d$. Die Gerade $m \in \overline{a}$ geht durch d und jede Gerade, die durch a,b geht, geht auch durch d. Nach (A3) enthält m auch b, was ein Widerspruch ist.

b) Es sei $a \neq c$.

α) Es sei $a = d$. Dann gilt $\overline{c} \subseteq \overline{a}$ und wegen $\overline{c} \cap \overline{a} = \overline{d} \cap \overline{a}$ ist $\overline{c} = \overline{a}$. Jede Gerade, die durch a,b geht, geht auch durch c.

Die Gerade m enthält den Punkt c und nach (A3) enthält sie auch b, was wieder ein Widerspruch ist.

β) Es sei $a \neq d$. Dabei nehmen wir an, daß es eine Gerade $p \notin \overline{a}$ gibt, die c,d enthält. Nach unserer Voraussetzung ergibt sich, daß jede Gerade, die durch a,c geht, auch durch d geht. Laut (A3) geht p durch a, was aber ein Widerspruch ist. Daraus folgt, daß solche Gerade, die a nicht enthält, auch c,d nicht enthält. Wegen $\overline{c} \subseteq \overline{d}$ bedeutet dies $\overline{c} \subseteq \overline{a}$.

Zuerst nehmen wir $c \; I \; m$ an. Offensichtlich ist $b \neq c$. Jede Gerade, die durch b,c geht, geht wegen $\overline{c} \subseteq \overline{a}$ auch durch a. Nach (A3) enthält m auch b, was zum Widerspruch führt.

Es sei $c \not{I} m$. Zuerst nehmen wir an, daß es eine Gerade $q \in \overline{a}$ mit $b \; I \; q$ und $c \not{I} q$ gibt. Dann ist $b \neq c$. Jede Gerade, die durch b,c geht, enthält auch a. Nach (A3) geht q durch c, was ein Widerspruch ist. Jede Gerade aus $\overline{a}$ enthält also b genau dann, wenn sie c enthält. Daraus folgt $c,d \not{I} m$. Nach unserer Voraussetzung enthält m einen weiteren Punkt $e \neq a$. Alle Geraden die durch c,e gehen, enthalten auch a. Nach (A3) geht dann m durch c, was ein Widerspruch ist.

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Es gilt auch eine dual Abänderung von Lemma 1:

<u>Lemma 2</u>. Wir nehmen an, daß durch jeden Punkt der modularen Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ mindestens zwei Geraden gehen. Gibt es Geraden m,n aus $\mathcal{J}$ mit $\overline{m} \not\subseteq \overline{n}$, dann gilt $\overline{p} \not\subseteq \overline{q}$ für beliebige verschiedene Geraden p,q.

Durch eine Modifikation von Axiomen (A3), (A4) erhalten wir folgende gegenseitig duale Behauptungen (6), (7), die wir oft verwenden werden.

(6) Es seien a,b,c; $b \neq c$ drei Punkte derart, daß eine Gerade aus $\overline{a}$ genau dann durch b geht, wenn sie c enthält. Ist q eine Gerade mit $q \in \overline{a}$, so geht sie nicht durch beide Punkte b,c.

(7) Es seien m,n,p; $n \neq p$ drei Geraden derart, daß ein Punkt aus $\overline{m}$ genau dann auf n liegt, wenn er auf p liegt. Ist d ein Punkt mit $d \in \overline{m}$, so liegt er nicht auf beiden Geraden m,p.

Eine modulare Inzidenzstruktur heißt <u>eigentlich</u>, wenn folgende Forderungen gelten:

(V1) Je zwei Geraden haben mindestens zwei Punkte gemeinsam.

(V2) Durch je zwei Punkte gehen mindestens zwei Geraden.

(V3) Es gibt Punkte a,b und Geraden m,n mit $\overline{a} \nsubseteq \overline{b}$, $\overline{m} \nsubseteq \overline{n}$.

Nach [2], Sätze 5 und 6 lassen sich (V1) und (V2) in schwächerer Form aussprechen. Nach Lemma 1 und Lemma 2 gilt in jeder eigentlichen modularen Inzidenzstruktur $\overline{c} \nsubseteq \overline{d}$ und $\overline{p} \nsubseteq \overline{q}$ für beliebige verschiedene Punkte c,d und Geraden p,q.

(8) Auf jeder Geraden einer eigentlichen modularen Inzidenzstruktur liegen mindestens drei verschiedene Punkte und durch jeden Punkt gehen mindestens drei Geraden: Gehen z.B. durch einen Punkt a genau zwei Geraden, dann haben sie nach (V2) noch einen Punkt x gemeinsam, woraus $\overline{a} \subseteq \overline{x}$ folgt, was ein Widerspruch ist.

Im weiteren werden die Konstruktionen aller endlichen eigentlichen modularen Inzidenzstrukturen angeführt, die einen Punkt enthalten, durch den genau drei bzw. vier Geraden gehen. Zugleich wird auch der duale Fall gelöst.

Wir nehmen an, daß eine endliche eigentliche modulare Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ gegeben ist.

I. Zuerst untersuchen wir solche Inzidenzstrukturen $\mathcal{J}$, die einen Punkt a enthalten, durch den genau drei Geraden m_1, m_2, m_3 gehen. Wir bezeichnen mit N_1 die Menge solcher Punkte, die von a verschieden sind und die auf den Geraden m_1, m_2 liegen. Weil m_1, m_2 mindestens zwei Punkte gemeinsam haben, ist die Menge N_1 nichtleer. Ähnlicherweise bezeichnen wir mit N_2 bzw. N_3 die Menge solcher Punkte, die mit a verschieden sind und auf den Geraden m_1, m_3 bzw. m_2, m_3 liegen. Auch die Menge N_2, N_3 sind nichtleer. Die Geraden m_1, m_2, m_3 haben nur den Punkt a gemeinsam, was aus $\overline{a} \nsubseteq \overline{x}$ für beliebigen Punkt $x \neq a$ folgt. Daher erhält man $\mathcal{P} = \{a\} \cup N_1 \cup \cup N_2 \cup N_3$.

