Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica

František Machala

Über die Fortsetzung einer Anordnung der affinen Klingenbergschen Ebene zu einer Anordnung der projektiven Klingenbergschen Ebene. II.

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 23 (1984), No. 1, 107--136

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120142`

ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM
1984 VOLUMEN 79 PAG. 107–136

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Ladislav Sedláček, Prof., RNDr., CSc.

ÜBER DIE FORTSETZUNG EINER ANORDNUNG DER AFFINEN KLINGENBERGSCHEN EBENE ZU EINER ANORDNUNG DER PROJEKTIVEN KLINGENBERGSCHEN EBENE

FRANTIŠEK MACHALA

(*Vorgelegt am 30. April 1983*)

II

Die vorliegende Arbeit stellt den zweiten Teil der Arbeit [4] dar und befasst sich mit dem Beweis des fundamentalen Theorems über die Fortsetzung einer Anordnung der affinen Klingenbergschen Ebene zu einer Anordnung der projektiven Klingenbergschen Ebene. Außerdem knüpft sie eng an die Artikel [2] und [3] an.

Theorem. *Es sei π eine PK-Ebene und α eine durch eine Gerade u von π erklärte AK-Ebene. Ist α angeordnet und genügt sie den Forderungen* (A1)–(A4) *von* [3] *und* [4], *dann π läßt sich im Sinne von* [4], *Definition* 3, *konvex geordnen.*

Ferner sei α eine durch eine Gerade u der PK-Ebene π erklärte AK-Ebene, die den Forderungen (A1)–(A4) von [3] und [4] genügt. In π seien vier Punkte O, E, U, V mit $U, V \in u$; $\bar{O}, \bar{E} \notin \bar{u}$ so gewählt, daß keine drei von $\bar{O}, \bar{E}, \bar{U}, \bar{V}$ in einer Geraden der projektiven Ebene π' ([3], Def. 6) enthalten sind und sei $x = OU$, $y = OV$, $e = VE$, $e' = EU$ gesetzt.

Es sei p eine Gerade von π mit $\bar{p} \neq \bar{u}$. Die Mengen p_α, $\mathcal{U}(p)$ der eigentlichen und uneigentlichen Punkte von p sind elementenfrei mit $p = p_\alpha \cup \mathcal{U}(p)$. Da α angeordnet ist, so ist eine Zwischenrelation auf p_α gegeben und nach [4], (B1), (B2) wird genau eine Anordnung von p_α erklärt, welche die zugehörige Zwischenrelation reproduziert. Nach [4], (U1) ist eine Zwischenrelation auch auf $\mathcal{U}(p)$ definiert und durch [4], (B3), (B4) wird genau eine Anordnung von $\mathcal{U}(p)$ erklärt, welche diese Zwischenrelation reproduziert. Ist p eine Gerade von π mit $\bar{p} = \bar{u}$, dann sind die Mengen $\mathcal{V}(p)$ und $\mathcal{W}(p)$ der zu V benachbarten und fernen Punkte elementenfrei mit $p = \mathcal{W}(p) \cup \mathcal{V}(p)$. Nach [4], (U2), (U3) sind die Zwischenrelationen auf $\mathcal{V}(p)$ und $\mathcal{W}(p)$ definiert und durch [4], (B5), (B6) wird genau eine Anordnung von $\mathcal{W}(p)$ bzw. $\mathcal{V}(p)$ erklärt.

Ferner wir nehmen an, daß die Zwischenrelationen und Anordnungen von $p_\alpha, \mathscr{U}(p), \mathscr{V}(p), \mathscr{W}(p)$ stets durch (U1)–(U3) und (B1)–(B6) bestimmt sind. Nach [2], Satz 17 läßt sich eine Trennrelation | auf jeder Geraden p von π folgendermaßen definieren:

(T1) Sind die Punkte A, B, C, D in einer der Mengen $p_\alpha, \mathscr{U}(p), \mathscr{W}(p), \mathscr{V}(p)$ enthalten, dann $AB \mid CD \Leftrightarrow ((ACB) \wedge (CBD)) \vee ((ACB) \wedge (CAD)) \vee ((ADB) \wedge \wedge (CBD)) \vee ((ADB) \vee (CAD))$.

(T2) Gilt $A, B, C \in p_\alpha, D \in \mathscr{U}(p)$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{U}(p), D \in p_\alpha$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{W}(p), D \in \mathscr{V}(p)$ bzw. $A, B, C \in \mathscr{V}(p), D \in \mathscr{W}(p)$, dann $AB \mid CD \Leftrightarrow CD \mid \mathrm{AB} \Leftrightarrow (ACB)$.

(T3) Gilt $A, C \in p_\alpha, B, D \in \mathscr{U}(p)$ bzw. $A, C \in \mathscr{W}(p)$, $B, D \in \mathscr{V}(p)$ und sind $\leqq, \leqq'$ die oben definierten Anordnungen von $p_\alpha, \mathscr{U}(p)$ bzw. von $\mathscr{W}(p), \mathscr{V}(p)$, dann $AB \mid CD \Leftrightarrow BA \mid CD \Leftrightarrow CD \mid AB \Leftrightarrow (A \leqq C \wedge B \leqq' D) \vee (C \leqq A \wedge D \leqq' B)$.

Zuerst beweisen wir die folgenden Behauptungen (S6) und (S7):

(S6) *Ist eine Trennrelation auf jeder Geraden von π durch die Vorschriften* (T1) *bis* (T3) *angeführt, dann ist jede Teilmenge $N(p, P)$ konvex* ([3], *Bem.* 3, [2], *Def.* 4).

Beweis. Da die Forderung (A1) in α gilt, ist α nach [3], Bemerkung 7, konvex geordnet. Für Punkte $A, B, C \in p_\alpha$ mit (ACB) ergibt sich also $\bar{A} = \bar{B} \Rightarrow \bar{A} = \bar{C}$.

1. Es sei die Gerade p von π eigentlich.

a) Es sei $P \in p_\alpha$ und $A, B \in N(p, P)$. Wir wählen einen Punkt $X \in \mathscr{U}(p)$ und nehmen $AB \mid CX$ für einen $C \in p$ an. Dann muß $C \in p_\alpha$ gelten, denn $AB \mid CX$ ist für $A, B \in p_\alpha$ und $C, X \in \mathscr{U}(p)$ nicht definiert. Nach (T2) ergibt sich dann $AB \mid CX \Rightarrow \Rightarrow (ACB)$. Wegen $A, B \in N(p, P)$ ist $\bar{A} = \bar{B}$, woraus $\bar{A} = \bar{C}$, also $C \in N(p, P)$, folgt. Nach [2], Def. 4 ist $N(p, P)$ konvex.

b) Es sei $P \in \mathscr{U}(p)$ und seien $A, B \in N(p, P)$, also $A, B \in \mathscr{U}(p)$. Sind $X \in p_\alpha$ und $C \in p$ Punkte mit $AB \mid CX$, dann ist $C \in \mathscr{U}(p)$ und nach (T2) gilt (ACB). Wählen wir einen Punkt S mit $\bar{S} \notin \bar{p}$ und setzen wir $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, dann wegen $\bar{A} = \bar{B}$ gilt $\bar{a} = \bar{b}$ und nach [4], (U1) erhalten wir $(ACB) \Rightarrow (acb)$. Ferner wir wählen eine Gerade m mit $\bar{m} \nparallel \bar{p}$, $\bar{S} \notin \bar{m}$ und setzen $A' = m \sqcap a$, $B' = m \sqcap b$, $C' = m \sqcap c$. Nach [3], Def. 10 gilt dann $(acb) \Rightarrow (A'C'B')$. Wegen $\bar{a} = \bar{b}$ ergibt sich $\bar{A}' = \bar{B}'$ und $\bar{A}' = \bar{C}'$, also $\bar{a} = \bar{c}$ und $\bar{A} = \bar{C}$. Mithin ist $C \in \in N(p, P)$ und die Menge $N(p, P)$ ist konvex.

2. Es sei p uneigentlich.

a) Es seien $P \in \mathscr{W}(p)$ und $A, B \in N(p, P)$. Sind $X \in \mathscr{V}(p)$ und $C \in p$ Punkte mit $AB \mid CX$, dann nach (T1) bis (T3) ist $C \in \mathscr{W}(p)$ und nach (T2) gilt (ACB). Wählen wir einen Punkt S und setzen wir $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, dann nach (U3) ist $(ACB) \Rightarrow (acb)$. Wegen $\bar{A} = \bar{B}$ ergibt sich $\bar{a} = \bar{b}$ und nach [3], Def. 11 folgt hieraus $\bar{a} = \bar{c}$, denn α ist konvex. Somit gilt $\bar{A} = \bar{C}$ und $C \in N(p, P)$.

b) Es seien $P \in \mathscr{V}(p)$ und $A, B \in N(p, P) = \mathscr{V}(p)$. Sind $X \in \mathscr{W}(p)$ und $C \in p$ Punkte mit $AB \mid CX$, dann ist $C \in \mathscr{V}(p)$ und nach (T2) gilt (ACB). Wählen wir einen Punkt S und setzen wir $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, so nach (U2) ist $(ACB) \Rightarrow (acb)$. Wegen $\bar{A} = \bar{B}$ gilt $\bar{a} = \bar{b}$ und $\bar{a} = \bar{c}$, also $\bar{A} = \bar{C}$.

(S7) *Sind A, B, C, D voneinander ferne Punkte einer Geraden p von π und A', B', C', D' weitere Punkte von p mit $\bar{A} = \bar{A}'$, $\bar{B} = \bar{B}'$, $\bar{C} = \bar{C}'$. $\bar{D} = \bar{D}'$, dann gilt $AB \mid CD \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.*

Beweis. Wir untersuchen einzelne Fälle:

1. Es sei die Gerade p eigentlich und seien $A, B, C, D \in p_\alpha$. Da $AB \mid CD$ gilt, können wir nach (T1) z. B. $(ACB) \wedge (CBD)$ annehmen. Nach [6], Satz 11 ergibt sich daraus $(A'C'B') \wedge (C'B'D')$, was $A'B' \mid C'D'$ bedeutet. Analog läßt sich in weiteren unter (T1) angeführten Fällen verfahren.

2. Es sei p uneigentlich und seien $A, B, C, D \in \mathscr{W}(p)$. Wir nehmen erneut $(ACB) \wedge$ $\wedge (CBD)$ an. Setzen wir $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, $d = SD$, wo S ein eigentlicher Punkt ist, dann a, b, c, d sind voneinander fern mit $\bar{a} = \bar{a}'$, $\bar{b} = \bar{b}'$, $\bar{c} = \bar{c}'$, $\bar{d} = \bar{d}'$ und nach (U3) gilt $(ACB) \Rightarrow (acb)$, $(CBD) \Rightarrow (cbd)$. Es sei m eine Gerade mit $m \parallel y$ und $\bar{S} \notin \bar{m}$. Setzen wir $A_1 = m \sqcap a$, $B_1 = m \sqcap b$, $C_1 = m \sqcap c$, $D_1 = m \sqcap d$ und $A_1' = m \sqcap a_1'$, $B_1' = m \sqcap b_1'$, $C_1' = m \sqcap c_1'$, $D_1' = m \sqcap d_1'$, dann A_1, B_1, C_1, D_1 sind voneinander fern mit $\bar{A}_1' = \bar{A}_1$, $\bar{B}_1' = \bar{B}_1$, $\bar{C}_1' = \bar{C}_1$, $\bar{D}_1' = \bar{D}_1$. Nach [3], Definition 11 ergibt sich $(acb) \Rightarrow (A_1C_1B_1)$, $(cbd) \Rightarrow (C_1B_1D_1)$ und nach [6], Satz 11 ist $(A_1'C_1'B_1')$, $(C_1'B_1'D_1')$, also $(a_1'c_1'b_1')$, $(c_1'b_1'd_1')$. Hieraus folgt $(A'C'B') \wedge$ $\wedge (C'B'D')$ und $A'B' \mid C'D'$.

3. Es sei p eigentlich und seien $A, B, C \in p_\alpha$, $D \in \mathscr{U}(p)$. Nach (T2) ergibt sich $AB \mid CD \Rightarrow (ACB)$, woher nach [6], Satz 11 $(A'C'B')$ folgt, was $A'B' \mid C'D'$ bedeutet.

4. Es sei p uneigentlich und seien $A, B, C \in \mathscr{W}(p)$, $D \in \mathscr{V}(p)$. Dann gilt $AB \mid CD \Rightarrow$ $\Rightarrow (ACB)$ und entsprechend zum Teil 2 beweist man, daß auch $(A'C'B')$ und folglich $A'B' \mid C'D'$ ist.

Da α angeordnet ist, enthält jede Gerade von α drei voneinander ferne Punkte und folglich enthält jede Gerade von π vier voneinander ferne Punkte. Auf jeder Geraden von π ist eine Trennrelation mit (T1) bis (T3) erklärt und gemäß (S6) ist π konvex. Nach [4], Definition 3 genügt es zu zeigen, daß die Trennrelationen durch Z-Projektionen reproduziert werden.

Es sei $\varphi(S, g, g')$ eine Z-Projektion und seien A, B, C, D Punkte von g, von denen mindestens drei zu S fern sind. Ferner seien A', B', C', D' derartige Punkte von g', daß S, A, A' bzw. S, B, B' bzw. S, C, C' bzw. S, D, D' auf einer Geraden a bzw. b bzw. c bzw. d liegen. Ist einer der Punkte A, B, C, D benachbart zu S, dann wird angenommen, daß die zugehörige Gerade von a, b, c, d fern zu g ist. Nach [4], Definition 2 sollen wir $AB \mid CD \Rightarrow A'B' \mid C'D'$ beweisen. Dazu untersuchen wir jeden Fall folgender Übersicht:

Die Lage des Punktes S:

I. S ist eigentlich.

II. S ist uneigentlich.

Die Geraden g, g':

1. g, g' sind eigentlich.
2. g ist eigentlich und g' ist uneigentlich.

3. g ist uneigentlich und g' ist eigentlich.
4. g, g' sind uneigentlich.

Die Punkte A, B, C, D:

a) Alle Punkte sind eigentlich.
b) Drei Punkte sind eigentlich und ein ist uneigentlich.
c) Zwei Punkte sind eigentlich und zwei sind uneigentlich.
d) Ein Punkt ist eigentlich und drei sind uneigentlich.
e) Alle Punkte sind uneigentlich.

Die Punkte A', B', C', D':

Wir betrachten die Möglichkeiten α), β), γ), δ), ε) analog zu a), b), c), d), e).

Es sei also $AB \mid CD$. Im Fall a) wird stets $(ACB) \wedge (CBD)$ angenommen. Die anderen Möglichkeiten von (T1) kann man ähnlich durch einen Zeichenwechsel nachprüfen. Sind also alle A, B, C, D eigentlich, dann ergibt sich: Aus $B = C$ folgt $\bar{B} \neq \bar{S}$, denn im Gegenteil wäre B, C benachbart zu S. Mithin gibt es genau eine Gerade SB mit $SB = SC$ und wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ erhält man daher $B' = C'$. Ist $B \neq C$, dann nach [1], (Z5) ergibt sich $(ACB) \wedge (CBD) \Rightarrow (ABD)$ und gemäß [1], (Z6) ist $(ACB) \wedge (ABD) \Rightarrow (ACD)$.

Ad (I, 1, a, α) Aus $B = C$ folgt nach vorausgehendem $B' = C'$. Da A', B', C', D' eigentlich sind, gilt nach [1], (Z5c) $(A'C'B') \wedge (C'B'D')$, woher sich nach (T1) $A'B' \mid C'D'$ ergibt. Ferner sei $B \neq C$. Für die gegebenen Punkte können die folgenden Möglichkeiten eintreten:

(1) $\neg(ASA') \wedge \neg(BSB')$. Da mindestens zwei von den Punkten A, B, C fern zu S sind und (ACB) gilt, erhält man nach [3], Satz 5 $\neg(CSC')$. Für den Punkt D ergibt sich dann

(i) $\neg(DSD')$,
(ii) (DSD').

(2) $(ASA') \wedge (BSB')$. Nach [3], Satz 5 ist (CSC') und für den Punkt D ergibt sich erneut

(i) $\neg(DSD')$,
(ii) (DSD').

(3) $\neg(ASA') \wedge (BSB')$. Aus $\neg(DSD')$ folgt nach [3], Satz 5 $\neg(BSB')$, denn gilt $\neg(ASA')$ und (ABD). Dies ist aber ein Widerspruch und folglich ergibt sich (DSD'). Für den Punkt C können zwei Möglichkeiten eintreten:

(i) $\neg(CSC')$,
(ii) (CSC').

(4) $(ASA') \wedge \neg(BSB')$. Ähnlich wie unter (3) läßt sich $\neg(DSD')$ beweisen. Außerdem gilt

(i) $\neg(CSC')$,
(ii) (CSC').

Wir untersuchen einzelne Fälle:

Ad (1). Nach [3], Satz 4 ist $\neg(ASA') \wedge \neg(BSB') \wedge (ACB) \Rightarrow (A'C'B')$.

