Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

Milan Votava

Einige Eigenschaften der verallgemeinerten Polarfunktion und der Radonschen Funktion

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 25 (1986), No. 1, 117--131

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120176

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM

1986 Mathematica XXV Vol. 85

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER VERALLGEMEINERTEN POLARFUNKTION UND DER RADONSCHEN FUNKTION

MILAN VOTAVA

In diesem Beitrag studiere ich einige Eigeschaften der Polarfunktion und der Radonschen Funktion vom Akademiker B o r ů v k a aus der Hinsicht der begleitenden Differentialgleichungen mit den Gewichtsfunktionen $a(t)$, $b(t)$ zur Gleichung

$$y'' = q(t)y \qquad (q)$$

eingeführt, die in [2] untersucht sind. Dabei nütze ich einige Resultate aus, die in [5] publiziert sind, die ich kurz im 1. Teil des Artikels zusammenfasse. Da ich eng an die Monographie [1] und den Artikel [5] anknüpfe, setze ich ihre Kenntnis voraus.

1. D i e z w e i t e v e r a l l g e m e i n e r t e P h a s e.

Verabredung: Sofern es nicht anders angeführt wird, bezeichnen die Buchstaben u, v, U, V, a, b, p, q, r, y, ω, α, β die Funktionen der Variablen t.

In [5] ist die zweite verallgemeinerte Phase β definiert, im Falle, daß $b \neq 0$ für alle $t \in j$, mittels der Formel

$$\beta = \begin{cases} (\frac{\pi}{2} - n\pi)\ \mathrm{sgn}\left[W(\omega^2 - \omega' - q)\right] & \text{für } t = \tau_n \\ \mathrm{arctg}\,\frac{\omega u + u'}{\omega v + v'} - n\pi\ \mathrm{sgn}\left[W(\omega^2 - \omega' - q)\right] & \text{für } t \in (\tau_n, \tau_{n+1}) \\ & (t \in j) \end{cases} \tag{1.1}$$

(τ_n sind die Nullstellen der Funktion $\omega v + v'$, u, v ist ein unabhängiges Paar der Lösung in der Gleichung (q), $\omega = \frac{a}{b}$, a, b sind sog. Gewichtsfunktionen.)

Weiterhin werden in [5] diese Beziehungen abgeleitet:

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{-W}{\varepsilon p r}, \tag{1.2}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, $r = \sqrt{u^2 + v^2}$, $p = \sqrt{(\omega u + u')^2 + (\omega v + v')^2}$, α ist die erste Phase.

$$\frac{\beta' p^2}{\alpha' r^2} - \omega^2 + \omega' = -q, \tag{1.3}$$

$$\beta = \alpha + \mathrm{arcotg}\ X, \tag{1.4}$$

wo

$$X = \frac{\omega}{\alpha'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)', \tag{1.5}$$

X man auch mittels solcher Formeln ausdrücken kann.

$$X = \frac{\omega r + r'}{\alpha' r} \tag{1.6}$$

$$X = \frac{\omega r^2 + rr'}{-W} \tag{1.7}$$

$$X = \frac{u(\omega u + u') + v(\omega v + v')}{-W} \tag{1.8}$$

Verabredung: Wir werden weiter voraussetzen, da3 $q \in C_2(j)$, $a \in C_3(j)$, $b \in C_3(j)$, $b \neq 0$ für alle $t \in j$, $\omega = \frac{a}{b}$, $\omega^2 - \omega' - q \neq 0$ für alle $t \in j$ und $q \neq 0$ für alle $t \in j$ gilt.