1. Wir nehmen an, daß zwei Mengen von N_1, N_2, N_3 mindestens zwei Punkte enthalten; es sei z.B. $b_1, b_2 \in N_1$ und $c_1, c_2 \in N_2$ (Fig. 3).

	a	b_1	b_2	N_1	c_1	c_2	N_2		N_3
m_1	–	–	–	...	–	–	...		...
m_2	–	–	–					–	
m_3	–				–	–		–	
n_1		–			–				
n_2			–			–			

Fig. 3

Nach (8) und (6) enthält jede in $\overline{a}$ nicht liegende Gerade genau einen Punkt aus jeder Menge N_1, N_2, N_3. Weil durch b_1, c_1 mindestens zwei Geraden gehen, gibt es außerhalb m_1 noch eine Gerade $n_1 \notin \overline{a}$ mit $b_1, c_1 \; I \; n_1$. Ähnlicherweise gibt es auch eine Gerade $n_2 \notin \overline{a}$ mit $b_2, c_2 \; I \; n_2$. Die Geraden n_1, n_2 haben höchstens einen Punkt gemeinsam, der in N_3 liegt. Dies ist aber ein Widerspruch. Die Inzidenzstruktur kann nicht unsere Voraussetzungen erfüllen.

2. Wir nehmen an, daß mindestens zwei Mengen N_1, N_2, N_3 einelementig sind. Es sei $N_2 = \{c\}$, $N_3 = \{d\}$ (Fig. 4). Jede in $\overline{a}$ nicht liegende Gerade enthält die Punkte c,d und genau einen Punkt aus N_1. (In Fig. 4 sind Geraden $n_1, n_2 \notin \overline{a}$ dargestellt, die $b_1, b_2 \in N_1$ enthalten.) Vertauschen wir die Spalten in Fig. 4 und betrachten wir ihre neue Reihenfolge $d, c, a, b_1, b_2, \ldots$, so erhalten wir die Tabelle aus M1 für $1 = 2$. Nach (3), (5) ist $\mathfrak{J}$ eine modulare Inzidenzstruktur.

	a	b_1	b_2	N_1	c	d
m_1	–	–	–	..	–	
m_2	–	–	–			–
m_3	–				–	–
n_1		–			–	–
n_2			–		–	–

Fig. 4

I´. Wir nehmen an, daß in $\mathfrak{J}$ eine Gerade existiert, die genau drei Punkte enthält. In diesem Falle führen wir die dualen Betrachtungen durch - wir vertauschen Punkte und Geraden bzw. Axiome (A3) und (A4) miteinander. Im Falle 2 erhalten wir eine zu $\mathfrak{J}$ duale Inzidenzstruktur $\mathfrak{J}'$, die nach (5) auch modular ist. $\mathfrak{J}$ läßt sich durch eine nach der Hauptdiagonale symmetrische Tabelle ausdrücken. Deshalb ist $\mathfrak{J}$ nach (4) selbstdual und nach (2) sind $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ isomorph.

II. Wir nehmen an, daß ein Punkt $a \in \mathcal{P}$ existiert, durch den genau vier Geraden m_1, m_2, m_3, m_4 gehen. Nach I können wir nur solche modulare Inzidenzstrukturen $\mathfrak{J}$ untersuchen, in denen auf jeder Geraden mindestens vier Punkte liegen und durch jeder Punkt mindestens vier Geraden gehen. Jeder Punkt $c \neq a$ liegt nach (8) mindestens auf zwei Geraden aus $\bar{a}$ und nach Lemma 1 gehen durch c weniger als vier Geraden von $\bar{a}$.

1. Wir nehmen an, daß jeder von a verschiedene Punkt auf genau zwei Geraden aus $\bar{a}$ liegt. Bezeichnen wir mit $N_1,\dots,N_6$ Punktmengen (immer ohne a), die schrittweise auf den Geraden m_1,m_2 bzw. m_3,m_4 bzw. m_1,m_3 bzw. m_2,m_4 bzw $m_1 m_4$ bzw. m_2,m_3 enthalten sind (Fig. 5). Weil jeweils zwei Geraden mindestens zwei Punkte gemeinsam haben, sind alle angeführten Mengen nichtleer

			N_1		N_2		N_3	N_4		N_5	N_6
	a	b		c		x			y		
m_1	-	-	....		...	-	...	...	-	...	...
m_2	-	-						-			-
m_3	-			-		-					-
m_4	-			-				-	-		
n_1		-		-		-			-		
n_2		-		-		-					

Fig. 5

und es gilt $\mathcal{P} = \{a\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_6$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}_1 = (N_1,N_2)$, $\mathfrak{N}_2 = (N_3,N_4)$, $\mathfrak{N}_3 = (N_5,N_6)$ zugehörige Mengenpaare. Liegen zwei Punkte in verschiedenen Mengen desselben Mengenpaares, dann geht jede Gerade aus $\bar{a}$ durch genau einen gegebenen Punkt. Liegen zwei Punkte b,c in den Mengen, die zu verschiedenen Mengenpaaren gehören, dann gibt es genau eine durch b,c gehende Gerade aus $\bar{a}$ (Fig. 5).

(9) Jede Gerade $n_1 \notin \bar{a}$ hat mit vier Mengen von $N_1,\dots,N_6$ solche Punkte gemeinsam, die in zwei Mengenpaaren von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3$ liegen: Da n_1 mindestens vier Punkte enthält, soll sie zwei Punkte b,c von beiden Mengen eines Mengenpaares $\mathfrak{N}_i$ enthalten. (Nach (6) enthält n_1 höchstens einen Punkt aus jeder Menge N_j.) Darum hat n_1 mit jeder Geraden von $m_1,\dots,m_4$ entweder b oder c gemeinsam und folglich hat sie mit jeder von diesen Geraden noch einen Punkt gemeinsam. Dies ist aber nur in solchem Falle erfüllt, wenn n_1 mit beiden Mengen aus einem Mengenpaar $\mathfrak{N}_j \neq \mathfrak{N}_i$

einen Punkt gemeinsam hat. (Auf Fig. 5 ist z.B. $b \in N_1$, $c \in N_2$ gewählt.) Liegen auf n_1 z.B. zwei Punkte $x \in N_3$, $y \in N_5$, dann haben m_2, n_1 nur einen Punkt gemeinsam, was ein Widerspruch zu (V1) ist.