(i) Nach [3], Satz 4 ist $\neg(CSC') \wedge \neg(DSD') \wedge (CBD) \Rightarrow (C'B'D')$ und gemäß (T1) ergibt sich $(A'C'B') \wedge (C'B'D') \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

(ii) Gilt $A' = C'$, dann ist $(A'C'B') \wedge (C'A'D')$ und nach (T1) ergibt sich $A'B' \mid C'D'$. Ferner sei $C' = D'$. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ gilt $SC' = SD'$ und folglich $C, D \in SC'$. Unserer Voraussetzung nach ist $\bar{C} \neq \bar{S} \vee \bar{D} \neq \bar{S}$, es sei z. B. $\bar{C} \neq \bar{S}$. Aus $\bar{C} \neq \bar{D}$ folgt $SC' = SC = CD = g$ und $A, B \in SC'$, also $A' = B' = C' = D'$, was $A'B' \mid C'D'$ bedeutet. Nun nehmen wir $\bar{C} = \bar{D}$ an. Wegen $\neg(CSC')$ gilt nach [1], (Z2) $(SCC') \vee (SC'C)$. Ist (SCC'), dann nach [1], (Z5b) erhält man $(C'CS) \wedge (D'SD) \Rightarrow (C'CS) \wedge (C'SD) \Rightarrow (CSD)$. Wegen $\bar{C} = \bar{D}$ folgt hieraus $\bar{C} = \bar{S}$, denn α ist konvex. Dies ist aber ein Widerspruch. Es sei nun $(SC'C)$. Nach [1], (Z5) ergibt sich $(CC'S) \wedge (C'SD) \Rightarrow (CSD) \vee C' = S$, also wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ gilt (CSD), was wieder ein Wiederpruch ist. Die Voraussetzung $C' = D'$ impliziert also $\bar{C} \neq \bar{D}$ und folglich $A'B' \mid C'D'$. Analog läßt sich im Fall $A' = D'$ verfahren. Ferner nehmen wir an, daß die Punkte A', C', D' voneinander verschieden sind. Nach [1] (Z2) gilt $(A'D'C') \vee (A'C'D') \vee (C'A'D')$. Gemäß [3], Satz 5 erhält man $(A'D'C') \wedge \neg(ASA') \wedge \neg(CSC') \Rightarrow \neg(DSD')$, also ein Widerspruch zu (DSD'). Es sei $(A'C'D')$. Da A', C', D' verschieden sind, ergibt sich nach [3], Satz 4 $(ACD) \wedge (A'C'D') \wedge \neg(ASA') \Rightarrow \neg(DSD')$, was wieder ein Widerspruch ist. Deswegen gilt $(C'A'D')$ und folglich $(A'C'B') \wedge (C'A'D') \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (2). Wegen (ASA') (BSB') und (ACB) ist $(A'C'B')$.

(i) Entsprechend zu (1) (ii) läßt sich zeigen, daß $(C'A'D')$ und folglich $A'B' \mid C'D'$ gilt.

(ii) Es gilt $(CSC') \wedge (DSD') \wedge (CBD) \Rightarrow (C'B'D')$ und $(A'C'B') \wedge (C'B'D') \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (3). Nach [1], (Z2) gilt $(A'B'D') \vee (B'A'D') \vee (A'D'B')$. Fallen einige Punkte von A', B', D' zusammen, dann verfahren wir analog zu Ad (1), (ii). Es seien also A', B', D' verschieden. Nach [3], Satz 4 wir erhalten dann $(ABD) \wedge (A'B'D') \wedge \neg(ASA') \Rightarrow \neg(DSD')$, was ein Widerspruch ist. Gilt $(B'A'D')$, dann (BSB'), (DSD'), $(B'A'D')$ implizieren (ASA'), also wieder ein Widerspruch. Somit ist $(A'D'B')$. Für die Punkte A', C', D' ergibt sich $(A'C'D') \vee (A'D'C') \vee (C'A'D')$. Wir können erneut voraussetzen, daß A', C', D' verschieden sind. Im umgekehrten Fall läßt sich nämlich entsprechend zu Ad (1), (ii) verfahren. Nach [3], Satz 4 erhält man $(ACD) \wedge (A'C'D') \wedge \neg(ASA') \Rightarrow \neg(DSD')$, was ein Widerspruch ist. Zugleich ist $\neg(ASA') \wedge \neg(CSC') \wedge (A'D'C') \Rightarrow \neg(DSD')$, was wieder zum Widerspruch führt. Somit gilt $(C'A'D')$ und $(A'D'B')$, $(C'A'D')$ implizieren $A'B' \mid C'D'$.

(ii) Ähnlich wie unter (i) läßt sich beweisen, daß $(A'D'B')$, $(C'B'D')$ und folglich $A'B' \mid C'D'$ gilt.

Ad (4). Die Gültigkeit von $A'B' \mid C'D'$ beweisen wir analog zum Fall (3).

Ad (I, 1, a, β). 1. Wir nehmen an, daß B' uneigentlich und A', C', D' eigentlich sind. Da die Geraden b, g' einen uneigentlichen Punkt B' gemeinsam haben und $\bar{b} \neq \bar{g}'$ gilt, ist g' nach [3], (A1) in einer durch b bestimmten Halbebene enthalten.

Es sei z. B. $g' \subset H_b^+$, also auch $A', C', D' \in H_b^+$. (Fig. 1) Gilt $A \in b$, dann wegen $S, A \in a$; $S, A \in b$ und $S \neq A$ sind a, b benachbart, woher $\bar{A}' = \bar{B}'$ folgt. Dies ist aber ein Widerspruch, weil A' eigentlich und B' uneigentlich sind. Mithin gilt $A \notin b$ und analog zeigt man $C, D \notin b$. Nach [3], (H4) erhält man $A \in H_b^+ \vee A \in H_b^-$.

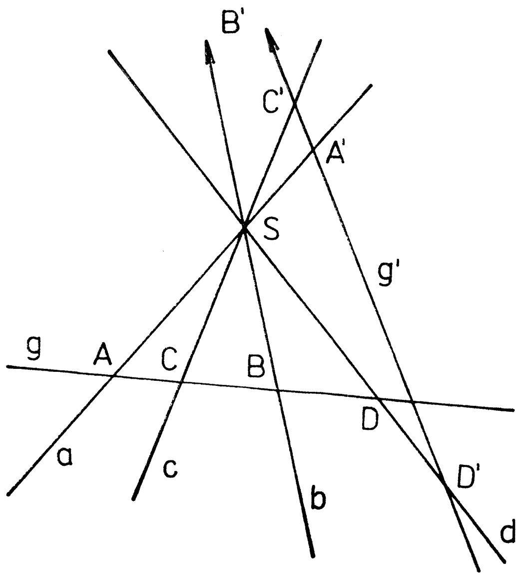

Fig. 1

Zunächst sei $A \in H_b^-$. Wegen $B \neq C$ gilt (ABD) und nach [3], (H2) folgt hieraus $D \in H_b^+$, denn $D \notin b$. Aus (CBD) und $C \notin b$ ergibt sich ähnlich $C \in H_b^-$. Die Gültigkeit von $A', C', D', D \in H_b^+$ und $A, C \in H_b^-$ impliziert dann (ASA'), (CSC') und $\neg(DSD')$. Ist $A' = C'$ bzw. $A' = D'$, dann gilt $(C'A'D')$ und nach (T2) ergibt sich $A'B' \mid C'D'$. Aus $C' = D'$ folgt $c = SC' = SD' = d$ und $S, C, D \in c$. Wird dabei $g = c$ angenommen, so ist $B \in c$, $\bar{b} = \bar{c}$ und $\bar{B}' = \bar{C}'$, was ein Widerspruch ist. Wegen $g \neq c$ und $C, D \in c$; $C, D \in g$ ergibt sich $\bar{C} = \bar{D}$. Aus (CBD) folgt dann $\bar{C} = \bar{B}$, denn α ist konvex. Dies ist aber wieder ein Widerspruch. Somit erhält man $C' \neq D'$. Ferner nehmen wir auch $A' \neq C'$ und $A' \neq D'$ an.

Für die Punkte A', C', D' ergibt sich $(A'C'D') \vee (A'D'C') \vee (C'A'D')$. Zunächst sei $(A'C'D')$. Wegen $B \neq C$ gilt (ACD) und nach [3], Satz 4 ist $(ACD) \wedge (A'C'D') \wedge$ $\wedge (ASA') \Rightarrow (DSD')$, was ein Widerspruch ist. Gilt $(A'D'C')$, dann nach [3], Satz 5 erhält man $(ASA') \wedge (CSC') \wedge (A'D'C') \Rightarrow (DSD')$, also wieder ein Widerspruch. Mithin gilt $(C'A'D')$, woher nach (T2) $A'B' \mid C'D'$ folgt.

Nun setzen wir $A \in H_b^+$ voraus. Dies impliziert $C \in H_b^+$, $D \in H_b^-$ und folglich $\neg(ASA')$, $\neg(CSC')$, (DSD'). Die Fälle $A' = C'$, $A' = D'$ und $C' = D'$ prüfen wir entsprechend zu vorangehendem nach. Es seien also A', C', D' voneinander verschieden. Nach [1], (Z2) ergibt sich $(A'C'D') \vee (A'D'C') \vee (C'A'D')$. Aus $(ACD) \wedge (A'C'D') \wedge \neg(ASA') \Rightarrow \neg(DSD')$ und $\neg(ASA') \wedge \neg(CSC') \wedge (A'D'C') \Rightarrow \Rightarrow \neg(DSD')$ folgt, daß $(A'C'D')$ und $(A'D'C')$ zum Widerspruch führen. Deswegen gilt $(C'A'D')$ und folglich $A'B' \mid C'D'$.

2. Sind A', B', D' eigentlich und C' uneigentlich, dann läßt sich analog zum Fall 1 verfahren.

3. Es seien A', B', C' eigentlich und D' uneigentlich. Die Gerade g' ist in einer durch d bestimmten Halbebene enthalten, es sei z. B. $g' \subset H_d^+$ und folglich A', B', $C' \in H_d^+$. Zugleich nehmen wir $A \in H_d^+$ an. Ist $B = C$, so gilt $B' = C'$ und $(A'C\,B')$, also $A'B \mid C'D'$. Es sei also $B \neq C$. Aus (ABD) und (CBD) folgt dann $B \in H_d^+$ und $C \in H_d^+$, woher sich $\neg(ASA')$, $\neg(BSB')$, $\neg(CSC')$ ergibt. Nach [3], Satz 4 gilt $(ACB) \wedge \neg(ASA') \wedge \neg(BSB') \Rightarrow (A'C'B')$, also $A'B' \mid C'D'$.

4. Sind B', C', D' eigentlich und A' uneigentlich, dann verfahren wir entsprechend zum Fall 3.

Ad (I, 1, a, γ) Für die Punkte A', B', C', D' gibt es folgende Möglichkeiten:
(1) a) $A', B' \in g'_\alpha$; $C', D' \in \mathcal{U}(g')$, b) $A', B' \in \mathcal{U}(g')$; $C', D' \in g'_\alpha$.
(2) a) $A', D' \in g'_\alpha$; $B', C' \in \mathcal{U}(g')$, b) $A', D' \in \mathcal{U}(g')$; $B', C' \in g'_\alpha$.
(3) a) $A', C' \in g'_\alpha$; $B', D' \in \mathcal{U}(g')$, b) $A', C' \in \mathcal{U}(g')$; $B', D' \in g'_\alpha$.

Ad (1) a) Wegen $C', D' \in \mathcal{U}(g')$ ist $\bar{C}' = \bar{D}'$, woher $\bar{c} = \bar{d}$ folgt. Zunächst sei $\bar{g} = \bar{c}$. Da unserer Voraussetzung nach $\bar{A} \neq \bar{S} \vee \bar{B} \neq \bar{S}$ gilt, können wir z. B. $\bar{A} \neq \bar{S}$ annehmen. Wegen $\bar{A}, \bar{S} \in \bar{c}$ ist $\bar{a} = \bar{S}\bar{A} = \bar{c}$, woraus sich $\bar{A}' = \bar{C}'$ ergibt. Dies aber enthält einen Widerspruch zu $A' \in g'_\alpha$ und $C' \in \mathcal{U}(g')$. Nun sei $\bar{g} \neq \bar{c}$ vorausgesetzt. Da $\bar{C}, \bar{D} \in \bar{c}$ und $\bar{C}, \bar{D} \in \bar{g}$ ist, so $\bar{C} \neq \bar{D}$ impliziert $\bar{g} = \bar{c}$, also einen Widerspruch. Somit muß $\bar{C} = \bar{D}$ gelten. Wegen (CBD) ergibt sich dann $\bar{C} = \bar{B}$, denn α ist konvex. Hieraus folgt $\bar{c} = \bar{S}\bar{C} = \bar{S}\bar{B} = \bar{b}$, also $\bar{B}' = \bar{C}'$, was wieder einen Widerspruch bedeutet. Der Fall (1), a) kann also nicht eintreten.

b) Durch einen Zeichenwechsel verfahren wir analog zum Fall a).

Ad (2) b) Wegen $A', D' \in \mathcal{U}(g')$ ist $\bar{A}' = \bar{D}'$ und $\bar{a} = \bar{d}$. Zunächst sei $\bar{g} = \bar{a}$. Da $\bar{B} \neq \bar{S} \vee \bar{C} \neq \bar{S}$ gilt, können wir z. B. $\bar{B} \neq \bar{S}$ annehmen. Dann erhält man $\bar{b} = \bar{S}\bar{B} = \bar{a}$ und $\bar{A}' = \bar{B}'$, was ein Widerspruch zu $A' \in \mathcal{U}(g')$ und $B' \in g'_\alpha$ ist. Es sei also $\bar{g} \neq \bar{a}$. Zunächst nehmen wir $B = C$ und folglich $B' = C'$ an. Ist $\leqq$ bzw. $\leqq'$ die nach [4], (B1)–(B4) definierte Anordnung von g'_α bzw. $\mathcal{U}(g')$, dann gilt $B' \leqq C' \wedge A' \leqq D'$ bzw. $C' \leqq B' \wedge D' \leqq A'$ und nach (T3) ergibt sich hieraus $B'A' \mid C'D'$, also $A'B' \mid C'D'$. Es sei $B \neq C$. Wegen $\bar{g} \neq \bar{a}$ ist $\bar{A} = \bar{D}$ und (ABD) impliziert $\bar{A} = \bar{B}$, woraus man $\bar{a} = \bar{b}$ und $\bar{A}' = \bar{B}'$ erhält. Dies ist aber ein Widerspruch.

Es genügt also die Fälle (2) a), (3) a), (3) b) nachzuprüfen. Wir untersuchen nur (3) a), übrige Fälle lassen sich ähnlich durchführen.

Ad (3) a) Es seien $A', C' \in g'_\alpha$ und $B', D' \in \mathcal{U}(g')$. Hieraus folgt $\bar{a} \neq \bar{b}, \bar{d}$; $\bar{c} \neq \bar{b}, \bar{d}$ und $\bar{b} = \bar{d}$. Nehmen wir $\bar{S} \in \bar{g}$ an. Gilt zugleich $\bar{B} = \bar{S}$, so erhalten wir unseren

Voraussetzungen nach $\bar b \neq \bar g$ und $\bar D \neq \bar S$, woher $\bar d = \bar S\bar D = \bar g$ und $\bar b \neq \bar d$ folgt. Dies ist aber ein Widerspruch und mithin gilt $\bar B \neq \bar S$. Ähnlich zeigt man $\bar D \neq \bar S$. Hieraus ergibt sich $\bar b = \bar d = \bar g$ und folglich $\bar g \parallel \bar g'$. Wegen $\bar A \neq \bar S \vee \bar C \neq \bar S$ läßt sich z. B. $\bar A \neq \bar S$ annehmen, woraus $\bar a = \bar g$ und $\bar a \parallel \bar g'$ folgt. Der Punkt $A' = a \sqcap g'$ ist also uneigentlich, was ein Widerspruch ist. Unsere Vorausetzung $\bar S \in \bar g$ ist falsch. Ferner nehmen wir also $\bar S \notin \bar g$ an. Es sei dabei $\bar g \parallel \bar g'$. Wegen $\bar S \notin \bar g$ erhält man $\bar b \neq \bar g$ und folglich $\bar b \nparallel \bar g'$. Der Punkt B' ist dann eigentlich, was ein Widerspruch ist. Daraus ergibt sich $\bar g \nparallel \bar g'$.

Zunächst sei $A = C$. Dann ist $\bar A, \bar C \neq \bar S$ und folglich $a = SA = SC = c$, also $A' = C'$. Sind $\leqq$, $\leqq'$ die Anordnungen von g'_α und $\mathscr{U}(g')$, so ist entweder $A' \leqq \leqq C' \wedge B' \leqq D'$ oder $C' \leqq A' \wedge D' \leqq B'$ erfüllt, was nach (T3) $A'B' \mid C'D'$ bedeutet. Ferner sei $A \neq C$ angenommen. Gilt dabei $a = c$, dann wegen $A, C \in a$ und $A, C \in g$ ist $\bar a = \bar g$ und aus $S \in a$ folgt $\bar S \in \bar g$, also ein Widerspruch. Mithin ist $a \neq c$. Ganz ähnlich läßt sich zeigen, daß $B = D$ bzw. $B \neq D$ auch $A'B' \mid C'D'$ bzw. $b \neq d$ impliziert. Ferner wird angenommen, daβ $A \neq C, B \neq D$ und folglich $a \neq c$ und $b \neq d$ erfüllt ist.