2. Die verallgemeinerte Polarfunktion

Definition 2.1.: Die verallgemeinerte Funktion der Basis (u, v) der Differentialgleichung (q) bei den Gewichtsfunktionen a, b ist die Funktion der Form

$$\vartheta = \beta - \alpha , \tag{2.1}$$

wo α die erste Phase der Differentialgleichung (q) der Basis (u, v) ist, im Intervall j definiert und β ist die zweite verallgemeinerte Phase, im Intervall j definiert. Die Phase α, β nennen wir die Komponenten der Funktion ϑ. Nach der Formel (1.4) und (1.5) gilt

$$\vartheta = \operatorname{arccotg} \left[\frac{\omega}{\alpha'} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha'}\right)' \right. + k\pi , \tag{2.2}$$

wo k die ganze Zahl ist.

Bemerkung 2.1.: Ist $\omega = 0$, so erhält man

$$\vartheta = \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha'}\right)' + k\pi ,$$

was die Formel (2) § 6 in [1] ist/.

Die Formel (2.2) können wir nach (1.4), (1.6) und (1.7) auch

$$\vartheta = \operatorname{arccotg} \frac{\omega r + r'}{\alpha' r} + k\pi \tag{2.3}$$

schreiben, oder

$$\vartheta = \operatorname{arccotg} \frac{\omega r^2 + rr^{\cdot}}{-W} + k\pi . \tag{2.4}$$

Ähnlich, wie die Phase α, β ein System bildet, wo jede zwei Phasen sich um das ganzzahlige Vielfache der Zahl π voneinander unterscheiden, bildet auch die Polarfunktion ein System, in dem jede Funktion durch die Beziehung gegeben wird

$$\vartheta_{\nu}(t) = \vartheta_0(t) + \nu\pi \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.5}$$

Aus der Beziehung (2.4) erhalten wir (für $k = 0$)

$$(r^2)^{\cdot} + 2\omega r^2 = -2W \operatorname{cotg} \vartheta \tag{2.6}$$

Ähnlich aus (2.2) folgt

$$\left(\frac{1}{\alpha'}\right)^{\cdot} + 2\omega \frac{1}{\alpha'} = 2 \operatorname{cotg} \vartheta \tag{2.7}$$

und endlich aus (2.3)

$$\alpha' \operatorname{cotg} \vartheta = \omega + (\ln r)^{\cdot} \tag{2.8}$$

Die Beziehungen (2.6), (2.7) sind die linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung, die nicht homogen hinsichtlich der Funktionen r^2 und $\frac{1}{\alpha'}$ sind.

Bemerkung 2.2.: Für $\omega = 0$ bekommen wir die Beziehungen (8) § 6 in [1].

Durch die Lösung der Gleichung (2.6) bekommen wir

$$r^2 = e^{-2\int \omega dt}\left(C - 2W \int e^{2\int \omega\, dt} \operatorname{cotg} \vartheta\, dt\right) . \tag{2.9}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen $r(t_o) = r_o$ und der Beziehung $-W = r_o^2 \,\alpha_o^{\bullet}$ (wo $\alpha_o^{\bullet} = \alpha^{\bullet}(t_o)$) erhält die Formel (2.9) die Gestalt

$$r^2 = r_o^2 \, e^{-2\int_{t_o}^{t} \omega(w)dw} \left(1 + 2\alpha_o^{\bullet} \int_{t_o}^{t} e^{2\int_{t_o}^{w} \omega(x)dx} \operatorname{cotg} \vartheta(w)dw\right) \tag{2.10}$$

<u>Satz 2.1.: Die Funktion</u> $\int_{t_o}^{t} e^{2\int_{t_o}^{w} \omega(x)dx} \operatorname{cotg} \vartheta(w)dw = D$ <u>ist im Intervall</u> j <u>stets weningstens einseitig begrenzt.</u>

<u>B e w e i s</u>: Aus der Formel (2.10) geht hervor, daß

$$1 + 2\,\alpha_o^{\bullet} D > 0 \tag{2.11}$$

Für $\alpha_o^{\bullet} > 0$ gilt

$$D > -\frac{1}{2\,\alpha_o^{\bullet}}$$

und für $\alpha_o^{\bullet} < 0$ gilt

$$D < -\frac{1}{2\,\alpha_o^{\bullet}}$$

Im ersten Fall ist also die Funktion D von unten und im zweiten von oben begrenzt.