(10) Haben zwei verschiedene, in $\bar{a}$ nicht enthaltende Geraden zwei Punkte gemeinsam, die in den Mengen aus einem Mengenpaar $\mathcal{N}_i$ liegen, so haben sie keinen weiteren Punkt gemeinsam: Es seien $n_1, n_2 \notin \bar{a}$ Geraden, die gemeinsame Punkte $b \in N_l$, $c \in N_{l+1}$ mit N_l, $N_{l+1} \in \mathcal{N}_{i_1}$ für $i_1 \in \{1,2,3\}$ haben. Dabei nehmen wir an, daß diese Geraden einen weiteren Punkt $x \in N_k$ mit $N_k \in \mathcal{N}_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$ gemeinsam haben. Da n_1, n_2 verschieden sind, gibt es nach (V3) und Lemma 1 einen Punkt y, der auf genau einer Geraden von n_1, n_2 liegt. Es sei $y \; I \; n_1$, $y \not I \; n_2$. Zuerst nehmen wir an, daß y in einer Menge aus $\mathcal{N}_{i_3}$ mit $\mathcal{N}_{i_3} \neq \mathcal{N}_{i_1}$, $\mathcal{N}_{i_2}$ enthalten ist (auf Fig. 5 sind $l = 1$, $k = 3$ und $y \in N_5$ gewählt.) Dann gibt es eine Gerade $m_j \in \bar{a}$, die durch x,y geht (in Fig. 5 ist $j = 1$). Auf der Geraden m_j liegt genau ein Punkt von b,c; es sei $b \; I \; m_j$. Die Geraden m_j, n_1 haben genau zwei Punkte b,x gemeinsam, die auch auf der Geraden n_2 liegen. Wegen $y \; I \; m_j, n_1$ gilt nach (A4) $y \; I \; n_2$, was ein Widerspruch ist. Jetzt nehmen wir an, daß y in einer Menge aus $\mathcal{N}_{i_2}$ liegt, die von N_k verschieden ist. Wegen $y \not I \; n_2$ hat n_2 nach (9) mit beiden in $\mathcal{N}_{i_3}$ enthaltenden Mengen die Punkte d,e gemeinsam. Aus $d,e \; I \; n_1$ folgt $\bar{n}_2 \subseteq \bar{n}_1$, was ein Widerspruch ist. Deshalb gilt entweder $d \not I \; n_1$ oder $e \not I \; n_1$, was wieder zum Widerspruch führt.

a) Wir nehmen an, daß auf einer Geraden $n \notin \bar{a}$ genau vier Punkte b,c,d,e liegen. Nach (9) lassen sich diese Punkte in zwei Paare verteilen, die in verschiedenen Mengenpaaren $\mathcal{N}_i$, $\mathcal{N}_j$ enthalten sind. Wir setzen z.B. $b \in N_1$, $c \in N_2$, $d \in N_3$, $e \in N_4$.

α) Es seien die Mengen N_1, N_2, N_3, N_4 einelementig. Durch b,c

							N_5		N_6
	a	b	c	d	e	x		y	
m_1	-	-		-		-	...		...
m_2	-	-			-			-	
m_3	-		-	-				-	
m_4	-		-		-	-			
n		-	-	-	-				
n_1		-	-			-		-	
n_2				-	-	-		-	

Fig. 6

geht noch eine Gerade $n_1 \neq n$. Nach (10) enthält n_1 keinen Punkt von d,e und deshalb enthält sie Punkte aus N_5, N_6, die wird mit x,y bezeichnen (Fig. 6). Zugleich geht durch d,e eine weitere Gerade n_2 und nach (10) liegt auf n_2 kein Punkt von b,c. Weil n_1, n_2 zwei Punkte gemeinsam haben, gilt x,y I n_2. $\mathcal{Y}$ stellt also eine modulare Inzidenzstruktur mit $\mathcal{P} = \{a,b,c,d,e,x,y\}$, $\mathcal{L} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, n, n_1, n_2\}$ dar. In den Mengen N_5, N_6 liegen keine weiteren Punkte.

β) Wir nehmen an, daß mindestens eine Menge von $N_1, \ldots, N_4$ mehr als ein Element enthält. Es sei z.B. $b_1 \in N_1$ mit $b_1 \neq b$.

				N_1		N_2		N_3		N_5		N_6
	a	b	b_1		c		d		e		g	
m_1	-	-	-	...		...	-	...		...		...
m_2	-	-	-						-		-	
m_3	-				-		-				-	
m_4	-				-				-	-		
n		-			-		-		-			
n_1			-		-		-				-	
n_2			-		-							

Fig. 7

Zuerst nehmen wir an, daß Punkte $d_1 \in N_3$, $e_1 \in N_4$ mit $d_1 \neq d$, $e_1 \neq e$ existieren. Durch diese Punkte gehen zwei verschiedene Geraden n', n''. Weil jede Gerade von n', n'' mit n mindestens zwei Punkte gemeinsam hat, gilt b,c I n',n'', was ein Widerspruch zu (10) ist. Mindestens eine Menge von N_3, N_4 ist also einelementig. Es sei $N_4 = \{e\}$ (Fig. 7). Durch b_1,c gehen zwei Geraden n_1, n_2. Nach (10) liegen beide Punkte d,e nicht auf n_1. Da n, m_1 mindestens zwei Punkte gemeinsam haben, liegt auf n_1 genau ein Punkt von d,e. Es sei d I n_1. Wegen e $\not{I}$ n_1 hat n_1 mit den Mengen N_3, N_4 genau einen Punkt d gemeinsam und nach (9) hat sie mit jeder Menge von N_5, N_6 einen Punkt gemeinsam. Es sei $g \in N_6$, g I n_1 (Fig. 7). Der Punkt g liegt auch auf m_2, m_3 und n, m_3 haben genau zwei Punkte c,d gemeinsam. Durch diese Punkte geht auch n_1. Die Geraden m_3,n_1 haben g gemeinsam und nach (A4) gilt $g \mathrel{I} n$, was ein Widerspruch ist. Dann ist $d \not\mathrel{I} n_1$ und nach unserer Voraussetzung gilt $e \mathrel{I} n_1$. Zuerst nehmen wir an, daß n_1 mit N_3 keinen Punkt gemeinsam hat. Dann hat sie mit den Mengen N_5,N_6 zwei Punkte gemeinsam. Die Geraden m_4,n haben genau zwei Punkte c,e gemeinsam, die auch auf n_1 liegen. Selbstverständlich haben n_1,m_4 einen Punkt in N_5 gemeinsam, durch den nach (A4) auch n geht, was zum Widerspruch führt. Wir nehmen also an, daß n_1 mit N_3 einen Punkt $d_1 \neq d$ gemeinsam hat. Die Gerade n_2 enthält nach (10) keinen Punkt von d_1,e. Sie soll den Punkt d enthält, weil n,n_2 zwei Punkte gemeinsam haben. Nach (9) enthält n_2 Punkte von beiden Mengen N_5,N_6. Durch Anwendung von m_3,n,n_2 erhalten wir nach (A4) wieder einen Widerspruch. Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{J}$ kann nicht die vorgeschriebenen Voraussetzungen erfüllen.