Da $\bar S \notin \bar g'$ und $\bar b \parallel \bar g'$ gilt, haben b, g' genau einen uneigentlichen Punkt B' gemeinsam. Nach [3], (A1) ergibt sich also entweder $g' \subset H_b^+$ oder $g' \subset H_b^-$. Es sei z. B. $g' \subset H_b^+$ und folglich $A', C' \in H_b^+$.

I. Zunächst sei $\bar g' \nparallel \bar y$. Setzen wir $p = SV$ und $N = p \sqcap g'$, dann ist $N \in H_b^+$.

1. Es sei $\bar g \nparallel \bar y$. Wegen $\bar g \nparallel \bar p$ gibt es einen Punkt $M = g \sqcap p$, wobei $\bar M \neq \bar S$ gilt.

a) Wir nehmen $M \in H_b^+$ an. Wegen $N \in H_b^+$ ergibt sich dann $\neg(MSN)$.

α) Es sei $A \in H_b^+$ (Fig. 2). Aus $C \in H_b^-$ folgt (ABC), was wegen $C \neq B$ und (ACB) einen Widerspruch bedeutet. Deshalb ist $C \in H_b^+ \cup b$ und $\bar b \neq \bar c$ impliziert

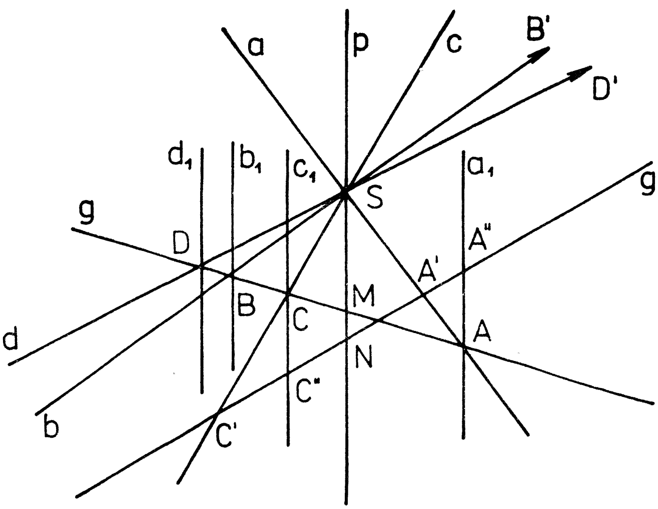

Fig. 2

$C \notin b$, also $C \in H_b^+$. Nach $A, C, A', C' \in H_b^+$ erhält man dann $\urcorner(ASA')$ und $\urcorner(CSC')$. Durch A, B, C, D führen wir zu y parallele Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 und setzen $A'' = a_1 \sqcap g'$, $C'' = c_1 \sqcap g'$. Wegen $\bar{g} \nparallel \bar{y}$ ergibt sich nach [3], Def. 4 $(ACB) \wedge (CBD) \Rightarrow (a_1c_1b_1) \wedge (c_1b_1d_1)$ in der Zwischenrelation von $\Pi(y)$. Wir wählen eine Anordnung $\leqq$ von $\Pi(y)$ mit $y \leqq e$ und zunächst nehmen wir $b_1 \leqq c_1$ an. Dann gilt $b_1 \leqq c_1 \leqq a_1 \wedge d_1 \leqq b_1 \leqq c_1$. Nach [4], (B1) erhält man also $C'' \leqq$ $\leqq A''$ in der Anordnung $\leqq$ von g'. Betrachten wir die Geraden g, g', den uneigentlichen Punkt V und den Punkt S, dann sind für die Punkte $A, C, M \in g$ und $A'', A', C'', C', N \in g'$ die Bedingungen des Satzes 16, [3] erfüllt und wegen $\urcorner(ASA')$, $\urcorner(CSC')$, $\urcorner(MSN)$ gilt $C'' \leqq A'' \Rightarrow C' \leqq A'$. Da $\bar{S} \notin \bar{g}'$, $\bar{S} \neq \bar{M}$, $\urcorner(MSN)$, $\bar{g} \nparallel \bar{p}$ und $\bar{g} \nparallel \bar{g}'$ ist, erhält man nach [4], (B1), (B3) $d_1 \leqq b_1 \Rightarrow D \leqq B \Rightarrow D' \leqq B'$ in der Anordnung $\leqq$ von $\mathscr{U}(g')$. $C' \leqq A' \wedge D' \leqq B'$ impliziert dann nach (T3) $A'B' \mid C'D'$. Gilt $c_1 \leqq b_1$, dann ist $a_1 \leqq c_1 \leqq b_1 \wedge c_1 \leqq b_1 \leqq d_1$, woher nach (B1) $A'' \leqq C''$ folgt. Ferner ergibt sich $A'' \leqq C'' \Rightarrow A' \leqq C'$ und $b_1 \leqq d_1 \Rightarrow B \leqq D \Rightarrow$ $\Rightarrow B' \leqq D'$, also $A'B' \mid C'D'$.

β) Es sei $A \in H_b^-$ (Fig. 3). Wegen $M \in H_b^+$ ergibt sich (ABM) und aus $A \neq B$ folgt $\urcorner(MAB)$. Wählen wir einen Punkt $B_1 \in b$ mit $\bar{S} \neq \bar{B}_1$ und (BSB_1), dann ist

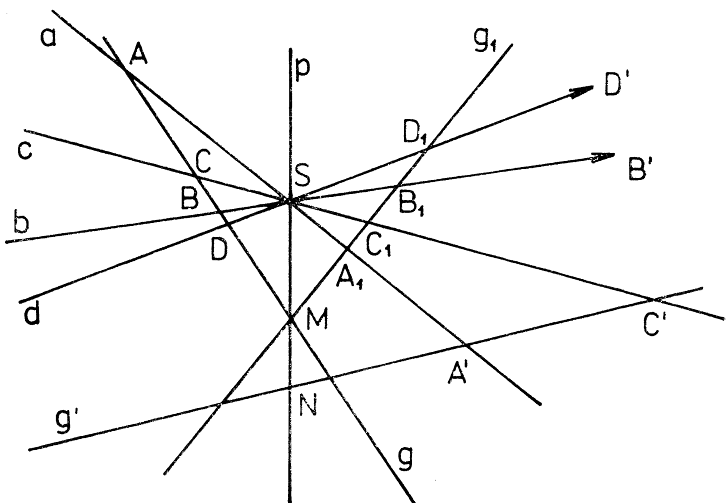

Fig. 3

$\bar{M} \neq \bar{B}_1$. Für die Gerade $g_1 = MB_1$ gilt $\bar{S} \notin \bar{g}_1$ und $\bar{g}' \nparallel \bar{g}_1$. Zugleich beweisen wir, daß auch $\bar{a} \nparallel \bar{g}_1$ und $\bar{c} \nparallel \bar{g}_1$ ist: Es sei $\bar{a} \parallel \bar{g}_1$. Wegen $\bar{S} \neq \bar{B}_1$ erhält man $\bar{a} \neq \bar{g}_1$ und a, g_1 schneiden sich in einem uneigentlichen Punkt R mit $\bar{R} \notin \bar{g}$. Mithin $\varphi(R, b, g)$ ist eine PZ-Projektion ([3], Def. 8) und dem Satz 6, [3] nach ergibt sich $(BSB_1) \Rightarrow (BAM)$, also ein Widerspruch. Entsprechend beweist man $\bar{c} \nparallel \bar{g}_1$. Wegen $\bar{a} \nparallel \bar{g}_1$, $\bar{c} \nparallel \bar{g}_1$ läßt sich $A_1 = a \sqcap g_1$ und $C_1 = c \sqcap g_1$ setzen. Ferner zeigen wir, daß $\bar{A} \notin \bar{g}_1$ gilt: Wir nehmen das Gegenteil, also $\bar{A} \in \bar{g}_1$ an. Da α konvex ist, so (ABM) impliziert $\bar{A} \neq \bar{M}$. Wegen $A, M \in g$ und $\bar{A}, \bar{M} \in \bar{g}_1$ ergibt sich $\bar{g} = \bar{A}\bar{M} = \bar{g}_1$, woher $\bar{B} = \bar{B}_1$ folgt. Dies ist aber ein Widerspruch zu (BSB_1) und $\bar{S} \neq \bar{B}_1$.

Da $\bar{A} \notin \bar{b}, \bar{g}_1$ und $\neg(MAB)$, $\neg(B_1AB_1)$, (BSB_1) gilt, erhält man nach [3], Satz 4 (MA_1B_1), also $A_1 \in H_b^+$. Dann $A \in H_b^-$ und $A_1 \in H_b^+$ implizieren (ASA_1). Wegen (ASA_1), (BSB_1), (ACB) ergibt sich nach [3], Sätze 4 und 5 $(A_1C_1B_1)$ und (CSC_1). Wir zeigen, daß zugleich $(C_1B_1D_1)$ gilt: Die Voraussetzung $(B_1C_1D_1)$ führt zum Widerspruch, weil α konvex ist. Nehmen wir $(C_1D_1B_1)$ an, dann gilt $(BSB_1) \wedge \wedge (CSC_1) \wedge (C_1D_1B_1) \Rightarrow (CDB)$, was wegen $C \neq D$ ein Widerspruch zu (BCD) ist. Nach [1], (Z2) ergibt sich also $(C_1B_1D_1)$. Unter Anwendung von $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}'$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{y}$, $M \in H_b^+$, $A_1 \in H_b^+$, $(A_1C_1B_1)$ und $(C_1B_1D_1)$ läßt sich mit g_1 ganz analog zu α) $A'B' \mid C'D'$ beweisen.

b) Es sei $M \in H_b^-$. Wählen wir einen Punkt $M_1 \in p$ mit $\bar{M}_1 \neq \bar{S}$ und $M_1 \in H_b^+$, dann ist (MSM_1). Führen wir durch M_1 eine zu g parallele Gerade g_1, dann gilt $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}'$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{y}$ und die Punkte $A_1 = a \sqcap g_1$, $B_1 = b \sqcap g_1$, $C_1 = c \sqcap g_1$, $D_1 = d \sqcap g_1$ sind eigentlich. Setzt man $h = L(S, g)$, dann gilt entweder $g \subset H_h^+$ oder $g \subset H_h^-$. Es sei $g \subset H_h^+$. Wegen (MSM_1) ergibt sich $M_1 \in H_h^-$ und $g_1 \subset H_b^-$, also $A_1, B_1, C_1, D_1 \in H_b^-$, woher (ASA_1), (BSB_1), (CSC_1), (DSD_1) folgt. Nach [3], Satz 4 erhält man $(ACB) \Rightarrow (A_1C_1B_1)$, $(CBD) \Rightarrow (C_1B_1D_1)$. Unter Anwendung von g_1 verfahren wir entsprechend zum Fall a).

2. Es sei $\bar{g} \parallel \bar{y}$. Aus $\bar{S} \notin \bar{g}$ folgt $\bar{p} \neq \bar{g}$ und die Geraden p, g schneiden sich in einem uneigentlichen Punkt, woher sich z. B. $g \subset H_p^+$ ergibt. Wir wählen eine Gerade g_1 mit $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}'$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{a}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{c}$, so daß die Punkte $A_1 = = a \sqcap g_1$, $B_1 = b \sqcap g_1$, $C_1 = c \sqcap g_1$, $D_1 = d \sqcap g_1$ in der Halbebene H_p^- enthalten sind. Dann gilt (ASA_1), (BSB_1), (CSC_1), (DSD_1) und deswegen $(ACB) \Rightarrow \Rightarrow (A_1C_1B_1)$, $(BCD) \Rightarrow (B_1C_1D_1)$. Nach dem Fall 1 bekommen wir dann $A'B' \mid C'D'$.

II. Wir nehmen $\bar{g}' \parallel \bar{y}$ an. Wir untersuchen den Fall $\bar{g} \nparallel \bar{x}$. Setzen wir $q = SU$, dann ist $\bar{g} \nparallel \bar{q}$ und g, q schneiden sich in einem Punkt M. Wir setzen $M, A \in H_b^+$ voraus. Die anderen Fälle prüfen wir ähnlich wie unter I nach. Wegen $A \in H_b^+$, (ACB) ist $C \in H_b^+$ und nach $A, C, A', C' \in H_b^+$ erhält man $\neg(ASA')$ und $\neg(CSC')$. Durch A, B, C, D führen wir zu x parallele Geraden a_1, b_1, c_1, d_1 und setzen wir $A'' = a_1 \sqcap g'$, $C'' = c_1 \sqcap g'$ (Fig. 4). Wegen $\bar{g} \nparallel \bar{x}$ ergibt sich nach [3], Def. 4 $(ACB) \wedge (CBD) \Rightarrow (a_1c_1b_1) \wedge (c_1b_1d_1)$ in der Zwischenrelation von $\Pi(x)$. Wir wählen eine Anordnung $\leqq$ von $\Pi(x)$ mit $x \leqq e'$ und nehmen z. B. $b_1 \leqq c_1$ an. Dann gilt $b_1 \leqq c_1 \leqq a_1 \wedge d_1 \leqq b_1 \leqq c_1$. Nach [4], (B2) erhält man also $C'' \leqq A''$ in der Anordnung $\leqq$ von g'. Wegen $\neg(ASA')$, $\neg(CSC')$ und $\neg(MSN)$ gilt nach [3], Satz 16 $C'' \leqq A'' \Rightarrow C' \leqq A'$. Nach [4], (B2), (B4) ergibt sich zugleich $d_1 \leqq b_1 \Rightarrow \Rightarrow D \leqq B \Rightarrow D' \leqq B'$ in der Anordnung $\leqq$ von $\mathscr{U}(g')$. $C' \leqq A' \wedge D' \leqq B'$ impliziert dann $A'B' \mid C'D'$.

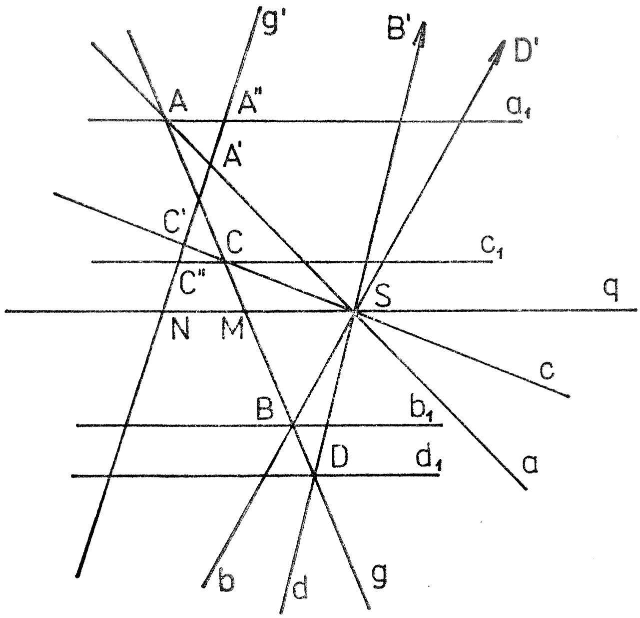
g'
B'
D'
A
A"
a1
A'
C'
C
c1
C"
S
q
N
M
c
B
b1
D
d1
a
b
d
g

Fig. 4

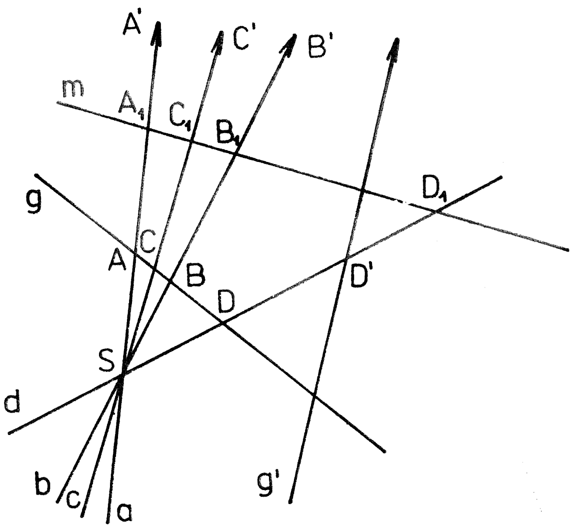
A'
C'
B'
m
A1
C1
B1
D1
g
C
A
B
D
D'
S
d
b
c
a
g'

Fig. 5

Ad (I, 1, a, δ) Es seien A', B', C' uneigentlich und D' eigentlich. Dann ist $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$ und $\bar{a} \neq \bar{d}$. Wir wählen eine Gerade m mit $\bar{S} \notin \bar{m}$, $\bar{m} \nparallel \bar{a}$, $\bar{m} \nparallel \bar{d}$ und setzen $A_1 = a \sqcap m$, $B_1 = b \sqcap m$, $C_1 = c \sqcap m$, $D_1 = d \sqcap m$ (Fig. 5). Wegen $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$, $\bar{a} \neq \bar{d}$ gilt $\bar{A}_1 = \bar{B}_1 = \bar{C}_1$ und $\bar{A}_1 \neq \bar{D}_1$. Gemäß (I, 1, a, α) erhält man zugleich $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$. Wird $(A_1D_1B_1)$ angenommen, dann aus $\bar{A}_1 = \bar{B}_1$ folgt $\bar{A}_1 = \bar{D}_1$, denn α ist konvex. Dies ist ein Widerspruch und mithin erhält man $\neg(A_1D_1B_1)$. Aus $A_1B_1 \mid C_1D_1$ folgt nach (T1) $(A_1C_1B_1)$. Nach [3], Def. 10 gilt dann (acb) in $N(S, a)$ und gemäß [4], (U_1) ergibt sich $(A'C'B')$ in $\mathcal{U}(g')$, was nach (T2) $A'B' \mid C'D'$ bedeutet. Analog lassen sich übrige Fälle untersuchen.