Durch die Lösung (2.7) ergibt sich

$$\alpha^{\bullet} = \frac{1}{e^{-2\int \omega dt}\left(C + 2\int e^{2\int \omega dt} \operatorname{cotg} \vartheta \, dt\right)} \tag{2.12}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen $\alpha'(t_o) = \alpha'_o$ nimmt die Formel folgende Gestalt an:

$$\alpha' = \frac{\alpha'_o}{e^{-2\int_{t_o}^{t}\omega(w)dw}\left(1 + 2\alpha'_o \int_{t_o}^{t} e^{2\int_{t_o}^{w}\omega(x)dx} \operatorname{cotg}\vartheta(w)dw\right)} \tag{2.13}$$

Aus der Formel (2.12) erhalten wir durch Integration

$$\alpha = C_2 + \int \frac{1}{e^{-2\int\omega dt}\left(C_1 + 2\int e^{2\int\omega dt} \operatorname{cotg}\vartheta dt\right)}\, dt \,, \tag{2.14}$$

wo C_1, C_2 durch die Anfangsbedingungen $\alpha'(t_o) = \alpha'_o$, $\alpha(t_o) = \alpha_o$ gegeben werden.

Die Beziehung zwischen dem Träger $q(t)$ und der verallgemeinerten Polarfunktion drückt der Satz aus:

<u>Satz 2.2.</u>: <u>Im Intervall</u> j <u>existiert genau ein Träger</u> q <u>einer Differentialgleichung</u> (q), <u>der durch die verallgemeinerte Polarfuntion</u> ϑ <u>mit den Anfangsbedingungen</u> $\alpha(t_o) = \alpha_o$, $\alpha'(t_o) = \alpha'_o$, <u>durch die Formel</u>

$$q = \omega^2 - \omega' - \frac{\alpha'_o}{\sin^2\vartheta} \,. \tag{2.15}$$

$$\cdot\ \frac{\alpha'_o + \vartheta' e^{-2\int_{t_o}^{t}\omega(w)dw}\left(1 + 2\alpha'_o \int_{t_o}^{t} e^{2\int_{t_o}^{w}\omega(x)dx} \operatorname{cotg}\vartheta(w)dw\right)}{e^{-4\int_{t_o}^{t}\omega(w)dw}\left(1 + 2\alpha'_o \int_{t_o}^{t} e^{2\int_{t_o}^{w}\omega(x)dx} \operatorname{cotg}\vartheta(w)dw\right)^2}$$

bestimmt ist.

B e w e i s: Nach [1] ist der Träger q einseitig mittels der ersten Phase α durch die Gleichung

$$-\{\alpha, t\} - \alpha^{\cdot 2}(t) = q(t)$$

bestimmt.
Nach Umordnung

$$q = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^{\cdot\cdot\cdot}}{\alpha^{\cdot}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\alpha^{\cdot\cdot 2}}{\alpha^{\cdot 2}} - \alpha^{\cdot 2} \tag{2.16}$$

Bezeichnen wir

$$e^{-2\int \omega\, dt} = A \tag{2.17}$$

$$e^{2\int \omega\, dt} \operatorname{cotg} \vartheta\, dt = B$$

ergibt sich aus (2.12)

$$\alpha' = \frac{1}{AC + 2AB} \tag{2.18}$$

Daraus

$$\alpha'' = \frac{-2\omega CA - 4\omega AB + 2\operatorname{cotg}\vartheta}{(AC + 2AB)^2} \tag{2.19}$$

und danach

$$\alpha''' = \frac{\left(2\omega^{\cdot} CA - 4\omega^2 CA + 4\omega^{\cdot} AB - 8\omega^2 AB + 4\omega \operatorname{cotg}\vartheta + \frac{2\vartheta'}{\sin^2\vartheta}\right)(AC+2AB)}{(AC + 2AB)^3} +$$

$$+\frac{2(-2\omega CA - 4\omega AB + 2\operatorname{cotg}\vartheta)^2}{(AC + 2AB)^3} \tag{2.20}$$