b) Wir nehmen an, daß auf jeder in $\bar{a}$ nicht enthaltenden Geraden mindestens fünf Punkte liegen.

α) Es sei mindestens eine Menge von $N_1,\dots,N_6$ einelementig. Es sei z.B. $N_2 = \{c\}$. Punkte von $N_1,N_3,\dots,N_6$ bezeichnen wir schrittweise mit $b_1,b_2,\dots;d_1,d_2,\dots;e_1,e_2,\dots;f_1,f_2,\dots;g_1,g_2,\dots$ (Fig. 8). Wir betrachten eine Gerade n_1, die b_1,c enthält. Dann gilt $n_1 \not\subset \bar{a}$ und nach unserer Voraussetzung liegen auf n_1 mindestens drei weitere Punkte. Zwei von ihnen liegen entweder in $\mathfrak{N}_2$ oder in $\mathfrak{N}_3$. Es sei z.B. $d_1,e_1,f_1 \mathrel{I} n_1$. Durch b_1,c geht noch

			N_1				N_3			N_4			N_5				N_6
	a	b_1	b_2		c	d_1	d_2		e_1	e_2		f_1	f_2		g_1	g_2	
m_1	-	-	-	...		-	-	...			...	-	-	...			...
m_2	-	-	-						-	-					-	-	
m_3	-				-	-	-								-	-	
m_4	-				-				-	-		-	-				
n_1		-			-	-			-			-			-		
n_2		-			-		-			-			-			-	
n'_1						-			-				-			-	
n'_2							-			-		-			-		

Fig. 8

eine Gerade n_2. Auf n_2 liegen wieder noch drei Punkte, die nach (10) von d_1,e_1,f_1 verschieden sind. Es sei z.B. $d_2,e_2,g_2 \mathrm{I} n_2$ (weiter zeigen wir auf, daß auf n_2 Punkte aller Mengen $N_3,\dots,N_6$ liegen). Punkte d_1,e_1 sind in den Mengen $N_3,N_4 \in \mathfrak{N}_2$ enthalten, durch d_1,e_1 geht deshalb keine Gerade von $m_1,\dots,m_4$. Es gibt noch eine Gerade $n_1' \neq n_1$, die d_1,e_1 enthält. Wegen $b_1,c \not\mathrm{I} n_1$ gilt nach (10) $b_1,c \not\mathrm{I} n_1'$. Die Geraden n_2,n_1' haben zwei Punkte gemeinsam, woraus $g_2 \mathrm{I} n_1'$ folgt. Diese Geraden sollen noch einen Punkt $f_2 \in N_5$ gemeinsam haben. Durch d_2,e_2 geht noch eine Gerade $n_2' \neq n_2$. Ähnlich wie im Falle der Geraden n_1' läßt sich $b_1,c \mathrm{I} n_2'$ zeigen. Die Geraden n_2',n_1 haben zwei in N_5,N_6 enthaltende Punkte gemeinsam, woraus $f_1 \mathrm{I} n_2'$ folgt. Sie haben jedoch noch einen Punkt $g_1 \in N_6$ gemeinsam. Die Geraden n_1',n_2' haben in den Mengen $N_3,\dots,N_6$ keinen Punkt gemeinsam, sie enthalten nicht c und haben folglich zwei Punkte in N_1 gemeinsam, was ein Widerspruch zu (6) ist. Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{J}$ erfüllt nicht unsere Vorsussetzungen.

β) Wir nehmen an, daß alle Mengen $N_1,\dots,N_6$ mindestens zwei Elemente enthalten. Es sei $b_1,b_2 \in N_1$, $c_1,c_2 \in N_2$. Durch b_1,c_1 gehen mindestens zwei Geraden $n_1,n_2 \notin \bar{a}$. Auf n_1 liegen weitere drei Punkte. In jeder Menge von $N_3,\dots,N_6$ liegt dabei nach (6) höchstens ein von ihnen. Es sei $d_1,e_1,f_1 \mathrm{I} n_1$ mit $d_1 \in N_3$, $e_1 \in N_4$ und $f_1 \in N_5$ (Fig. 9). Ebenfalls auf n_2 liegen

		N_1		N_2		N_3		N_4		N_5		N_6	
	a	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2	e_1	e_2	f_1	f_2	g_1	g_2
m_1	–	–	– ...		...	–	– ...		...	–	– ...		...
m_2	–	–	–					–	–			–	–
m_3	–			–	–	–	–					–	–
m_4	–			–	–			–	–	–	–		
n_1		–		–		–		–		–		–	
n_2		–		–			–		–		–		–
n_3			–		–	–		–			–		–
n_4			–		–		–		–	–		–	
n_5		–			–	–			–		–	–	
n_6		–			–		–	–		–			–
n_7			–	–		–			–	–			–
n_8			–	–			–	–			–	–	