Ad (I, 1, a, ε) Die Punkte A', B', C', D' sind uneigentlich und a, b, c, d liegen in $N(S, a)$. $(ACB) \wedge (CBD)$ impliziert $(acb) \wedge (cbd)$ in der Zwischenrelation von $N(S, a)$ und nach [4], (U1) bedeutet dies $(A'C'B') \wedge (C'B'D')$ in der Zwischenrelation von $\mathcal{U}(g')$. Nach (T1) erhält man hieraus $A'B' \mid C'D'$.

Ad (I, 1, b, α—ε) Wir nehmen z. B. $A, B, C \in g_\alpha$ und $D \in \mathcal{U}(g)$ an. Wegen $AB \mid CD$ gilt nach (T2) (ACB). Zunächst sei $g = d$. Dann ist $S \in g$ und $g = SD$. Gilt dabei $\bar{A} = \bar{S}$, so A, S liegen auf den Geraden g, a und wegen $A \neq S$ sind g, a benachbart, was $\bar{g} = \bar{a}$ bedeutet. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $\bar{g} \neq \bar{a}$ der Definition 2, [4]. Somit erhält man $\bar{A} \neq \bar{S}$ und entsprechend auch $\bar{B}$, $\bar{C} \neq \bar{S}$. Hieraus folgt dann $g = SA = SB = SC = a = b = c$ und $A' = B' = C' = D'$, woher sich $A'B' \mid C'D'$ ergibt. Ferner setzen wir $g \neq d$ voraus. Da g, d den uneigentlichen Punkt D gemeinsam haben, gilt nach (A1) entweder $g \subset H_d^+$ oder $g \subset H_d^-$. Es sei z. B. $g \subset H_d^+$. Wählen wir eine Gerade g_1 mit $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{a}$,

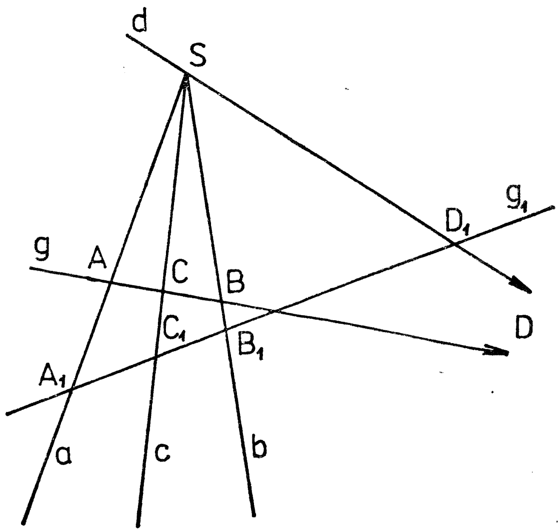

Fig. 6

$\bar{g}_1 \nparallel \bar{b}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{c}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{d}$, so daß die Punkte $A_1 = g_1 \sqcap a$, $B_1 = g_1 \sqcap b$ in der Halbebene H_d^+ liegen, dann wegen $A, B \in H_b^+$ erhalten wir $\neg(ASA_1) \wedge \neg(BSB_1)$ (Fig. 6). Setzen wir noch $C_1 = g_1 \sqcap c$, $D_1 = g_1 \sqcap d$, so nach $\bar{S} \notin \bar{g}_1$ ist $\bar{S} \neq \bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1, \bar{D}_1$. Aus $A_1 \in d$ folgt $A_1 = D_1$ und $a = SA_1 = SD_1 = d$, also $A, D \in d$. Wegen $A \in g_\alpha$, $D \in \mathcal{U}(g)$ ist $\bar{A} \neq \bar{D}$ und folglich $d = AD = g$, was ein Widerspruch ist. Somit ist $A_1 \notin d$ und entsprechend $B_1, C_1 \notin d$. Ferner wollen wir zeigen, daß $A_1B_1 \mid C_1D_1$ gilt: Nach [3], Sätze 4, 5 ergibt sich $(ACB) \wedge \neg(ASA_1) \wedge \neg(BSB_1) \Rightarrow (A_1C_1B_1) \wedge \wedge \neg(CSC_1)$, also $C_1 \in H_d^+$. Dann $B_1, C_1 \in H_d^+$ impliziert $\neg(B_1D_1C_1)$ und folglich $(C_1B_1D_1) \vee (B_1C_1D_1)$. Gilt $(C_1B_1D_1)$, dann aus $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1)$ ergibt sich nach (T1) $A_1B_1 \mid C_1D_1$. Nun sei $(B_1C_1D_1)$. Aus $B_1 = C_1$ folgt $(A_1C_1B_1) \wedge \wedge (C_1B_1D_1)$, was erneut $A_1B_1 \mid C_1D_1$ bedeutet. Mithin können wir $B_1 \neq C_1$ annehmen. Gilt $(A_1B_1D_1)$, dann ergibt sich nach [1], (Z5) $(A_1C_1B_1) \wedge (A_1B_1D_1) \Rightarrow \Rightarrow (C_1B_1D_1)$, woher nach [1], (Z3) $(B_1C_1D_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow B_1 = C_1$ folgt, was aber ein Widerspruch ist. Deshalb ist $\neg(A_1B_1D_1)$. Da wegen $A_1, B_1 \in H_d^+$ man $\neg(A_1D_1B_1)$ erhält, gilt nach [1], (Z2) $(B_1A_1D_1)$, gemäß [1], (Z5 b)) ergibt sich $(B_1C_1A_1) \wedge (B_1A_1D_1) \Rightarrow (C_1A_1D_1)$ und folglich $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1A_1D_1) \Rightarrow \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$. Aus $A_1B_1 \mid C_1D_1$ folgt nach (I, 1, a, $\alpha-\varepsilon$) $A'B' \mid C'D'$ und damit ergibt sich $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1 \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (I, 1, c, $\alpha-\varepsilon$) Zwei Punkte von A, B, C, D sind eigentlich und zwei uneigentlich. Wegen $AB \mid CD$ nehmen wir nach (T3) $A, C \in \mathcal{U}(g)$ und $B, D \in g_\alpha$ an. Dann gilt $(B \leqq D \wedge A \leqq' C) \vee (D \leqq B \wedge C \leqq' A)$ in den nach [4] definierten Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von g_α und $\mathcal{U}(g)$. Unserer Voraussetzung nach ist entweder $\bar{B} \neq \bar{S}$ oder $\bar{D} \neq \bar{S}$. Der Bestimmtheit wegen sei $B \leqq D$, $A \leqq' C$ und $\bar{B} \neq \bar{S}$. Außerdem wird $\bar{g} \nparallel \bar{y}$ angenommen; im Fall $\bar{g} \parallel \bar{y}$, also $\bar{g} \nparallel \bar{x}$ läßt sich analog mit Vertauschung von U statt V verfahren. Gilt $S \in g$, dann ist $S, A, C \in g$ und $g = SA = a = SC = = c$, woraus $A' = C'$ folgt. Nach [2], Satz 3 ergibt sich dann $A'B' \mid C'D'$. Es sei $D \in b$, also $B, D, S \in b$. Aus $\bar{D} = \bar{S}$ folgt $\bar{B} \neq \bar{D}$ und $g = BD = b = d$, was ein Widerspruch zu $\bar{d} \neq \bar{g}$ ist. Gilt $\bar{D} \neq \bar{S}$, dann wegen $b = BS = DS = d$ erhält man $B' = D'$, also $A'B' \mid C'D'$. Ferner sei $S \notin g$ und $D \notin b$ angenommen.

Wir setzen $p = SV$, $N = p \sqcap g$, $b' = BV$ und $d' = DV$ (Fig. 7). Wegen $B \leqq D$ gilt nach [4], (B1) $b' \leqq d'$ in der Anordnung $\leqq$ von $\Pi(y)$. Aus $B \neq D$, $\bar{g} \nparallel \bar{y}$ folgt $b' \neq d'$ und mithin läßt sich $d' \subset H_{b'}^+$ voraussetzen. Durch B führen wir eine Gerade g_1 mit $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{d}$, so daß $\neg(MSN)$ und $D_1 \in H_b^+$ für $M = g_1 \sqcap p$ und $D_1 = g_1 \sqcap d$ erfüllt ist. Wir wollen $A_1B_1 \mid C_1D_1$ für $A_1 = g_1 \sqcap a$, $B_1 = B$ und $C_1 = g_1 \sqcap c$ beweisen: Gilt $a = c$, dann wegen $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}$, $\bar{a} \parallel \bar{g}$ ist $A_1 = C_1$, also $A_1B_1 \mid C_1D_1$. Ferner sei $a \neq c$. Dabei wird $d_1 = D_1V$ gesetzt.

1. Wegen $\bar{g} \nparallel \bar{y}$, $\bar{S} \notin \bar{g}$, $a \neq c$, $\bar{S} \neq \bar{M}$, $\neg(MSN)$ und $\bar{g}_1 \nparallel \bar{g}$ ergibt sich nach [4], (B3) $A \leqq' C \Rightarrow A_1 \leqq C_1$ in der Anordnung $\leqq$ von g_1. Wegen $b' \leqq d'$, $d' \subset H_{b'}^+$ und $D_1 \in H_{b'}^+$ ist $d_1 \subset H_{b'}^+$ und folglich $b' \leqq d_1$. Dies nach (B1) bedeutet $B_1 \leqq D_1$ in der Anordnung $\leqq$ von g_1.

2. Es sei (DSD_1).

a) Es sei $\bar{d} = \bar{p}$, also $\bar{D}, \bar{D}_1 \in \bar{p}$. Wegen $\bar{g} \nparallel \bar{p}$ und $\bar{g}_1 \nparallel \bar{p}$ ist dann $\bar{N} = \bar{D}$ und $\bar{M} = \bar{D}_1$. Zunächst nehmen wir $\bar{B} \in \bar{p}$ an. Dies impliziert $\bar{B} = \bar{D}$ und folglich $\bar{D} \neq \bar{S}$. Da aus $\bar{D} = \bar{D}_1$ und (DSD_1) man $\bar{D} = \bar{S}$ erhält, gilt $\bar{D} = \bar{S}$ und $\bar{B} \neq \bar{D}_1$. Mithin ergibt sich $g_1 = BD_1$; $\bar{B}, \bar{D} \in \bar{p}$ und $\bar{g}_1 = \bar{p}$, was ein Widerspruch ist. Es sei also $\bar{B} \notin \bar{p}$. Dann gilt $\bar{B} \notin \bar{d}, \bar{p}$ und aus $\bar{D} = \bar{N}$, $\bar{M} = \bar{D}_1$ folgt $\neg(DBN)$, $\neg(D_1BM)$. Nach [3], Satz 4 erhält man $(DSD_1) \Rightarrow (NSM)$, also ein Widerspruch zu $\neg(NSM)$.

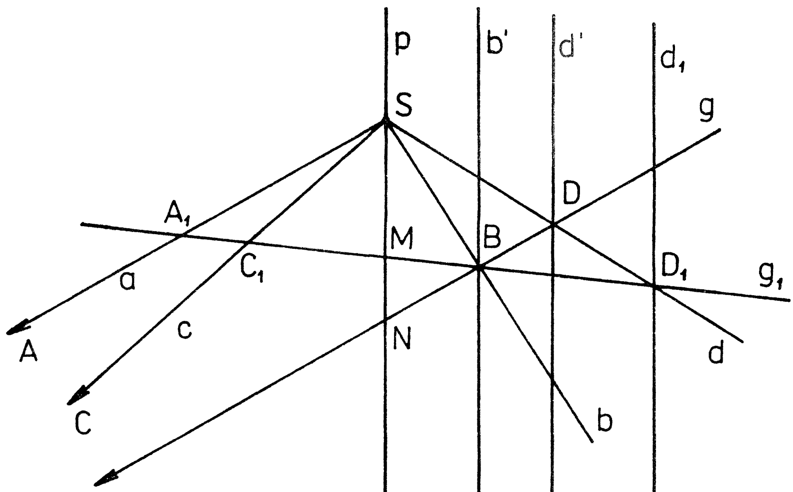

Fig. 7

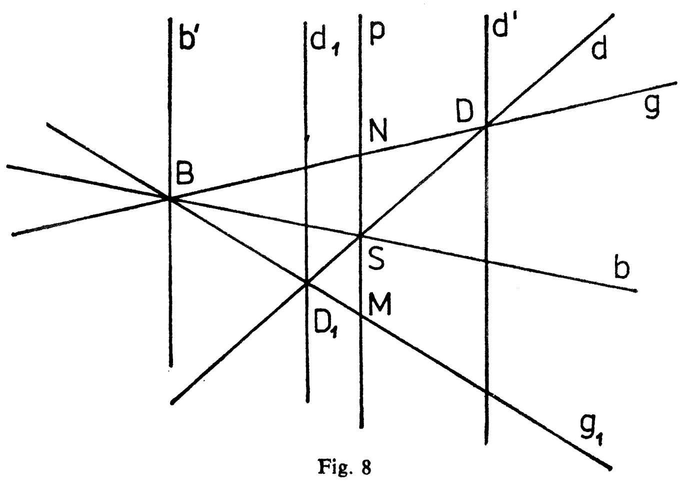

Fig. 8

b) Es sei $\bar{d} \neq \bar{p}$. Wegen $D \notin b$ ist $D \in H_b^+ \vee D \in H_b^-$. Sei z. B. $D \in H_b^+$ vorausgesetzt. Aus $\bar{g}_1 \nparallel \bar{b}$ folgt auch $D_1 \notin b$ und daher (DSD_1) impliziert $D_1 \in H_b^-$ (Fig. 8). Wegen $\bar{d} \nparallel \bar{p}$ erhält man nach [3], Def. 4 $(DSD_1) \Rightarrow (d'pd_1)$. Aus $B \in p$ folgt $p = b'$ und $(d'b'd_1)$, $b' \leqq d'$, $b' \leqq d_1$ impliziert $b' = d' \vee b' = d_1$, was ein Widerspruch ist. Ferner sei $B \notin p$. Wird dabei (NBD) angenommen, dann wegen $B \leqq D$ ist $N \leqq B \leqq D$, also $d' \leqq p < b'$, was wieder ein Widerspruch ist. Somit gilt $\neg(NBD)$ und $N \notin b$, $D \in H_b^+$ impliziert $N \in H_b^+$. Entsprechend läßt sich $\neg(MBD_1)$ beweisen und aus $D_1 \in H_b^-$ folgt dann $M \in H_b^-$. Nach [3], (H3) ergibt sich $M \in H_b^- \wedge N \in H_b^+ \Rightarrow (MSN)$, was ein Widerspruch ist. Nach a), b) führt die Voraussetzung (DSD_1) stets zum Widerspruch und mithin gilt $\neg(DSD_1)$.

3. Mittels der PZ-Projektion $\varphi(A, d, g_1)$ ergibt sich $\neg(DSD_1) \Rightarrow \neg(B_1A_1D_1)$ (Fig. 7). Wegen $\bar{A}_1 = \bar{C}_1$ und $\bar{A}_1 \neq \bar{B}_1$, $\bar{A}_1 \neq \bar{D}_1$ ist $\neg(A_1B_1C_1)$, $\neg(A_1D_1C_1)$, denn α ist konvex. Da nach $A_1 \leqq C_1$ und $B_1 \leqq D_1$ gilt, gibt es nur zwei Möglichkeiten $B_1 \leqq D_1 \leqq A_1 \leqq C_1 \vee A_1 \leqq C_1 \leqq B_1 \leqq D_1$. Deswegen ist $(A_1D_1B_1) \wedge \wedge (C_1A_1D_1)$ oder $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1)$ erfüllt, was nach (T3) $A_1B_1 \mid C_1D_1$ bedeutet. Da nach (I, 1, a, $\alpha - \varepsilon$) sich $A_1B_1 \mid C_1D_1 \Rightarrow A'B' \mid C'D'$ ergibt, gilt $AB \mid CD \Rightarrow \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1 \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (I, 1, d, $\alpha - \varepsilon$) Es sei $A, B, C \in \mathscr{U}(g)$ und $D \in g_\alpha$. Dann ist $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C}$, $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$ und nach (T2) gilt (ACB). Aus $S \in g$ ergibt sich $a = SA = SB = b = = SC = c$ und folglich $A' = B' = C'$. Nach [2], Satz 3 gilt also $A'B' \mid C'D'$. Ferner sei $S \notin g$, also $d \neq g$. Dann läßt sich $S \in H_g^+$ annehmen. Auf der Geraden d wählen wir einen Punkt D_1 mit $D_1 \in H_g^-$, durch D_1 führen wir eine Gerade g_1 mit $\bar{S} \notin \bar{g}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{a}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{d}$ und setzen $A_1 = g_1 \sqcap a$, $B_1 = g_1 \sqcap b$, $C_1 = g_1 \sqcap c$, $D_1 = g_1 \sqcap d$ (Fig. 9). Wir wollen $A_1B_1 \mid C_1D_1$ beweisen: Gilt $A_1 = C_1$ bzw.