Durch Einsetzen von (2.18), (2.19), (2.20) in (2.16) ergibt sich nach der Umformung

$$q = \omega^2 - \dot{\omega} - \frac{1 + \dot{\vartheta}(CA + 2AB)}{\sin^2\vartheta(CA + 2AB)^2} \,. \tag{2.21}$$

Zum Einsetzen der Anfangsbedingungen können wir schon die ausgerechneten Beziehungen (2.12), (2.13) benutzen.

Der Vergleich und Einsetzen von (2.17) in (2.21) ergibt die Formel (2.15). Analog wie im Beweis des Satzes aus dem Artikel 2 § 6 in [1] geht hervor, da3 genau eine Funktion q solcher angegeben Eigenschaften (beim gewählten ω) existiert.

<u>Bemerkung 2.3.</u>: Sind a, b die Konstanten, d.h. $\omega = \frac{a}{b}$ ist auch eine Konstante, ergibt sich aus (2.10) (für $b \neq 0$)

$$r^2 = r_o^2 \, e^{-2\omega(t-t_o)} \left(1 + 2\dot{\alpha}_o \cdot F\right), \tag{2.22}$$

wo

$$F = \int_{t_o}^{t} e^{2\omega(w-t_o)} \operatorname{cotg} \vartheta(w)\,dw \tag{2.23}$$

Ähnlich aus (2.13)

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_o \cdot \frac{1}{e^{-2\omega(t-t_o)} \left(1 + 2\dot{\alpha}_o F\right)} \tag{2.24}$$

und nach der Umformung

$$\alpha = \alpha_o + \dot{\alpha}_o \int_{t_o}^{t} \frac{dx}{e^{-2\omega(t-t_o)} \left(1 + 2\dot{\alpha}_o \int_{t_o}^{x} e^{2\omega(w-t_o)} \operatorname{cotg} \vartheta(w)\,dw\right)} \tag{2.25}$$

Die Formel (2.15) nimmt folgende Gestalt an:

$$q = \omega^2 - \alpha_0' \frac{\alpha_0' + \vartheta' e^{-2\omega(t-t_0)} (1 + 2\alpha_0' F)}{\left[e^{-2\omega(t-t_0)} (1 + 2\alpha_0' F)\right]^2 \sin^2\vartheta}, \qquad (2.26)$$

wo F durch die Formel (2.23) gegeben ist.
Insofern $\omega = 0$, ergibt sich aus (2.23), (2.24) und (2.26) die Formeln (9), (11) und (12) § 6 in [1].

3. Die verallgemeinerte Radonsche Funktion

Definition 3.1.: Die verallgemeinerte Radonsche Funktion der ξ Basis (u, v) ist eine Funktion, die durch die Gleichung

$$\xi = \beta + \alpha \quad (t \in j) \quad \text{gegeben ist,} \qquad (3.1.)$$

wo β die verallgemeinerte zweite Phase der Basis (u, v) und α die erste Phase derselben Basis ist. Aus den Beziehungen

$$\vartheta = \beta - \alpha, \qquad \xi = \beta + \alpha$$

geht

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi - \vartheta), \quad \beta = \frac{1}{2}(\xi + \vartheta) \qquad (3.2)$$

hervor.

Satz 3.1.: Ist $\omega^2 - \omega' - q > 0$ und $W < 0$, dann gilt

$$-\xi' < \vartheta < \xi'$$

und ist $\omega^2 - \omega' - q > 0$ und $W > 0$, dann gilt

$$\xi' < \vartheta' < - \xi' \tag{3.4}$$

B e w e i s: Aus den Beziehungen (3.2) geht

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\xi' - \vartheta') , \quad \beta' = \frac{1}{2}(\xi' + \vartheta')$$

hervor.