Fig. 9

weitere drei Punkte, die nach (10) von d_1, e_1, f_1 verschieden sind. Es sei e_2, f_2, g_2 I n_2 mit $e_2 \in N_4$, $f_2 \in N_5$, $g_2 \in N_6$. (Ferner wird gezeigt, daß n_2 auch einen Punkt von N_3 hat.) Wir wählen eine weitere Gerade n_3, die durch b_2, c_2 geht. Die Geraden n_1, n_3 haben mindestens zwei Punkte gemeinsam; es sei z.B. d_1, e_1 I n_3. Die Gerade n_3 hat aber zwei Punkte auch mit n_2 gemeinsam. Nach (6) liegen diese in N_5, N_6 und daraus folgt f_2, g_2 I n_3. Durch b_2, c_2 geht noch eine Gerade n_4, die mit n_3 keinen weiteren Punkt, jedoch mit jeder Geraden von n_1, n_2 mindestens zwei Punkte gemeinsam hat. Daraus erhalten wir $e_2 f_1$ I n_4 und n_1, n_4 bzw. n_2, n_4 haben noch einen Punkt $g_1 \neq g_2$ mit N_6 bzw. $d_2 \neq d_1$ mit N_3 gemeinsam.

Wir betrachten eine durch b_1, c_2 gehende Gerade n_5 und nehmen dabei an, daß auf n_5 ein Punkt liegt, der von $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ verschieden ist. Es sei z.B. f_3 I n_5, $f_3 \in N_5$ mit $f_3 \neq f_1, f_2$. Der Punkt f_3 liegt auf m_1, m_4, m_5 und nach (6) liegt er auf keiner der Geraden $n_1, \ldots, n_4$. Durch f_3 geht noch eine Gerade n, die nach (6) f_1, f_2 nicht enthält (auf Fig. 9 ist n nicht dargestellt). Wir nehmen an, daß n höchstens einen Punkt von b_1, b_2, c_1, c_2 enthält. Es sei z.B. b_1 I n. Dann hat n mit n_3, n_4 in den Mengen N_1, N_2 keinen Punkt gemeinsam. Darum hat sie mit n_3 und n_4 zwei Punkte in den Mengen $N_3, \ldots, N_6$ gemeinsam, was aber ein Widerspruch zu f_1, f_2 I n ist. Die Gerade n enthält also genau einen Punkt von b_1, b_2 bzw. c_1, c_2. Es sei zuerst b_1, c_1 I n. Nach (10) hat n in den Mengen $N_3, \ldots, N_6$ mit n_1, n_2 keinen Punkt gemeinsam. Andererseits hat sie aber mit jeder Geraden von n_3, n_4 zwei Punkte von $N_3, \ldots, N_6$ gemeinsam, was abermals ein Widerspruch ist. Ganz ähnlich läßt sich zeigen, daß auf n auch b_2, c_2 nicht liegen. Auf n sind auch b_1, c_2 nicht enthalten, weil dies wegen f_3 I n_5, n zum Widerspruch führt. Jede f_3 enthaltende und von m_1, m_4, m_5 verschiedene Gerade enthält also b_2, c_1. Nach (10) gibt es keine weitere von n verschiedene Gerade von dieser Eigenschaft. Durch f_3, g_1 gehen mindestens zwei Geraden; wegen $g_1 \not\mathrm{I}\ m_1, m_4$ ist also g_1 I n_5, n. Nach (6) geht dann durch f_3, g_2 keine Gerade, was ein Widerspruch ist. Damit ist bewiesen, daß auf n_5 nur Punkte von $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ liegen.

Durch b_1, c_2 geht noch eine Gerade n_6 und durch b_2, c_1 gehen mindestens zwei Geraden n_7, n_8. Ganz ähnlich wie für die Gerade

n_5 läßt sich beweisen, daß auf n_6, n_7, n_8 nur Punkte von $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ und auf jeder Geraden von n_5, n_6, n_7, n_8 genau sechs Punkte liegen. Jede Gerade von n_5, n_6, n_7, n_8 hat mit jeder Geraden von n_1, n_2, n_3, n_4 in den Mengen N_1, N_2 genau einen Punkt gemeinsam. Wir wollen zeigen, daß diese Gerade mit jeder Geraden von n_1, n_2, n_3, n_4 in $N_3, \dots, N_6$ genau zwei Punkte gemeinsam hat: Wir betrachten z.B. die Geraden n_2, n_5 und nehmen an, daß sie genau einen Punkt g_2 gemeinsam haben. Dann ist $d_2, e_2, f_2, g_1 \not I\, n_5$. Da auf n_5 sechs Punkte liegen, gilt d_1, e_1, f_1 I n_5. Die Geraden m_1, n_1 haben Punkte b_1, d_1, f_1 gemeinsam, durch die auch die Gerade n_5 geht. Die Geraden n_1, n_5 gehen auch durch den Punkt e_1, der nach (A4) auf m_1 liegt, was ein Widerspruch ist. Die Gerade n_5 hat also mit n_2 in $N_3, \dots, N_6$ mindestens zwei Punkte gemeinsam und nach (10) hat sie mit diesen Mengen genau zwei Punkte gemeinsam. Diese Punkte liegen weder in den Mengen N_3, N_4 noch in N_5, N_6. Aus den verschiedenen Möglichkeiten wählen wir z.B. d_1, e_2, f_2, g_1 I n_5 (andere Möglichkeiten führen zu isomorphen Inzidenzstrukturen). Dann hat n_5 auch mit anderen Geraden n_1, n_3, n_4 in $N_3, \dots, N_6$ genau zwei Punkte gemeinsam. Die Gerade n_6 hat nach (10) mit n_5 in den Mengen $N_3, \dots, N_6$ keinen Punkt gemeinsam und deshalb gilt d_2, e_1, f_1, g_2 I n_6. Die Geraden n_7, n_8 haben mit n_5, n_6 in $N_3, \dots, N_6$ zwei Punkte gemeinsam. Es gilt z.B. d_1, e_2, f_1, g_2 I n_7 und d_2, e_1, f_2, g_1 I n_8. Wir haben eine modulare Inzidenzstruktur bekommen.