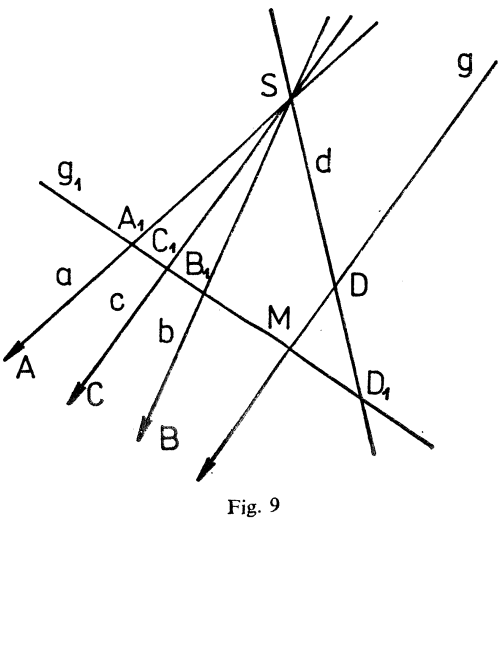

Fig. 9

$B_1 = C_1$, dann ist nach [2], Satz 3 $A_1B_1 \mid C_1D_1$ erfüllt. Ferner sei also $A_1 \neq C_1$ und $B_1 \neq C_1$. Nach [4], (U1) und [3], Def. 10 erhält man $(ACB) \Rightarrow (acb) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A_1C_1B_1)$. Wegen $S \notin g$ ist $a, b, c \neq g$ und $S \in H_g^+$ impliziert nach [3], (A1) $a, b, c \subset H_g^+$, also $A_1, C_1, B_1 \in H_g^+$. Setzen wir $M = g_1 \sqcap g$, dann ist $\neg(A_1MC_1)$ und nach [1], (Z2) erhalten wir $(C_1A_1M) \vee (A_1C_1M)$. Wegen $C_1 \in H_g^+$ und $D_1 \in H_g^-$ gilt zugleich (C_1MD_1). Aus (C_1A_1M) folgt nach [1], (Z6) $(C_1A_1M) \wedge (C_1MD_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (C_1A_1D_1)$ und nach (T1) ergibt sich $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1A_1D_1) \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$. Es sei (A_1C_1M). Wegen $B_1, C_1 \in H_g^+$ und $D_1 \in H_g^-$ ist $\neg(B_1D_1C_1)$ und deshalb gilt $(B_1C_1D_1) \vee (C_1B_1D_1)$. Ist $(B_1C_1D_1)$ erfüllt, dann erhält man nach [1], (Z5b) $(D_1MC_1) \wedge (D_1C_1B_1) \Rightarrow (MC_1B_1)$. Da $A_1, B_1 \neq C_1$ ist, gilt $A_1, B_1 \notin c$ und es läßt sich z. B. $A_1 \in H_c^+$ annehmen. Aus (A_1C_1M) folgt dann $M \in H_c^-$ und $(A_1C_1B_1)$ impliziert $B_1 \in H_c^-$, was $\neg(MC_1B_1)$ bedeutet. Wegen $B_1 \neq C_1$ enthält dies einen Widerspruch zu (MC_1B_1). Somit gilt $(C_1B_1D_1)$ und $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$. Nach (I, 1, a, $\alpha-\varepsilon$) erhält man schließlich $A_1B_1 \mid C_1D_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (I, 1, e, $\alpha-\varepsilon$) Es seien $A, B, C, D \in \mathscr{U}(g)$. Wegen $AB \mid CD$ nehmen wir z. B. $(ACB) \wedge (CBD)$ an. Wir wählen eine Gerade g_1 mit $\bar{S} \in \bar{g}, \bar{g}_1 \nparallel \bar{a}$ und setzen $A_1 =$ $= g_1 \sqcap a$, $B_1 = g_1 \sqcap b$, $C_1 = g_1 \sqcap c$, $D_1 = g_1 \sqcap d$. Nach [4], (U1) gilt dann $(ACB) \wedge (CBD) \Rightarrow (acb) \wedge (cbd)$ und nach [3], Def. 10 ist $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1)$, also $A_1B_1 \mid C_1D_1$. Analog zu vorigen Fällen ergibt sich also $AB \mid CD \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1 \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad **(I, 2, a—e, $\alpha-\varepsilon$)** Da g' uneigentlich ist, sind alle Punkte A', B', C', D' uneigentlich. Für A', B', C', D' können dann folgende Möglichkeiten eintreten:

(i) Alle vier Punkte sind in $\mathscr{W}(g')$ enthalten.
(ii) Drei Punkte liegen in $\mathscr{W}(g')$ und ein in $\mathscr{V}(g')$.
(iii) Zwei Punkte liegen in $\mathscr{W}(g')$ und zwei in $\mathscr{V}(g')$.
(iv) Ein Punkt liegt in $\mathscr{W}(g')$ und drei in $\mathscr{V}(g')$.
(v) Alle Punkte liegen in $\mathscr{V}(g')$.

Wir untersuchen alle angeführte Möglichkeiten.

(i) Wir wählen eine (eigentliche) Gerade g_1 mit $\bar{g}_1 \parallel \bar{y}$ und $\bar{S} \notin \bar{g}_1$. Dann gibt es eigentliche Punkte $A_1 = g_1 \sqcap a$, $B_1 = g_1 \sqcap b$, $C_1 = g_1 \sqcap c$, $D_1 = g_1 \sqcap d$ und nach (I, 1, a $-$ e, α) gilt $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$. Es sei z. B. $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1)$. Nach [3], Def. 11 ergibt sich $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow (acb) \wedge (cbd)$, woher dann nach [4], (U3) $(A'C'B') \wedge (C'B'D')$ folgt. Dies aber bedeutet $A'B' \mid C'D'$.

(ii) Es seien $A', B', C' \in \mathscr{W}(g')$, $D' \in \mathscr{V}(g')$. Wir wählen eine Gerade g_1 mit $g_1 \parallel y$ und $\bar{S} \notin \bar{g}_1$. Dann gilt $\bar{g}_1 \nparallel \bar{a}, \bar{g}_1 \nparallel \bar{b}$, $\bar{g}_1 \nparallel \bar{c}$, $\bar{g}_1 \parallel \bar{d}$, $\bar{g}_1 \neq \bar{d}$, die Punkte $A_1 =$ $= g_1 \sqcap a$, $B_1 = g_1 \sqcap b$, $C_1 = g_1 \sqcap c$ sind eigentlich und $D_1 = g_1 \sqcap d$ ist uneigentlich. Nach (I, 1, a $-$ e, β) ergibt sich $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$, woraus nach (T2) $(A_1C_1B_1)$ folgt. Wegen [3], Def. 11 ist $(A_1C_1B_1) \Rightarrow (acb)$ und nach [4], (U3) gilt $(A'C'B')$, was $A'B' \mid C'D'$ bedeutet.

(iii) Es seien $A', C' \in \mathscr{W}(g')$ und $B', D' \in \mathscr{V}(g')$. Wir setzen $s = SV$ und führen eine Gerade g_1 mit $g_1 \parallel y$, $\bar{g}_1 \neq \bar{e}$, $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, so daß $s < g_1$ und $e < g_1$ in der Anordnung $\leqq$ von $\Pi(y)$ mit $y < e$ gilt. Wegen $y < e < g_1$ ist (yeg_1) und $y \neq e$ impliziert $\neg(eyg_1)$ (Fig. 10). Aus $y \leqq s$ folgt $y \leqq s < g_1$ und (ysg_1). Gilt $s \leqq y$, dann ist $s \leqq y < e < g_1$ und (syg_1). Wegen $y \neq g_1$ und $g_1 \neq s$ ergibt sich also $\neg(yg_1s)$.

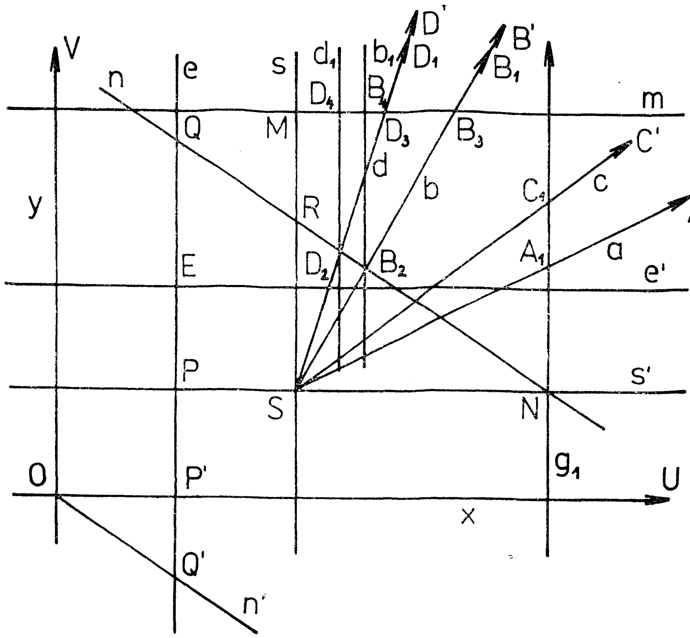

Fig. 10

Setzen wir $A_1 = a \sqcap g_1$, $B_1 = b \sqcap g_1$, $C_1 = c \sqcap g_1$ und $D_1 = d \sqcap g_1$, dann sind A_1, C_1 eigentlich und B_1, D_1 uneigentlich, wobei $B_1, D_1 \in \mathscr{V}(g_1)$. Nach (I, 1, a – e, γ) ergibt sich $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$ und nach (T3) läßt sich also z. B. $A_1 \leqq C_1$ in der Anordnung von $(g_1)_\alpha$ und $B_1 \leqq D_1$ in der Anordnung von $\mathscr{U}(g_1)$ annehmen. Wir wollen beweisen, daß auch $A' \leqq C'$ in der Anordnung von $\mathscr{W}(g')$ und $B' \leqq D'$ in der Anordnung von $\mathscr{V}(g')$, also $A'B' \mid C'D'$ gilt. Da $\neg(eyg_1)$ und $\neg(yg_1s)$ erfüllt ist, erhält man gemäß [4], (B5), (S2) $A_1 \leqq C_1 \Rightarrow A' \leqq C'$. Es genügt also $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow B' \leqq D'$ zu zeigen. Wir setzen $s' = SU$, $P = s' \sqcap e$, $N = s' \sqcap g_1$ und durch N führen wir eine Gerade n mit $\bar{n} \nparallel \bar{x}$, $\bar{n} \nparallel \bar{y}$, so daß $P \leqq Q$ in der nach [4], (B2) definierten Anordnung von e für $Q = n \sqcap e$ ist. Setzen wir weiter $B_2 = n \sqcap b$, $D_2 = n \sqcap d$, dann nach [4], (B4) gilt $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow B_2 \leqq D_2$ in der Anordnung von n, die durch die Anordnung von $\Pi(x)$ mit $x < e'$ erklärt ist. Durch O führen wir eine zu n parallele Gerade n' und setzen $P' = x \sqcap e$, $Q' = n' \sqcap e$. Wegen $\bar{e} \neq \bar{y}$, $\bar{g}_1$ und (yeg_1) ergibt sich nach [3], Satz 11 $P \leqq Q \Rightarrow$

$\Rightarrow Q' \leqq P'$ in der Anordnung von e. Hieraus folgt $(EP'Q')$ und nach [4], (S4) induzieren $\Pi(x)$, $\Pi(y)$ zwei inverse Anordnungen von n. Gilt also $B_2 \leqq D_2$ in der von $\Pi(x)$ induzierten Anordnung, dann ist $D_2 \leqq B_2$ in der Anordnung, die von $\Pi(y)$ induziert ist. Wählen wir eine Gerade m mit $m \parallel x$, $\bar{S} \notin \bar{m}$ und mit $s' < m$, $e' < m$ in der Anordnung von $\Pi(x)$, dann gilt $\urcorner(e'xm)$ und $\urcorner(xms')$. Wegen $s < g_1$ ist $S \in H_{g_1}^-$ und nach [3], (A1) ergibt sich hieraus $b, d \in H_{g_1}^-$, also B_2, $D_2 \in H_{g_1}^-$. Aus $e < g_1$ folgt auch $e \in H_{g_1}^-$ und $Q \in H_{g_1}^-$, woher man $\urcorner(B_2NQ)$ und $\urcorner(D_2NQ)$ erhält. Wegen $s' < m$ in $\Pi(x)$ ist $m \in H_{s'}^+$ und B_3, D_3, $M \in H_{s'}^+$, wo $B_3 = m \sqcap b$, $D_3 = m \sqcap d$ und $M = m \sqcap s$ gesetzt ist. Aus $P < Q$ folgt $Q \in H_{s'}^+$. $\urcorner(B_2NQ)$, $\urcorner(D_2NQ)$ implizieren dann $B_2, D_2 \in H_{s'}^+$ und folglich $\urcorner(B_2SB_3)$, $\urcorner(D_2SD_3)$. Setzen wir $R = n \sqcap s$, dann wegen $\urcorner(eg_1s)$ gilt $\urcorner(QNR)$, woher $R \in H_{s'}^+$ und $\urcorner(MSR)$ folgt. Führen wir durch B_2, D_2 zu y parallele Geraden b_1, d_1 und setzen wir $B_4 = b_1 \sqcap m$, $D_4 = d_1 \sqcap m$, dann wegen $D_2 \leqq B_2$ erhalten wir $d_1 \leqq b_1$ und $D_4 \leqq B_4$. Da $\bar{S} \notin \bar{n}$, $\urcorner(B_2SB_3)$, $\urcorner(D_2SD_3)$ und $\urcorner(MSR)$ ist, gilt nach [3], Satz 16 $D_4 \leqq B_4 \Rightarrow D_3 \leqq B_3$ in der Anordnung von m. Wegen $\urcorner(e'xm)$ und $\urcorner(xms')$ ergibt sich nach [4], (B6), (S_3) $D_3 \leqq B_3 \Rightarrow B' \leqq D'$ in der Anordnung von $\mathscr{V}(g')$.

Die übrigen Fälle (iv), (v) führen wir entsprechend zu (ii), (i) an.

Ad (I, 3, a—e, $\alpha - \varepsilon$) Da g uneigentlich ist, sind auch A, B, C, D uneigentlich. Außerdem gilt $\bar{S} \notin \bar{g}$ und unserer Voraussetzung nach ist zugleich $\bar{S} \notin \bar{g}'$. Aus $A = C$ bzw. $B = C$ bzw. $A = B$ bzw. $A = D$ folgt $A' = C'$ bzw. $B' = C'$ bzw. $A' = B'$ bzw. $A' = D'$ und nach [2], Satz 3 erhält man $A'B' \mid C'D'$. Ferner seien die Punkte A, B, C, D voneinander verschieden. Nach [2], (C2) ist $A'C' \mid B'D' \vee A'D' \mid B'C' \vee A'B' \mid C'D'$. Gilt $A'C' \mid B'D'$, dann mittels der Z-Projektion $\varphi(S, g', g)$ ergibt sich nach (I, 2, a – e, $\alpha - \varepsilon$) $AC \mid BD$, aus $AB \mid CD$ und $AC \mid BD$ folgt dann nach [2], (C3) entweder $B = C$ oder $A = D$, was ein Widerspruch ist. Analog führt auch $A'D' \mid B'D'$ zum Widerspruch und mithin gilt $A'B' \mid C'D'$.

Ad (I, 4, a—e, $\alpha - \varepsilon$) Alle Punkte A, B, C, D und A', B', C', D' sind uneigentlich. Wählen wir eine (eigentliche) Gerade g_1, mit $\bar{S} \notin \bar{g}_1$, dann ist $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \neq \bar{g}_1$ und es gibt die Schnittpunkte $A_1 = a \sqcap g_1$, $B_1 = b \sqcap g_1$, $C_1 = c \sqcap g_1$, $D_1 = d \sqcap g_1$. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}, \bar{g}'$ sind $\varphi(S, g, g_1)$ und $\psi(S, g_1, g')$ Z-Projektionen. Unter Anwendung von φ ergibt sich nach (I, 3) $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$ und mit ψ erhält man dann nach (I, 2) $A_1B_1 \mid C_1D_1 \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ferner setzen wir voraus, daß S ein uneigentlicher Punkt ist. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ muß die Gerade g' eigentlich sein und deshalb können nur die Fälle 1 und 3 eintreten.

Ad (II, 1, a) Es gilt $A, B, C, D \in g_\alpha$ und nach (T1) läßt sich z. B. $(ACB) \wedge (CBD)$ annehmen. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ ist $\bar{g}' \nparallel \bar{a}$, $\bar{g}' \nparallel \bar{b}$, $\bar{g}' \nparallel \bar{c}$, $\bar{g}' \nparallel \bar{d}$ und die Punkte A', B', C', D' sind eigentlich. Nach [3], Satz 6 ergibt sich dann $(ACB) \Rightarrow (A'C'B')$, $(CBD) \Rightarrow (C'B'D')$, was nach (T1) $A'B' \mid C'D'$ bedeutet.