Unter der Voraussetzung $\omega^2 - \omega' - q > 0$ und $-W > 0$ sind nach dem Satz (3.2) in (5) $\alpha' > 0, \ \beta' > 0$.

Daraus nach (3.2)

$$\xi' - \vartheta' > 0, \quad \xi' + \vartheta' > 0 ,$$

so da3

$$- \xi' < \vartheta' < \xi' .$$

Unter der Vorsussetzung $\omega^2 - \omega' - q > 0$ und $-W < 0$ sind nach dem Satz (3.2) in (5) $\alpha' < 0, \ \beta' < 0$.

Es folgt wieder aus der Formel (3.2)

$$\xi' - \vartheta' < 0, \quad \xi' + \vartheta' < 0 ,$$

so da3

$$\xi' < \vartheta' < - \xi' .$$

Nun finden wir die Beziehung zwischen dem Träger q, der verallgemeinerten Polarfunktion ϑ und der verallgemeinerten Radonschen Funktion ξ .

Aus der Formel (1.2) ergibt sich

$$\sin^2 \vartheta = \frac{W^2}{p^2 r^2} \tag{3.5}$$

und aus (3.2)

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\xi' - \vartheta')$$
$$\beta' = \frac{1}{2}(\xi' + \vartheta') \, . \tag{3.6}$$

Einsetzen der Beziehungen (3.5) und (3.6) in (1.3) ergibt

$$q = \omega^2 - \omega' - \frac{(\xi' + \vartheta')\, W^2}{(\xi' - \vartheta')\, r^4 \sin^2\vartheta} \, . \tag{3.7}$$

Es gilt offensichtlich

$$\beta' \operatorname{cotg}\vartheta = (\alpha' + \vartheta')\operatorname{cotg}\vartheta = \alpha' \operatorname{cotg}\vartheta + (\ln|\sin\vartheta|)' .$$

Wendet man die Formel (2.8) an, so erhalten wir

$$\beta' \operatorname{cotg}\vartheta = \omega + (\ln r)' + (\ln|\sin\vartheta|)' .$$

Nach der Umformung (wenn wir die Beziehung (2.8) benutzen) folgt hieraus

$$\alpha' \operatorname{cotg}\vartheta + \beta' \operatorname{cotg}\vartheta = 2\omega + 2(\ln r)' + (\ln|\sin\vartheta|)'$$

und weiter

$$\xi' \operatorname{cotg}\vartheta = 2\omega + 2(\ln r)' + (\ln|\sin\vartheta|)' \tag{3.8}$$

eventuell

$$\xi' \operatorname{cotg}\vartheta = 2\omega + (\ln r^2|\sin\vartheta|)' \tag{3.9}$$

Setzen wir $W^2 = \alpha_o'^2 r_o^4$ in (3.7) ein, so erhalten wir

$$q = \frac{-(\xi' + \vartheta')\, \alpha_o'^2 r_o^4}{(\xi' - \vartheta')\, r^4 \sin^2\vartheta} + \omega^2 - \omega' \tag{3.10}$$

Diese Formel gibt die verallgemeinerte Radonsche Form des Trägers q an, wobei r die Lösung der Gleichung (3.8) ist. Bei der Lösung gehen wir aus

$$(\ln r)' = \frac{1}{2}\,\xi' \operatorname{cotg} \vartheta - \omega - \frac{1}{2}\,(\ln|\sin \vartheta|)'$$

heraus.