2. Wir nehmen an, daß ein Punkt $b_1 \neq a$ existiert, der auf drei Geraden aus $\bar{a}$ liegt, es sei z.B. b_1 I m_1, m_2, m_3. Wir bezeichnen mit N_1 eine Menge solcher Punkte, die von a verschieden sind und auf allen Geraden m_1, m_2, m_3 liegen. Offensichtlich ist $b_1 \in N_1$.

a) Wir nehmen an, daß jeder von a verschiedene und in N_1 nicht enthaltende Punkt auf genau zwei Geraden von $\bar{a}$ liegt. Wir bezeichnen mit N_2 bzw. N_3 bzw. N_4 die Mengen solcher Punkte, die auf den Geraden m_3, m_4 bzw. m_2, m_4 bzw. m_1, m_4 liegen.

(11) Alle Mengen N_1, N_2, N_3, N_4 sind nichtleer und es gilt $\mathcal{P} = \{a\} \cup N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$: Jeder Punkt aus $\mathcal{P}$ liegt mindestens auf zwei Geraden von $\bar{a}$. Wir nehmen an, daß ein Punkt $c \neq a$ in keiner Menge von $N_1, \dots, N_4$ liegt. Dann gilt c I m_1, m_2 bzw.

$c \; I \; m_1, m_3$ bzw. $c \; I \; m_2, m_3$ und nach unserer Voraussetzung liegt c nicht auf einer weiteren Geraden von $\bar{a}$. Es sei z.B. $c \; I \; m_1, m_2$. Durch a,c gehen dann genau die Geraden m_1, m_2, die aber noch b_1 enthalten. Die Gerade m_3 geht durch a,b und nach (A3) geht sie auch durch c, was ein Widerspruch ist. Der Punkt c liegt also in einer Menge von $N_1, \ldots, N_4$. Alle Mengen N_2, N_3, N_4 sind nichtleer: Aus $N_3 = \emptyset$ z.B. folgt, daß m_2, m_4 nur a gemeinsam haben, was ein Widerspruch ist.

(12) Eine in $\bar{a}$ nicht liegende Gerade hat mit jeder Menge von $N_1, \ldots, N_4$ genau einen Punkt gemeinsam: Nach (6) hat jede in $\bar{a}$ nicht liegende Gerade mit jeder Menge von $N_1, \ldots, N_4$ höchstens einen Punkt gemeinsam. Weil diese Gerade aber mindestens vier Punkte enthält, hat sie mit jeder Menge von $N_1, \ldots, N_4$ genau einen Punkt gemeinsam.

(13) Haben zwei verschiedene in $\bar{a}$ nicht liegende Geraden einen Punkt in N_1 gemeinsam, so haben sie in den Mengen N_2, N_3, N_4 höchstens einem Punkt gemeinsam. Nehmen wir an, daß die Geraden $n_1, n_2 \notin \bar{a}$ einen Punkt $b_1 \in N_1$ und außerdem die Punkte $c_1 \in N_2$, $e_1 \in N_4$ gemeinsam haben. In diesem Falle haben n_1, m_1 genau die Punkte b_1, e_1 gemeinsam. Durch diese Punkte geht eine Gerade n_2. Weil n_1, n_2 den Punkt c_1 enthalten, gilt nach (A4) $c_1 \in m_1$, was ein Widerspruch ist.

α) Es sei die Menge N_1 einelementig; wir setzen $N_1 = \{b_1\}$.

(i) Wir nehmen an, daß mindestens eine Menge von N_2, N_3, N_4 einelementig ist. Es sei $N_2 = \{c_1\}$. Nach (12) geht jede in $\bar{a}$ nicht liegende Gerade durch die Punkte b_1, c_1. Nach (13) haben dann zwei in $\bar{a}$ nicht liegende Geraden keinen weiteren Punkt gemeinsam. Wir wählen eine Gerade $n_1 \notin \bar{a}$, die einen Punkt $d_1 \in N_3$ enthält (Fig. 10). Durch den Punkt d_1 geht keine weitere in $\bar{a}$ nich liegenede Gerade und daher enthält $\bar{d}_1$ genau drei Geraden m_2, m_4, n_1. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Voraus-

				N_3	N_4
	a	b_1	c_1	d_1	e_1
m_1	-	-			... - ...
m_2	-	-		-	
m_3	-	-	-		
m_4	-		-	-	-
n_1		-	-	-	

Fig. 10

setzung, daß durch jeden Punkt mindestens vier Geraden gehen. Es gibt keine modulare Inzidenzstruktur, die α), (i) erfüllen.

(ii) Wir nehmen an, daß alle Menge N_2, N_3, N_4 mindestens zwei Elemente enthalten. Es sei $c_1, c_2 \in N_2$ und $d_1, d_2 \in N_3$. Nach (12) liegt b_1 auf allen in $\bar{a}$ nicht liegenden Geraden. Es gibt eine Gerade $n_1 \neq m_1$, die durch c_1, d_1 geht. Nach (12) enthält n_1 einen Punkt $e_1 \in N_4$ (Fig. 11). Ferner gibt es eine durch c_1, d_2 gehende Gerade $n_2 \neq m_4$, die nach (12), (13) noch einen Punkt $e_2 \in N_4$, $e_2 \neq e_1$ enthält. Wir wählen eine weitere durch c_2, d_1 gehende Gerade. Da n_2, n_3 zwei Punkte gemeinsam haben, gilt e_2 I n_3. Es sei schließlich n_4 eine die Punkte c_2, d_2 enthaltende Gerade. Dann ist e_1 I n_4, weil n_1, n_4 zwei Punkte gemeinsam haben. Wir erhalten eine modulare Inzidenzstruktur mit $\mathcal{P} = \{a, b_1, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2\}$, $\mathcal{L} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

					N_2			N_3			N_4
	a	b_1	c_1	c_2		d_1	d_2		e_1	e_2	
m_1	–	–			...			...	–	–	...
m_2	–	–				–	–				
m_3	–	–	–	–							
m_4	–		–	–		–	–		–	–	
n_1		–	–			–			–		
n_2		–	–				–			–	
n_3		–		–		–				–	
n_4		–		–			–		–		

Fig. 11

β) Wir nehmen an, daß N_1 mindestens zwei Elemente enthält, es sei z.B. $b_1, b_2 \in N_1$.