Ad (II, 1, b) Es sei z. B. $A, B, C \in g_\alpha$ und $D \in \mathscr{U}(g)$. Nach (T2) ist dann (ACB). Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ sind auch A', B', C' eigentlich und nach [3], Satz 6 gilt $(A'C'B')$.

a) Aus $\bar{S} \notin \bar{g}$ folgt $\bar{S} \neq \bar{D}$, die Gerade $d = SD$ ist uneigentlich, der Punkt D' ist uneigentlich und wegen $(A'C'B')$ ergibt sich nach (T2) $A'B' \mid C'D'$.

b) Gilt $\bar{S} \in \bar{g}$, dann ist $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{g}$ und $\bar{A}' = \bar{B}' = \bar{C}'$. Da D, S uneigentlich sind, so erhält man $\bar{D} = \bar{S}$ und folglich $\bar{d} \neq \bar{g}$. Ist d uneigentlich, dann verfahren wir analog zu a). Es sei also d eigentlich. Dann ist D' eigentlich und wegen $\bar{d} \neq \bar{g}$ gilt $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \neq \bar{d}$ und folglich $\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}' \neq \bar{D}'$. Aus $A' = C'$ bzw. $B' = C'$ folgt nach [2], Satz 3 $A'B' \mid C'D'$. Ferner sei also $A' \neq C'$ und $B' \neq C'$. Da α konvex ist, muß $\neg(A'D'C')$ gelten, woher sich $(C'A'D') \vee (A'C'D')$ ergibt. Wird $(C'A'D')$ angenommen, dann $(A'C'B') \wedge (C'A'D')$ impliziert nach (T1) $A'B' \mid C'D'$. Es sei also $(A'C'D')$. Aus der Konvexität von α folgt weiter $\neg(B'D'C')$, also $(C'B'D') \vee$ $\vee$ $(B'C'D')$. Gilt $(C'B'D')$, dann wegen $(A'C'B')$ erhält man $A'B' \mid C'D'$. Wir beweisen noch, daß der übrige Fall $(B'C'D')$ nicht eintreten kann. Wegen $\bar{A}' = \bar{B}'$ und $\bar{D}' \neq \bar{A}'$ ist $\neg(A'D'B')$ und folglich $(D'A'B') \vee (D'B'A')$. Aus $(D'A'B')$ folgt nach [1], (Z5b) $(D'C'A') \wedge (D'A'B') \Rightarrow (C'A'B')$ und wegen $(A'C'B')$ ergibt sich hieraus $A' = C'$, was ein Widerspruch ist. Gilt $(D'B'A')$, dann erhält man analog $(D'C'B') \wedge (D'B'A') \Rightarrow (C'B'A')$, also $B' = C'$, was wieder ein Widerspruch ist.

Ad (II, 1, c) Wir nehmen an, daß A, C eigentlich und B, D uneigentlich sind. Da B, D uneigentliche Punkte von g sind, gilt $\bar{B} = \bar{D}$. Aus $\bar{B} = \bar{S}$ folgt dann $\bar{D} = \bar{S}$, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist. Daher ergibt sich $\bar{S} \neq \bar{B}, \bar{D}$ und $\bar{S} \notin \bar{g}$. Die Geraden b, d sind dann uneigentlich und A', C' eigentlich. Wegen $AB \mid CD$ gilt nach (T3) $(A \leqq C \wedge B \leqq D) \vee (C \leqq A \wedge D \leqq B)$ in den Anordnungen von g_α und $\mathscr{U}(g)$. Ferner nehmen wir an, daß $A \leqq C$ in der nach (B1) bzw. (B2) definierten Anordnung von g_α und $B \leqq D$ in der nach (B3) bzw. (B4) definierten Anordnung von $\mathscr{U}(g)$ sind. Für die Punkte D, D' unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1. $D, D' \notin \mathscr{V}(d)$,
2. $D \in \mathscr{V}(d)$,
a) $\bar{D}' \neq \bar{U}$,
α) $D' \notin \mathscr{V}(d)$,
β) $D' \in \mathscr{V}(d)$,
b) $D' = U'$,
3. $D' \in \mathscr{V}(d)$,
a) $\bar{D} \neq \bar{U}, \bar{D} \notin \mathscr{V}(d)$,
b) $\bar{D} = \bar{U}$.

Wir prüfen alle angeführten Möglichkeiten an.

1. Es seien $D, D' \notin \mathscr{V}(d)$. Wegen $D \in g$ und $D' \in g'$ ist $\bar{g} \nparallel \bar{y}$ und $\bar{g}' \nparallel \bar{y}$. Führen wir eine Gerade p durch V, dann gilt $\bar{p} \nparallel \bar{g}, \bar{g}'$ und es gibt Punkte $N = p \sqcap g$, $N' = p \sqcap g'$ (Fig. 11). Auf p wählen wir einen zu N und N' fernen Punkt Z mit $\neg(NZN')$ und auf d wählen wir einen zu S, D, D', V fernen Punkt R mit $V'R \nmid DD'$,

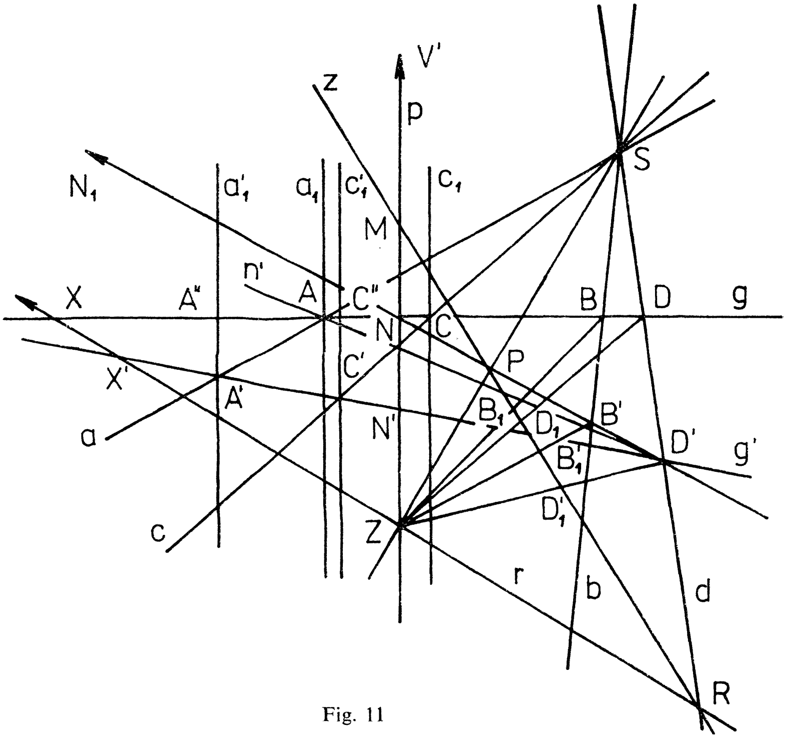

Fig. 11

wo $V' = p \sqcap d$ gesetzt ist. Dann gilt $\bar r \nparallel \bar g, \bar g'$ für $r = RZ$ und es gibt Punkte $X = g \sqcap r$, $X' = g' \sqcap r$, $N_1 = ND' \sqcap r$. Nehmen wir $ZR \mid XN_1$ an, dann unter Anwendung von $\varphi(N, r, d)$ ergibt sich nach (I, 2) $V'R \mid DD'$, also ein Widerspruch. Somit ist $ZR \nmid XN_1$. Aus $\neg(NZN')$ folgt nach (T2) $NN' \nmid ZV'$, woher sich mittels $\psi(D', p, r)$ nach (I, 1, b) $NN' \nmid ZV' \Rightarrow N_1X' \nmid ZR \Rightarrow \neg(X'ZN_1)$ ergibt. Gemäß [2], Satz 6 gilt dann $ZR \nmid XN_1 \wedge ZR \nmid N_1X' \Rightarrow ZR \nmid XX' \Rightarrow \neg(XZX')$.

Auf p wählen wir einen Punkt M mit $\bar M \neq \bar Z$, $\neg(MZN)$, $\neg(MZN')$, was wegen $\neg(NZN')$ stets möglich ist. Setzen wir $z = MR$, dann ist $\bar Z \notin \bar z$ und wegen $\bar R \neq \bar S, \bar D, \bar D'$ gibt es Punkte $P = ZS \sqcap z$, $B_1 = ZB \sqcap z$, $D_1 = ZD \sqcap z$, $B_1' = ZB' \sqcap z$, $D_1' = ZD' \sqcap z$.

(i) Es sei $SV' \nmid DD'$. Unter Anwendung von $\varphi(Z, d, z)$ ergibt sich nach (I, 3) $V'R \nmid DD' \Rightarrow MR \mid D_1D_1'$, $SV' \nmid DD' \Rightarrow PM \nmid D_1D_1'$ und aus [2], Satz 6 folgt dann $D_1D_1' \nmid MR \wedge D_1D_1' \nmid MP \Rightarrow D_1D_1' \nmid PR \Rightarrow \neg(D_1PD_1')$. Es gilt $\bar Z \in \bar g, \bar g \nparallel \bar y$, $\neg(MZN)$ und wegen $\bar R \neq \bar V, \bar D$ ist zugleich $\bar z \neq \bar p$, $\bar z \nparallel \bar g$. Nach [4], (B3) ergibt sich also $B \leqq D \Rightarrow B_1 \leqq D_1$ in der Anordnung von z. Ferner gilt $\bar S \notin \bar g, \bar g', \bar z$; $\bar Z \notin \bar z, \bar g, \bar g'$ und wegen $\bar R \neq \bar D, \bar D'$ ist $\bar z \nparallel \bar g$, $\bar z \nparallel \bar g'$. Da zugleich $\neg(XZX')$, $\neg(D_1PD_1')$ erfüllt ist, ergibt sich nach [4], (A3) $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow B_1' \leqq D_1'$ in der Anordnung von z. Wegen $\bar g' \nparallel \bar y$ und $\neg(MZN')$ folgt hieraus nach [4], (B3) $B' \leqq D'$.

Wir setzen $a_1 = AV$, $a_1' = A'V$, $c_1 = CV$, $c_1' = C'V$ und $n' = AD'$. Ist $\bar{S} \neq \bar{V}$, dann $g, a, n' \in F(A, a_1)$ ([3], Bem. 3) und aus $SV \nmid DD'$; $S, D, D' \in \mathscr{W}(d)$; $V' \in \mathscr{V}(d)$ folgt nach (T2) $\neg(DSD')$, was gemäß [4], (U3) $\neg(gan')$ impliziert. Nach (B1) gilt zugleich $A \leqq C \Rightarrow a_1 \leqq c_1$ in der Anordnung von $\Pi(y)$ und wegen $\bar{S} \neq \bar{D}, \bar{D}', \bar{V}$; $\bar{V} \neq \bar{D}, \bar{D}'$, $\neg(gan')$ ergibt sich gemäß [3], Satz 18 $a_1 \leqq c_1 \Rightarrow a_1' \leqq c_1'$, was $A' \leqq C'$ bedeutet. Somit ist $A' \leqq C' \wedge B' \leqq D'$ und folglich $A'B' \mid C'D'$. Ist $\bar{S} = \bar{V}$, dann ergibt sich $\bar{a} = \bar{a}_1 = \bar{a}_1'$ und $\bar{c} = \bar{c}_1 = \bar{c}_1'$. Betrachten wir die PZ-Projektionen $\varphi_1(S, g, g')$, $\varphi_2(V, g', g)$ und setzen wir $A'' = \varphi_2\varphi_1(A)$, $C'' = \varphi_2\varphi_1(C)$, dann wegen $\bar{V} = \bar{S}$ erhalten wir nach [5], Satz 6 $A \leqq C \Rightarrow A'' \leqq C''$, woraus nach (B1) $a_1' \leqq c_1'$ und $A' \leqq C'$ folgt. Mithin ergibt sich erneut $A'B' \mid C'D'$.

(ii) Es sei $SV' \mid DD'$. Aus $\bar{S} = \bar{V}$ folgt nach [4], (S6) entweder $\bar{D} = \bar{V}$ oder $\bar{D}' = \bar{V}$, also ein Widerspruch. Deswegen ist $\bar{S} \neq \bar{V}$. Unter Anwendung von $\varphi(Z, d, z)$ erhält man $V'R \nmid DD' \Rightarrow MR \nmid D_1D_1'$ und $SV' \mid DD' \Rightarrow PM \mid D_1D_1'$. Wegen $\bar{S} \neq \bar{D}, \bar{D}'$ ist $\bar{P} \neq \bar{D}_1, \bar{D}_1'$ und nach [2], Satz 5 ergibt sich dann $D_1D_1' \mid PM \wedge D_1D_1' \nmid RM \Rightarrow D_1D_1' \mid PR$, also (DPD_1'). Laut [4], (B2) gilt $B \leqq D \Rightarrow B_1 \leqq D_1$, wegen (DPD_1') erhält man nach [4], (A3) $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow D_1' \leqq B_1'$ und nach [4], (B3) ist $D_1' \leqq B_1' \Rightarrow D' \leqq B'$. Da $S, D, D' \in \mathscr{W}(d)$ und $V' \in \mathscr{V}(d)$ gilt, ergibt sich nach (T2) $SV' \mid DD' \Rightarrow (DSD')$ in der Zwischenrelation von $\mathscr{W}(d)$ und gemäß [4], (U3) folgt hieraus (gan'). Nach [4], (B1) ist $A \leqq C \Rightarrow a_1 \leqq c_1$ und nach [3], Satz 18 gilt $a_1 \leqq c_1 \Rightarrow c_1' \leqq a_1'$, also $C' \leqq A'$. Gemäß (T3) erhält man dann $C' \leqq A' \wedge D' \leqq B' \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

2. Es sei $D \in \mathscr{V}(d)$, also $\bar{g} \parallel \bar{y}$.

a) Es sei $\bar{D}' \neq \bar{U}$, also $\bar{g}' \nparallel \bar{x}$. Wir führen eine (eigentliche) Gerade p durch U und setzen $U' = d \sqcap p$. Wegen $\bar{D} = \bar{V}$, $\bar{D}' \neq \bar{U}$ ist $\bar{p} \nparallel \bar{g}$, $\bar{p} \nparallel \bar{g}'$ und existieren Punkte $N = p \sqcap g$, $N' = p \sqcap g'$. Auf p wählen wir einen Punkt Z mit $\bar{Z} \neq \bar{N}, \bar{N}'$, $\neg(NZN')$ und auf d wählen wir einen zu S, D, D', U' fernen Punkt R, so daß $U'R \nmid DD'$ und $U'D \nmid RD'$ im Fall $D \neq D'$ gilt (Fig. 12). Setzt man $r = RZ$, dann wegen $\bar{R} \neq \bar{D}, \bar{D}'$ gibt es Punkte $X = g \sqcap r$, $X' = g' \sqcap r$ und $N_1 = ND' \sqcap r$. Wird $\bar{N} \in \bar{r}$ angenommen, dann wegen $\bar{R} \neq \bar{D}$ erhält man $\bar{X} = \bar{N}$ und $\bar{p} = r$, also $\bar{R} = \bar{U}'$, was ein Widerspruch ist. Deswegen gilt $\bar{N} \notin \bar{r}$ und $\varphi(N, d, r)$ ist eine Z-Projektion. Nach (I, 3) ergibt sich dann $U'R \nmid DD' \Rightarrow ZR \mid XN_1$, also $\neg(XZN_1)$. Wegen $\bar{D}' \neq \bar{U}'$, $\bar{R}$ ist $\psi(D', p, r)$ eine PZ-Projektion und unter Anwendung von ψ erhält man nach (II, 1, b) $\neg(NZN') \Rightarrow NN' \nmid ZR \Rightarrow N_1X' \nmid ZR \Rightarrow \neg(N_1ZX')$. Da $\bar{U}' \neq \bar{R}$ ist, gilt $\bar{X} \notin \bar{p}$ und folglich $X \in H_p^+ \vee X \in H_p^-$. Ist $X \in H_p^+$, dann aus $N_1 \notin p$, $\neg(XZN_1)$ folgt $N_1 \in H_p^+$. Daher $X' \notin p$ und $\neg(N_1ZX')$ implizieren $X' \in H_p^+$, woraus sich $\neg(XZX')$ ergibt. Auf p wählen wir einen zu Z fernen Punkt M mit $\neg(MZN)$ und setzen wir $z = MR$, $B_1 = ZB \sqcap z$, $B_1' = ZB' \sqcap z$, $D_1' = ZD \sqcap z$, $D_1 = ZD' \sqcap z$, $Y = SZ \sqcap z$. Wegen $\bar{R} \neq \bar{U}'$ ist dann $\bar{Z} \notin \bar{z}$.