Integrieren wir in den Grenzen von t_o bis t, so erhalten wir

$$\ln r = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{t} \xi'(w) \operatorname{cotg} \vartheta(w)\,dw - \int_{t_o}^{t} \omega(w)\,dw - \frac{1}{2}\ln|\sin \vartheta| +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|\sin \vartheta_o| + \ln r_o \quad ,$$

wo $r_o = r(t_o)$ und $\vartheta_o = \vartheta(t_o)$.

Nach der Umformung

$$r^2 = \frac{r_o^2 \sin \vartheta_o \cdot e^{\int_{t_o}^{t} \xi'(w) \operatorname{cotg} \vartheta(w)\,dw}}{e^{2\int_{t_o}^{t} \omega(w)\,dw} \sin \vartheta}$$

Nach Einsetzen in (3.10) und Vereinfachung erhalten wir

$$q = \omega^2 - \omega' - \frac{(\xi' + \vartheta')\,\alpha_o'^2}{(\xi' - \vartheta')\sin^2\vartheta_o} \cdot \frac{e^{4\int_{t_o}^{t} \omega(w)\,dw}}{e^{2\int_{t_o}^{t} \xi'(w) \operatorname{cotg} \vartheta(w)\,dw}} \qquad (3.11)$$

was die endliche Formel der verallgemeinerten Rahonschen Polarform des Trägers q ist.

__Bemerkung 3.1.__: Wenn ω eine Konstante ist, dann nimmt die Formel (3.11) folgende Gestalt an:

$$q = \omega^2 - \frac{(\varrho' + \vartheta')\,\alpha_0'^2}{(\varrho' - \vartheta')\sin^2\vartheta_0} \cdot \frac{e^{4\omega(t-t_0)}}{e^{2\int_{t_0}^{t}\varrho'(w)\operatorname{cotg}\vartheta(w)\,dw}} .$$

Wenn $\omega = 0$, so erhalten wir die Formel (23) § 6 in [1].

LITERATUR

/1/ B o r ů v k a, O.: Lineare Differentialtransformationen 2.Ordnung, Berlin 1967

/2/ H á č i k, M.: O istých vlastnostiach integrálov s váhovými funkciami $\alpha(t)$, $\beta(t)$ lineárnej diferenciálnej rovnice 2.radu Jacobiho typu, kandidátská práce

/3/ H o š e k, J.: Teorie průvodních rovnic lineární diferenciální rovnice druhého řádu, kandidátská práce

/4/ L a i t o ch, M.: L'équation associeé dans la théorie des transformations des équations différentielles du second ordre, Acta Univ.Palactianae Olomucensis, F.R.N., Tom 12, 1963, 45-62

/5/ V o t a v a, M.: Některé vlastnosti druhé zobecnění fáze diferenciální rovnice 2.řádu Jacobiho typu, Sborník Pedagogické fakulty v Ostravě (v tisku)

SHRNUTÍ

NĚKTERÉ VLASTNOSTI ZOBECNĚNÉ POLÁRNÍ A RADONOVY FUNKCE

MILAN VOTAVA

V práci jsou studovány některé pojmy z teorie fází uspořádané dvojice řešení diferenciální rovnice

$$y'' = q(t)\, y \qquad (q)$$

zavedené akademikem Borůvkou z hlediska průvodních rovnic s váhovými funkcemi k rovnici (q). Tímto způsobem jsou zavedeny pojmy zobecněné polární a Radonovy funkce a vyšetřovány některé jejich vlastnosti.

РЕЗЮМЕ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА "ОБОБЩЕННОЙ" ПОЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ РАДОНА

МИЛАН ВОТАВА

В работе исследуются некоторые понятия из теории фаз упорядоченной пары решений дифференциального уравнения

$$y'' = q(t)\, y \qquad (q)$$

введенные академиком Борувкой с точки зрения сопроводительных уравнений с весовыми функциями к уравнению (q).
Таким образом, введено понятие обобщенной полярной функции и функции Радона и использованы некоторые их свойства.

AUPO, Fac.r.nat.85, Mathematica XXV, (1986)