(i) Es seien alle Mengen N_2, N_3, N_4 einelementig. Wir setzen $N_2 = \{c\}$, $N_3 = \{d\}$ und $N_4 = \{e\}$. Jede in $\bar{a}$ nicht liegende Gerade enthält die Punkte c,d,e und einen Punkt von N_1. Zwei verschiedene in $\bar{a}$ nicht liegende Geraden haben in N_1 keinen Punkt gemeinsam, weil ihre Punktmengen nicht zusammenfließen können. In Fig. 12 sind solche Geraden n_1, n_2 dargestellt, die b_1, b_2 enthalten. Vertauschen wir die Spalten in Tabelle 12 zur Reihenfolge $e, d, c, a, b_1', b_2, \ldots$, so erhalten

				N_1			
	a	b_1	b_2		c	d	e
m_1	–	–	–	...			–
m_2	–	–	–			–	
m_3	–	–	–		–		
m_4	–				–	–	–
n_1		–			–	–	–
n_2			–		–	–	–

Fig. 12

wir die Tabelle von M2 für $l = 3$ und $n = |N_1| + 4$, wo $|N_1|$ die Anzahl der Elemente von N_1 bedeutet. Damit ist $\mathfrak{I}$ eine modulare Inzidenzstruktur.

(ii) Wir nehmen an, daß mindestens eine Menge von N_2, N_3, N_4 zweielementig ist. Es sei $c_1, c_2 \in N_2$. Außer m_3 geht durch b_1, c_1 noch eine Gerade $n_1 \notin \bar{a}$. Ähnlicherweise gibt es eine Gerade $n_2 \notin \bar{a}$,

	N_1				N_2			N_3			N_4	
	a	b_1	b_2		c_1	c_2		d_1	d_2		e_1	
m_1	-	-	-	...			...			...	-	...
m_2	-	-	-					-	-			
m_3	-	-	-		-	-						
m_4	-				-	-		-	-		-	
n_1		-			-			-			-	
n_2		-				-			-		-	
n_3			-		-				-		-	

Fig. 13

$n_2 \neq m_3$, die durch b_1, c_2 geht (Fig. 13). Die Geraden n_1, n_2 haben mindestens zwei Punkte gemeinsam und nach (13) haben sie außer b_1 noch genau einen Punkt gemeinsam. Es sei $e_1 \in N_4$ dieser Punkt. Dann haben n_1, n_2 in N_3 zwei verschiedene Punkte d_1, d_2 gemeinsam. Durch b_2, c_1 geht noch eine Gerade $n_3 \neq m_3$. Weil n_2, n_3 mindestens zwei Punkte gemeinsam haben, gilt $d_2, e_1 \mathrel{I} n_3$. Die Geraden n_1, n_3 haben genau zwei Punkte c_1, e_1 gemeinsam. Durch c_1, e_1 geht auch die Gerade m_4. Die Geraden m_4, n_1 haben d_1 gemeinsam und durch d_1 geht nach (A4) auch die Gerade n_3, was ein Widerspruch ist. Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ kann nicht modular sein.

b) Wir nehmen an, daß es einen Punkt $c_1 \neq a$, $c_1 \notin N_1$ gibt, der auf drei Geraden aus $\bar{a}$ liegt; es sei $c_1 \mathrel{I} m_2, m_3, m_4$. Dann gilt $c_1 \not\mathrel{I} m_1$. Wir bezeichnen mit N_2 die Menge aller Punkte, die auf m_2, m_3, m_4 liegen.

(14) Jeder von a verschiedene Punkt liegt auf genau drei Geraden aus $\bar{a}$: Wir betrachten einen Punkt $d \neq a$, der auf genau zwei Geraden aus $\bar{a}$ liegt. Es sei $d \not\mathrel{I} m_4$. Dann enthalten alle Geraden aus $\bar{a}$, die durch d gehen, auch b_1. Durch b_1, a geht allerdings noch eine dritte Gerade, die nach (A3) auch durch d geht,

was ein Widerspruch ist. Durch d gehen also drei Geraden aus $\bar{a}$ und wegen $d \not{I}\, m_4$ gilt deshalb $d \in N_1$. Ist $d \not{I}\, m_1$, verfahren wir ganz ähnlich, nur außer b_1 verwenden wir c_1. Daraus wird $d \in N_2$ bewiesen. Es bleibt nur der Fall $d\ I\ m_1, m_4$ zu überprüfen. Wir bezeichnen mit N' die Menge aller Punkte, durch die genau zwei Geraden m_1, m_4 aus $\bar{a}$ gehen. Dabei nehmen wir an, daß ein Punkt e mit $e \notin N_1, N_2, N'$ existiert. Dann gilt $e\ I\ m_1, m_4$ und wegen $e \notin N'$ geht durch e noch eine dritte Gerade aus $\bar{a}$; es sei z.B. $e\ I\ m_2$. Durch a,d gehen genau zwei Geraden m_1, m_4, die auch durch e gehen. Durch a,e geht noch die Gerade m_2 und nach (A3) geht m_2 auch durch d, was ein Widerspruch ist. Alle Punkte von $\mathcal{P}$ sind also in $N_1 \cup N_2 \cup N'$ enthalten was aber unmöglich ist. Durch b_1,d geht nämlich außer m_1 noch eine Gerade $n \notin \bar{a}$. Nach (6) hat sie mit jeder Menge von N_1, N_2, N' höchstens einen Punkt gemeinsam und sie enthält höchstens drei Punkte, was ein Widerspruch ist. Wir haben also bewiesen, daß durch d noch eine dritte Gerade geht.

Wir bezeichnen mit N_3 bzw. N_4 die Menge solcher Punkte, die gleichzeitig auf den Geraden m_1, m_2, m_4 bzw. m_1, m_3, m_4 liegen.

(15) Jede in $\bar{a}$ nicht liegende Gerade hat mit jeder Menge von $N_1, \ldots, N_4$ genau einen Punkt gemeinsam und es gilt $\mathcal{P} = \{a\} \cup N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$: Die angeführte Behauptung folgt aus (14) und (6).