α) Es sei $D' \notin \mathscr{V}(d)$. Setzen wir $p' = ZV$, dann gibt es Punkte $N_1' = p' \sqcap g'$ und $M' = z \sqcap p'$. Da $D \neq D'$ ist, gilt $U'D \nmid RD'$ und mit der Z-Projektion $\varphi(Z, d, z)$ erhält man nach (I, 3) $MD_1 \nmid RD_1'$. Da U', D, R, D' voneinander fern sind, sind auch M, D_1, R, D_1' fern. Wegen $\bar{D} = \bar{V}$, $p' = ZV$, $\bar{z} \nparallel \bar{y}$ ist $\bar{M}' = \bar{D}_1$

und nach (S7) ergibt sich $MD_1 \nmid RD'_1 \Rightarrow MM' \nmid RD'_1$, also $\neg(MD'_1M')$. Setzen wir $q = ZD'$, so ist $M \notin q$ und wir können $M \in H_q^+$ voraussetzen. Aus $\bar{D}' \neq \bar{V}$ folgt $M' \notin q$ und $\neg(MD'_1M')$ impliziert $M' \in H_q^+$. Wegen $\neg(MZN)$ ist dann $N \in H_q^+$ und folglich $\neg(NZN') \Rightarrow N' \in H_q^+$. Da $\bar{g}' \parallel \bar{q}, g' \neq g$ und $N' \in H_q^+$ ist, ergibt sich

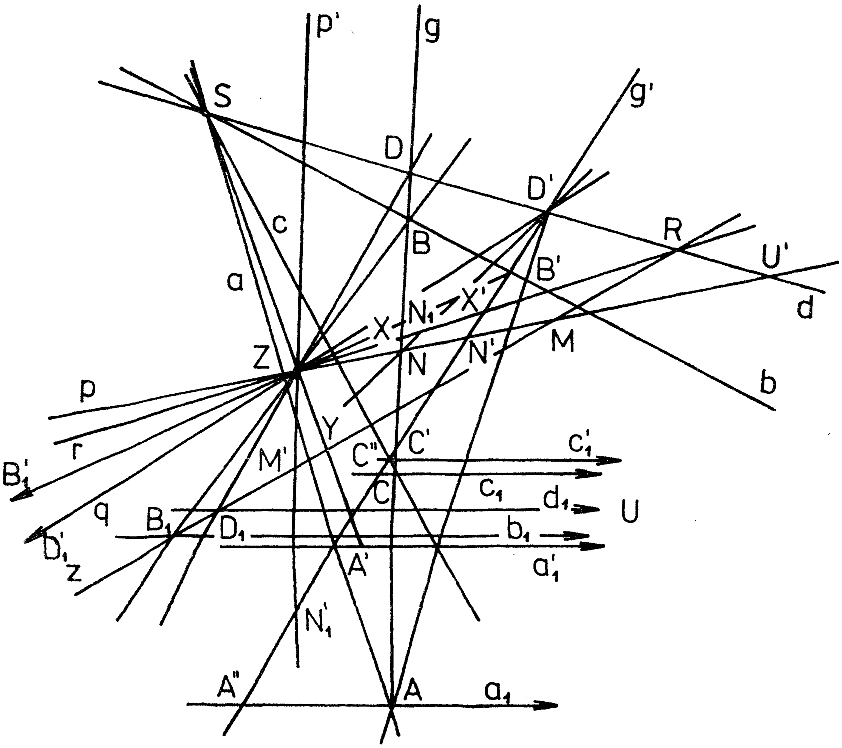

Fig. 12

nach [3], (A1) $g' \subset H_q^+$ und $N_1 \in H_q^+$. Aus $M' \in H_q^+$ und $N'_1 \in H_q^+$ folgt dann $\neg(M'ZN'_1)$.

(i) Es sei $SU' \nmid DD'$. Betrachten wir eine Z-Projektion $\varphi(Z, d, z)$, dann ergibt sich nach (I, 3) $U'R \nmid DD' \Rightarrow MR \nmid D_1D'_1$, $SU' \nmid DD' \Rightarrow PM \nmid D_1D'_1$ und nach [2], Satz 6 $D_1D'_1 \nmid MR \wedge D_1D'_1 \nmid MY \Rightarrow D_1D'_1 \nmid YR \Rightarrow \neg(D_1YD'_1)$. Setzen wir $b_1 = B_1U, d_1 = D_1U$, dann wegen $\bar{g} \parallel \bar{y}, \bar{Z} \notin \bar{g}, \bar{M} \neq \bar{Z}$ und $\neg(MZN)$ gilt nach [4], (B4) $B \leqq D \Rightarrow b_1 \leqq d_1$ in der Anordnung von $\Pi(x)$ mit $x \leqq e'$. Diese Anordnung induziert eine Anordnung von z, in der $B_1 \leqq D_1$ gilt. Ferner setzen wir $a_1 = UA$, $c_1 = UC$, $a'_1 = UA'$, $c'_1 = UC'$ und $A'' = a_1 \sqcap g'$, $C'' = c_1 \sqcap g'$.Nach [4], (B2) gilt dann $A \leqq C \Rightarrow a_1 \leqq c_1 \Rightarrow A'' \leqq C''$ in der Anordnung von g. Wir zeigen, daß $A' \leqq C'$ in der von $\Pi(x)$ induzierten Anordnung von g' ist: Gilt $\bar{S} \neq \bar{U}$, dann ist $\bar{S}, \bar{D}, \bar{D}' \neq \bar{U}$ und $a, g, AD' \in F(A, a_1)$. Aus $SU' \nmid DD'$ folgt $\neg(gaAD')$ in der nach [3], Def. 11 erklärten Zwischenrelation von $F(A, a_1)$. Wegen $\bar{S} \neq \neq \bar{D}, \bar{D}', \bar{U}$ und $\bar{S} \neq \bar{D}, \bar{D}'$ erhält man nach [3], Satz 18 $a_1 \leqq c_1 \Rightarrow a_1' \leqq c_1' \Rightarrow \Rightarrow A' \leqq C'$. Ist $\bar{S} = \bar{U}$, dann ergibt sich $\bar{a} = \bar{a}_1$ und mittels der PZ-Projektionen $\varphi(U, g', g)$, $\psi(S, g, g')$ erhält man nach [5], Satz 6 $A'' \leqq C'' \Rightarrow A' \leqq C'$. Ferner wollen wir zeigen, daß $A' \leqq C'$ in der nach [4], (B1) definierten Anordnung von g_α' und $B' \leqq D'$ in der nach [4], (B3) erklärten Anordnung von $\mathcal{U}(g')$ gilt. Wir setzen $E_u = OE \sqcap u$, $E_d = OE \sqcap d$, $D_2 = MD \sqcap u$, $D_2' = MD' \sqcap u$, $R' = z \sqcap u$, $E_u' = = ME_d \sqcap u$.

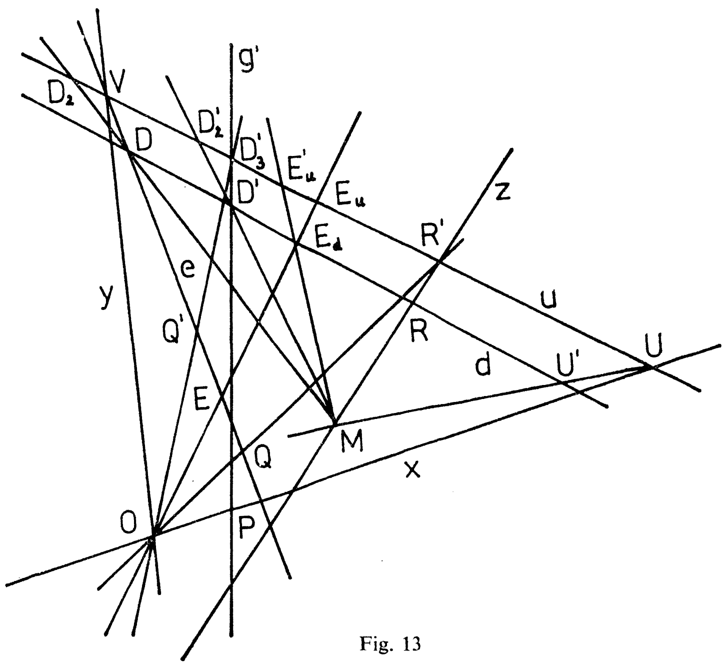

Fig. 13

Zuerst nehmen wir $U'D \nmid E_dR$ an (Fig. 13). Unter Anwendung von $\varphi(M, d, u)$ ergibt sich nach (I, 4) $U'D \nmid E_dR \Rightarrow UD_2 \nmid E_u'R'$. Gilt $\bar{E}_d \neq \bar{R}$, dann sind die Punkte U', D, E_d, R und folglich auch U, D_2, E_u', R' voneinander fern. Wegen $\bar{D} = \bar{V}$ und $\bar{D} = \bar{D}_2$ ist $\bar{D}_2 = \bar{V}$ und $\bar{E}_d = \bar{E}_u$, $\bar{E}_d = \bar{E}_u'$ impliziert $\bar{E}_u = \bar{E}_u'$. Nach (S7) erhält man also $UD_2 \nmid E_u'R' \Rightarrow UV \nmid E_uR'$. Gilt $\bar{E}_d = \bar{R}$ und zugleich $UV \mid E_uR'$, dann wegen $\bar{E}_u = \bar{R}'$ ergibt sich hieraus nach (S6) $\bar{U} = \bar{E}_u$ oder $\bar{V} = \bar{E}_u$, was ein Widerspruch ist. Mithin ist auch in diesem Fall $UV \nmid E_uR'$ erfüllt. Setzen wir $P = x \sqcap e$, $Q = OR' \sqcap e$, dann erhalten wir mittels $\varphi(O, u, e)$ nach (I, 3) $UV \nmid E_uR' \Rightarrow PV \nmid EQ$, was gemäß (T2) $\neg(EPQ)$ bedeutet. Wegen $OR' \parallel z$ sind nach [4], (S4) die durch $\Pi(x)$, $\Pi(y)$ induzierten Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von z gleich.

Aus $B_1 \leqq D_1$ ergibt sich daher $B_1 \leqq' D_1$. Wegen $\neg(XZX')$ und $\neg(D_1YD_1')$ erhält man dann nach [4], (A3) $B_1 \leqq' D_1 \Rightarrow B_1' \leqq' D_1'$. Da $\bar{g}' \nparallel \bar{y}$, $\bar{z} \nparallel \bar{g}'$, $\bar{z} \nparallel \bar{y}$ und $\neg(M'ZN_1')$ gilt, ergibt sich nach [4], (B3) $B_1' \leqq D_1' \Rightarrow B_1' \leqq D_1'$ in der Anordnung von $\mathscr{U}(g')$.

Nehmen wir an, daß außerdem $U'D \nmid E_dR$ auch $U'D \mid E_dD'$ gilt, dann wegen $\bar{D}' \neq \bar{D}, \bar{U}'$ ist nach [2], Satz 5 $U'D \mid RD'$, was ein Widerspruch zu $UD \nmid RD'$ ist. Somit gilt $U'D \nmid E_dD'$. Unter Anwendung von $\varphi(M, d, u)$ ergibt sich nach (I, 4) $UD_2 \nmid E_u'D_2'$. Setzt man $D_3' = g' \sqcap u$, dann ist $\bar{D}_3' = \bar{D}_2'$ und gleichzeitig $\bar{D}_2 = \bar{V}$, $\bar{E}_u' = \bar{E}_u$. Ist $\bar{E}_d \neq \bar{D}'$, so sind U', D, E_d, D' und auch U, D_2, E_u', D_2' voneinander fern. Nach (S7) ergibt sich also $UD_2 \nmid E_u'D_2' \Rightarrow UV \nmid E_uD_3'$. Gilt $\bar{E}_d = \bar{D}'$ und zugleich $UV \mid E_uD_3'$, dann wegen $\bar{E}_u = \bar{D}_3'$ erhält man nach (S6) entweder $\bar{U} = \bar{E}_u$ oder $\bar{V} = \bar{E}_u$, was ein Widerspruch ist. Deswegen ist erneut $UV \nmid E_uD_3'$. Setzt man $Q' = OD_3' \sqcap e$, dann mit $\varphi(O, u, e)$ ergibt sich $PV \nmid EQ'$, also $\neg(EPQ')$. Wegen $OD_3' \parallel g'$ sind nach [4], (S4) die durch $\Pi(x)$, $\Pi(y)$ induzierten Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von gleich. Aus $A' \leqq C'$ folgt also $A' \leqq' C'$ in der Anordnung von g', die nach (B1) definiert ist. $A' \leqq' C'$ und $B' \leqq D'$ implizieren $A'B' \mid C'D'$.

Nun nehmen wir $U'D \mid E_dR$ an. Aus $\bar{E}_d = \bar{R}$ folgt $\bar{R} = \bar{U}'$, also ein Widerspruch. Mithin ist $\bar{E}_d \neq \bar{R}$ und die Punkte U', D, E_d, R sind fern. Mittels $\varphi(M, d, u)$ ergibt sich $UV \mid E_u'R'$ und nach (S7) folgt hieraus $UV \mid E_uR'$, also (EPQ). Gemäß [4], (S4) sind die von $\Pi(x)$, $\Pi(y)$ definierten Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von z invers und folglich $B_1 \leqq D_1$ impliziert $D_1 \leqq' B_1$. Wegen $\neg(D_1PD_1')$ ergibt sich nach [4], (A3) $D_1' \leqq' B_1'$ und gemäß [4], (B3) folgt daraus $D' \leqq B'$ in der Anordnung von $\mathscr{U}(g')$. Gilt noch $U'D \nmid E_dD'$, dann wegen $R \neq U', D$ erhält man nach [2], Satz 5 $U'D \mid E_dR \wedge U'D \nmid E_dD' \Rightarrow U'D \mid D'R$, was ein Widerspruch ist. Somit ist $U'D \mid E_dD'$ und folglich $UV \mid E_uD_3'$, was (EPQ) bedeutet. Nach [4], (S4) sind dann die Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von g' invers und aus $A' \leqq C'$ also folgt $C' \leqq' A'$. Aus $C' \leqq' A'$ und $D' \leqq B'$ ergibt sich $A'B' \mid C'D'$.

(ii) Es sei $SU' \mid DD'$. Unter Anwendung von $\varphi(Z, d, z)$ ergibt sich nach (I, 3) $U'R \nmid DD' \Rightarrow MR \nmid D_1D_1'$, $SU' \mid DD' \Rightarrow PM \mid D_1D_1'$ und wegen $P \neq D_1, D_1'$ gilt nach [2], Satz 5 $D_1D_1' \mid MP \wedge D_1D_1' \nmid MR \Rightarrow D_1D_1' \mid PR \Rightarrow (D_1PD_1')$. Ferner verwenden wir die Bezeichnungen von dem Fall (i). Nach [4], (B4) erhält man $B \leqq D \Rightarrow B_1 \leqq D_1$ in der durch $\Pi(x)$ induzierten Anordnung von z. Aus $SU' \mid DD'$ folgt $(gaAD')$ in der Zwischenrelation von $F(A, a_1)$. Nach [3], Satz 18 gilt dann $A \leqq C \Rightarrow C' \leqq A'$ in der durch $\Pi(x)$ induzierten Anordnung von g'. Ist $U'D \nmid E_dR$, *dann nach [4], (S4) sind die durch $\Pi(x)$ und $\Pi(y)$ induzierten Anordnungen von z gleich. Mithin gilt $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow B_1 \leqq' D_1$, wegen (D_1PD_1') ergibt sich nach [4], (A3) $B_1 \leqq' D_1 \Rightarrow D_1' \leqq' B_1'$ und gemäß [4], (B3) gilt $D' \leqq B'$ in der Anordnung von $\mathscr{U}(g')$. Entsprechend zum Fall (i) läßt sich $U'D \nmid E_dD'$ beweisen. Nach [4], (S4) sind die Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von g' gleich und hieraus folgt $C' \leqq A' \Rightarrow C' \leqq' A'$. Wegen $C' \leqq' A'$ und $D' \leqq B'$ ergibt sich also $A'B' \mid C'D'$.*

Gilt $U'D \mid E_dR$, dann ist $U'D \mid E_dD'$ und die Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von z sind invers, woher $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow D_1 \leqq' B_1$ folgt. Wegen (D_1PD_1') ist nach [4], (A3)

$D_1 \leqq' B_1 \Rightarrow B_1' \leqq' D_1'$ und nach [4], (B3) $B' \leqq D'$. Analog sind die Anordnungen $\leqq$, $\leqq'$ von g' invers, woraus $C' \leqq A' \Rightarrow A' \leqq' C'$ und $A'B' \mid C'D'$ folgt.

β) Es sei $\bar{D}' \in \mathscr{V}(d)$. Dann ist $\bar{D} = \bar{D}' = \bar{V}$ und wegen $\bar{S} \neq \bar{D}$ ergibt sich $\bar{S} \neq \bar{V}$. Da π konvex ist, gilt $SU' \nmid DD'$ und unter Anwendung von $\varphi(Z, d, z)$ erhält man $\neg(D_1PD_1')$. Aus $B \leqq D$ folgt nach [4], (B4) $B_1 \leqq D_1$ in der durch $\Pi(x)$ nach [4], (B2) erklärten Anordnung von z. Wegen $\neg(XZX')$ und $\neg(D_1PD_1')$ ist nach [4], (A3) $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow B_1' \leqq D_1'$. Aus $\neg(NZN')$, $\neg(MZN)$ folgt $\neg(MZN')$ und gemäß [4], (B4) ergibt sich dann $B_1' \leqq D_1' \Rightarrow B' \leqq D'$ in der Anordnung von $\mathscr{U}(g')$. Analog zum Fall α) (i) beweisen wir, daß $A \leqq C \Rightarrow A' \leqq C'$ in der nach [4], (B2) definierten Anordnung von g' gilt. $A' \leqq C'$ und $B' \leqq D'$ implizieren dann $A'B' \mid C' D'$.