(16) Zwei verschiedene Geraden, die zu $\bar{a}$ nicht gehören, haben genau drei Punkte gemeinsam: Wir nehmen an, daß zwei verschiedene Geraden $n_1, n_2 \notin \bar{a}$ genau zwei Punkte gemeinsam haben. Es sei z.B. $b_1, d_1\ I\ n_1, n_2$ mit $b_1 \in N_1$ und $d_1 \in N_3$. Durch b_1, d_1 geht auch die Gerade m_1. Nach (15) liegt ein Punkt $e_1 \in N_4$ auf n_1. Die Geraden n_1, n_2 haben genau die Punkte b_1, d_1 gemeinsam. Durch b_1, d_1 geht auch m_1. Die Geraden m_1, n_1 haben den Punkt e_1 gemeinsam. Durch e_1 geht nach (A4) auch die Gerade n_2, was ein Widerspruch ist. Die Geraden n_1, n_2 haben also mindestens drei Punkte gemeinsam. Wegen $\bar{n}_1 \neq \bar{n}_2$ können sie nicht vier Punkte gemeinsam haben.

α) Wir nehmen an, daß drei Mengen von $N_1, \ldots, N_4$ einelementig sind. Es sei z.B. $N_2 = \{c_1\}$, $N_3 = \{d_1\}$, $N_4 = \{e_1\}$. Für eine beliebige Gerade $n_1 \notin \bar{a}$ gilt $c_1, d_1, e_1\ I\ n_1$ und n_1 enthält

	a	b_1	…	c_1	d_1	e_1
		N_1				
m_1	-	-	…		-	-
m_2	-	-		-	-	
m_3	-	-		-		-
m_4	-			-	-	-
n_1		-		-	-	-
n_2			-	-	-	-

Fig. 14

genau einen Punkt von N_1. Zwei verschiedene in $\bar{a}$ nicht liegende Geraden enthalten nach (6) verschiedene Punkte von N_1. In Fig. 14 ist noch eine Gerade n_2 dargestellt. Vertauschen wir die Spalten und schreiben sie in der Reihenfolge $c_1, e_1, d_1, a, b_1, \ldots$, dann erhalten wir die Tabelle von M1 für $l = 3$ und $n = |N_1| + 4$. Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ ist modular.

β) Wir nehmen an, daß zwei Mengen von $N_1, \ldots, N_4$ midestens zweielementig sind. Es sei $b_1, b_2 \in N_1$ und $c_1, c_2 \in N_2$. Es gibt Geraden $n_1, n_2 \notin \bar{a}$, die durch b_1, c_1 bzw. b_2, c_2 gehen (Fig. 15). Diese Geraden haben aber nach (15) höchstens zwei Punkte gemeinsam, was ein Widerspruch zu (16) ist. Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ erfüllt nicht die vorgeschriebenen Voraussetzungen.

	a	b_1	b_2	…	c_1	c_2	…	N_3		N_4	
		N_1			N_2						
m_1	-	-	-	…			…	-	…	-	…
m_2	-	-	-		-	-		-			
m_3	-	-	-		-	-				-	
m_4	-				-	-		-		-	
n_1		-			-						
n_2			-			-					

Fig. 15

In Absatz II haben wir alle (eigentlichen) endlichen modularen Inzidenzstrukturen konstruiert, in denen ein Punkt existiert, durch den genau vier Geraden gehen. In den Fällen 2a (i) und 2bα haben wir die in Beispielen M1, M2 angeführten Inzidenzstrukturen bekommen. Außerdem gibt es aber noch modulare Inzidenzstrukturen aus den Fällen 1aα, 1bβ und 2aα(ii). Vertauschen wir in 1aα die Spalten der Tabelle auf Figur 6 und schreiben diese Spalten in der Reihenfolge a,b,d,x,y,e,c ein, dann ist die zugehörige Tabelle nach der Häuptdiagonale symmetrisch. Ähnlicherweise läßt sich auch Inzidenzstruktur aus 2aα (ii) so ausdrücken, daß die zugehörige Tabelle nach der Hauptdiagonale symmetrisch ist. (Die Spalten schreiben wir in der Reihenfolge $a, e_2, e_1, b_1, c_1, d_1, d_2, e_2$.) Wenn wir aus der Inzidenzstruktur von 1bβ den Punkt a mit den zugehörigen Inzidenzen nehmen, so erhalten wir wieder eine modulare Inzidenzstruktur $\mathcal{Y}'$, welche 12 Punkte und 12 Geraden enthält. Auf jeder Geraden liegen dabei 6 Punkte und durch jeden Punkt gehen 6 Geraden. Lassen wir in der Tabelle in Fig. 9 die erste Spalte aus, dann erhalten wir die Tabelle der beschriebenen Inzidenzstruktur und diese Tabelle ist nach der Hauptdiagonale symmetrisch.

II' Wir nehmen an, daß in $\mathcal{Y}$ eine genau vier Punkte enthaltende Gerade existiert und andere Geraden mindestens vier Punkte enthalten. Dieser Fall ist dual zu II und daher erhalten wir in II' modulare Inzidenzstrukturen, die zu den in II konstruierten Inzidenzstrukturen dual sind. Nach (4) sind die Inzidenzstrukturen aus 2aβ(i), 2bα, 1aα, 2aα(ii) selbstdual und sie sind nach (2) isomorph zu dualen Inzidenzstrukturen. Im Falle 1bβ erhalten wir eine neue modulare Inzidenzstruktur, indem wir zur Tabelle der Inzidenzstruktur $\mathcal{Y}'$ eine weitere vier Punkte enthaltende Gerade hinzufügen. Dabei ergänzen wir die Inzidenz in geegneter Weise.

LITERATUR

[1] M a ch a l a, F.: Modulare Inzidenzstrukturen, Čas.pro pěst.mat. (v tisku).

[2] R a ch ů n e k, J. and L a r m e r o v á, J.: Translation of distributive and modular ordered sets, Acta Univ.Pal. Ol., Vol.91 (1988), 13-25.

Department of Algebra and Geometrie
Palacký University
Svobody 26, 771 46 Olomouc
Czechoslovakia

Acta UPO, Fac.rer.nat. 100, Mathematica XXX (1991), 235 - 255.