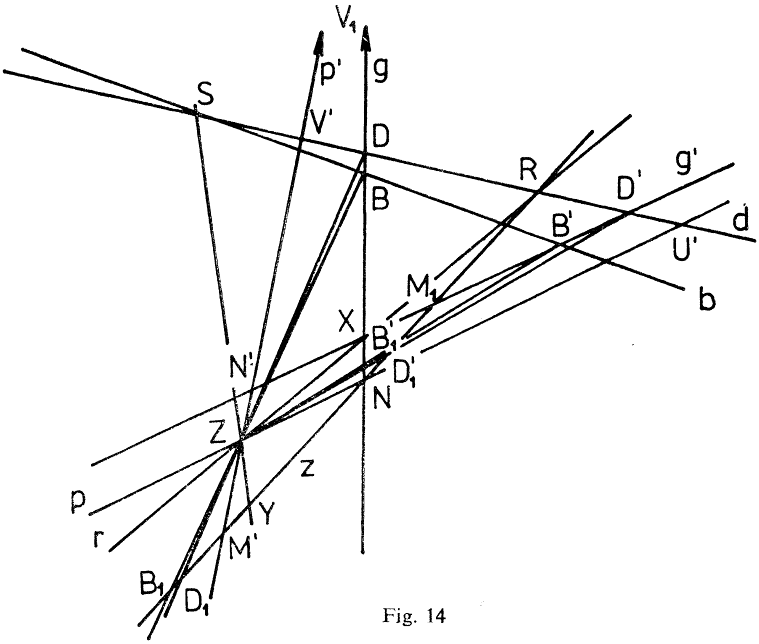

Fig. 14

b) Es sei $\bar{D}' = \bar{U}$. Wir wählen einen zu S, D, D' fernen Punkt R mit $DD' \mid SR$ und bezeichnen $X = g \sqcap g'$, $r = RX$. Auf r wählen wir einen Punkt Z mit $\bar{Z} \notin \bar{g}, \bar{g}'$ und setzen $p = ZU$, $p' = ZV$, $N = p \sqcap g$, $N' = p' \sqcap g'$, $U' = p \sqcap d$, $V' = p' \sqcap d$, $z = RN$, $M_1 = z \sqcap g'$, $M' = z \sqcap p'$ (Fig. 14). Zuerst zeigen wir, daß $(M'ZN')$ gilt: Nach [3], (A1) können wir $z \in H_r^+$, also $M_1, M' \in H_r^+$ voraussetzen. Ist V_1 ein gemeinsamer Punkt von p', g, dann nach [3], Satz 8 ist das Produkt φ der PZ-Projektionen $\varphi_1(V_1, g', p)$ und $\varphi_2(R, p, g')$ eine monoton wachsende Anordnung der geordneten Menge g'. Nehmen wir z. B. $N' \leqq X$ an, dann wegen $\varphi(N') = X$, $\varphi(X) = M_1$ ergibt sich $X \leqq M_1$ und folglich $(N'XM_1)$. Aus $M_1 \in H_r^+$ folgt dann $N' \in H_r^-$ und $M' \in H_r^+$ impliziert $(M'ZN')$.

Setzen wir $B_1 = ZB \sqcap z$, $D_1 = ZD \sqcap z$, $B'_1 = ZB' \sqcap z$, $D'_1 = ZD' \sqcap z$, $Y = SZ \sqcap z$, dann mittels $\varphi(Z, d, z)$ erhalten wir nach (I, 3) $DD' \mid SR \Rightarrow D_1D'_1 \mid YR$, was $(D_1YD'_1)$ bedeutet. Wegen $\neg(NZN')$ gilt nach [4], (B4) $B \leqq D \Rightarrow B_1 \leqq D_1$ in der durch $\Pi(x)$ induzierten Anordnung von z. Ferner setzen wir $E_d = OE \sqcap d$, $E_u = OE \sqcap u$, $E'_u = XE_d \sqcap u$, $D_2 = g \sqcap u$, $D'_2 = g' \sqcap u$, $R' = XR \sqcap u$, $R'' = z \sqcap u$.

Nehmen wir $DD' \nmid E_dR$ an, dann unter Anwendung von $\varphi(X, d, u)$ ergibt sich nach (I, 4) $D_2D'_2 \nmid E'_uR'$. Dabei ist $\bar{D} = \bar{D}_2$, $\bar{E}_d = \bar{E}'_u$, $\bar{R} = \bar{R}'$ und $\bar{D}' = \bar{D}'_2$. Gilt $\bar{R} \neq \bar{E}_d$ dann sind D, D', E_d, R und folglich D_2, D'_2, E'_u, R' voneinander fern. Wegen $\bar{D}_2 = \bar{V}$, $\bar{D}'_2 = \bar{U}$, $\bar{E}'_u = \bar{E}_u$, $\bar{R}' = \bar{R}''$ erhält man also nach (S7) $D_2D'_2 \nmid E'_uR' \Rightarrow VU \nmid E_uR''$. Gilt $\bar{R} = \bar{E}_d$, dann ist $\bar{E}_u = \bar{R}''$ und aus $VU \mid E_uR''$ folgt $\bar{U} = \bar{E}_u$, was ein Widerspruch ist. Somit ergibt sich erneut $VU \nmid ER''$. Setzt man $P = x \sqcap e$, $Q = OR'' \sqcap e$, dann mit $\psi(O, u, e)$ erhält man nach (I, 3) $VU \nmid E_uR'' \Rightarrow VP \nmid EQ$, also $\neg(EPQ)$. Wegen $OR'' \parallel z$ gilt nach [4], (S4) $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow B_1 \leqq' D_1$ in der durch $\Pi(y)$ induzierten Anordnung $\leqq'$ von z. Da zugleich $\neg(XZX)$ und $(D_1YD'_1)$ erfüllt ist, gilt nach [4], (A3) $B_1 \leqq' D_1 \Rightarrow D'_1 \leqq' B'_1$. Wegen $(M'ZN')$ ergibt sich nach [4], (B3), (S1) $D'_1 \leqq' B'_1 \Rightarrow B' \leqq D'$. Da $\bar{S} \neq D, D'$ ist, so aus $DD' \mid SR$, $DD' \nmid E_dR$ folgt nach [2], Satz 5 $DD' \mid SE_d$. Hieraus erhält man $\bar{S} \neq \bar{E}_d$ und D, D', S, E_d sind fern. Setzen wir $U'' = x \sqcap d$, $V'' = y \sqcap d$, dann ist $\bar{D} = \bar{V}''$, $\bar{D}' = \bar{U}''$ und nach (S7) gilt $V''U'' \mid SE_d$. Unter Anwendung von $\varphi(O, d, e)$ ergibt sich nach (I, 3) $V''U'' \mid SE_d \Rightarrow VP \mid Q'E \Rightarrow (EPQ')$, wo $Q' = OS \sqcap e$ gesetzt ist. Da $A \leqq C$ in der nach [4], (B2) definierten Anordnung von g ist, gilt nach [4], (S5) $A' \leqq' C'$ in der nach [4], (B1) erklärten Anordnung $\leqq'$ von g'. Aus $A' \leqq' C'$ und $B' \leqq' D'$ folgt $A'B' \mid C'D'$.

Es sei nun $DD' \mid E_dR$. Dann ist $VU \mid E_uR''$ und (EPQ). Nach [4], (S4) ergibt sich $B_1 \leqq D_1 \Rightarrow D_1 \leqq' B_1$ in der nach [4], (B1) definierten Anordnung $\leqq'$ von z. Wegen $(D_1YD'_1)$ erhält man nach [4], (A3) $D_1 \leqq' B_1 \Rightarrow B'_1 \leqq D'_1$ und dies impliziert gemäß [4], (B3), (S1) $D' \leqq B'$. Da $D \neq E_d, R, S$ und $D' \neq E_d, R, S$ gilt, ergibt sich nach [2], Satz 7 $DD' \mid E_dR \wedge DD' \mid SR \Rightarrow DD' \nmid E_dS$, woher $V''U'' \nmid SE_d$, $VP \mid Q'E$ und $\neg(EPQ')$ folgt. Nach [4], (S5) gilt $A \leqq C \Rightarrow C' \leqq' A'$ in der nach [4], (B1) erklärten Anordnung $\leqq'$ von g'. Aus $C' \leqq' A'$ und $D' \leqq B'$ folgt dann $A'B' \mid C'D'$.

3. a) Gilt $D' \in \mathscr{V}(d)$, $D \notin \mathscr{V}(d)$ und $\bar{D} \neq \bar{U}$, dann verfahren wir mit der Vertauschung von D und D' analog zum Fall 2a), α).

b) Gilt $D' \in \mathscr{V}(d)$ und $\bar{D} = \bar{V}$, dann läßt sich entsprechend zum Fall 2b) verfahren.

Ad (II, 1, d) Es seien B, C, D uneigentlich und A eigentlich. Aus $\bar{S} \in \bar{g}$ folgt $\bar{S} = \bar{B} = \bar{C} = \bar{D}$, was ein Widerspruch ist. Mithin gilt $\bar{S} \notin \bar{g}$ und A' ist eigentlich, B', C', D' sind uneigentlich. Wird $B = D$ angenommen, dann ist $B' = D'$ und nach [2], Satz 3 ergibt sich $A'B' \mid C'D'$. Es sei also $B \neq D$ und folglich $B' \neq D'$. Wir wählen einen eigentlichen Punkt $E \in g$ mit $AB \nmid CE$ und setzen $E' = SE \sqcap g'$.

Wegen $D \neq A, B$ ist nach [2], Satz 5 $AB \mid DC \wedge AB \nmid EC \Rightarrow AB \mid DE$. Da A, E eigentlich und B, D uneigentlich sind, gilt nach (II, 1, c) $AB \mid DE \Rightarrow A'B' \mid D'E'$ und entsprechend $AB \nmid CE \Rightarrow A'B' \nmid C'E'$. Wegen $D' \neq A'B'$ erhält man nach [2], Satz 5 $A'B' \mid D'E' \wedge A'B' \nmid C'E' \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (II, 1, e). Da die Punkte A, B, C, D uneigentlich sind, gilt $\bar{S} \notin \bar{g}$ und A', B', C', D' sind auch uneigentlich. Sind zwei Punkte von A, B, C, D gleich, so sind auch zwei Punkte von A', B', C', D' gleich und nach [2], Satz 3 gilt $A'B' \mid C'D'$. Ferner können wir also voraussetzen, daß A, B, C, D und auch A', B', C', D' voneinander verschieden sind. Wegen $AB \mid CD$ und $A, B, C, D \in \mathcal{U}(g)$ läßt sich z. B. $(ACB) \wedge (CBD)$ annehmen. Wählen wir einen eigentlichen Punkt $E \in g$, dann ist nach (T2) $(ACB) \Rightarrow AB \mid CE$. Nach [2], Satz 7 ergibt sich dann $AB \mid CD \wedge AB \mid CE \Rightarrow AB \nmid DE$ und gemäß (II, 1, d) gilt $AB \mid CE \Rightarrow A'B' \mid C'E'$, $AB \nmid DE \Rightarrow A'B' \nmid D'E'$, wo $E' = SE \sqcap g'$ gesetzt ist. Nach [2], Satz 5 erhält man $A'B' \mid C'E' \wedge A'B' \mid D'E' \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

Ad (II, 3). Da die Gerade g uneigentlich ist, sind A, B, C, D uneigentlich.

1. Wir nehmen an, daß alle Punkte A, B, C, D zu S fern sind. Dann sind alle Geraden a, b, c, d und auch alle Punkte A', B', C', D' uneigentlich. Wir wählen

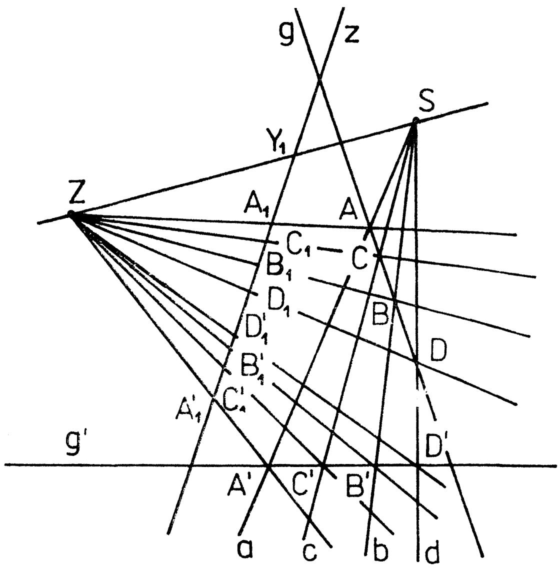

Fig. 15

einen Punkt Z und ene Gerade z mit $\bar{Z} \notin \bar{z}$, $\bar{S} \notin \bar{z}$, $\bar{z} \nparallel \bar{g}'$ und $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \notin \bar{z}$. Dann gibt es eigentliche Punkte $A_1 = ZA \sqcap z$, $B_1 = ZB \sqcap z$, $C_1 = ZC \sqcap z$, $D_1 = ZD \sqcap z$, $A_1' = ZA' \sqcap z$, $B_1' = ZB' \sqcap z$, $C_1' = ZC' \sqcap z$, $D_1' = ZD' \sqcap z$ und $Y_1 = ZS \sqcap z$ (Fig. 15). Nach (I, 3) ergibt sich $AB \mid CD \Rightarrow A_1B_1 \mid C_1D_1$ und nach

(T1) läßt sich z. B. $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1)$ annehmen. Gemäß [1], (Z5) gilt also $(A_1B_1D_1) \vee B_1 = C_1$ und im Falle $B_1 \neq C_1$ erhält man nach [1], (Z5b) $(A_1C_1B_1) \wedge$ $\wedge (A_1B_1D_1) \Rightarrow (A_1C_1D_1)$. Für die Punkte B_1, C_1, Y_1 treten nach [1], (Z2) die Möglichkeiten $(C_1B_1Y_1) \vee (B_1Y_1C_1) \vee (B_1C_1Y_1)$ ein. Wir werden alle drei angeführten Fälle untersuchen.

a) Es sei $(C_1B_1Y_1)$. Wegen $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1Y_1)$ ergibt sich nach [4], (A4) a) $(A'_1C'_1B'_1)$, was nach [4], (U1) $(A'C'B')$ impliziert. Ist $B_1 = C_1$, dann gilt $B = C$ und $SB = SC$, also $B' = C'$. Wegen $(A'C'B') \wedge (C'B'D')$ erhält man nach (T1) $A'B' \mid C'D'$. Aus $A_1 = C_1$ folgt $A = C$, $A' = C'$ und $(A'C'B') \wedge (C'A'D') \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$. Die Voraussetzung $B_1 = D_1$ impliziert $B' = D'$ und $(A'C'B') \wedge$ $\wedge (C'B'D') \Rightarrow A'B' \mid C'D'$. Ferner nehmen wir $C_1 \neq A_1$, B_1 und $B_1 \neq D_1$ an. Gemäß [1], (Z5) gilt $(Y_1B_1C_1) \wedge (B_1C_1A_1) \Rightarrow (Y_1C_1A_1) \vee B_1 = C_1$, also $(Y_1C_1A_1)$. Nach [1], (Z6) ist dann $(Y_1C_1A_1) \wedge (Y_1B_1C_1) \Rightarrow (Y_1B_1A_1)$ und nach [1], (Z5b) ergibt sich $(A_1C_1B_1) \wedge (A_1B_1Y_1) \Rightarrow (C_1B_1Y_1)$. Für B_1, Y_1, D_1 können erneut die folgende Möglichkeiten $(Y_1B_1D_1)$, $(B_1Y_1D_1)$ und $(B_1D_1Y_1)$ eintreten.

α) Es sei $(Y_1B_1D_1)$. Nach [1], (Z2) gilt $(Y_1C_1D_1) \vee (C_1Y_1D_1) \vee (C_1D_1Y_1)$. Ist $(Y_1C_1D_1)$ erfüllt, dann $(Y_1B_1C_1) \wedge (Y_1C_1D_1) \Rightarrow (B_1C_1D_1)$, was wegen $B_1 \neq C_1$ einen Widerspruch zu $(C_1B_1D_1)$ bedeutet. Gilt $(C_1Y_1D_1)$, dann ergibt sich nach [1], (Z5) $(D_1Y_1C_1) \wedge (Y_1C_1A_1) \Rightarrow (D_1C_1A_1) \vee Y_1 = C_1$. Aus $Y_1 = C_1$ folgt $Y = C$ und $\bar{S} = \bar{C}$, was ein Widerspruch ist. Wegen $A_1 \neq C_1$ und $(A_1C_1D_1)$ führt auch $(D_1C_1A_1)$ zum Widerspruch. Nehmen wir schließlich $(C_1D_1A_1)$ an, dann ist $(Y_1B_1D_1) \wedge (Y_1D_1C_1) \Rightarrow (B_1D_1C_1)$, was wieder ein Widerspruch zu $(C_1B_1D_1)$ und $B_1 \neq D_1$ ist. Der Fall $(Y_1B_1D_1)$ führt also stets zum Widerspruch.

β) Es sei $(B_1Y_1D_1)$. Nach [1], (Z6) ist $(D_1Y_1B_1) \wedge (D_1B_1C_1) \Rightarrow (D_1Y_1C_1)$ und wegen $(A_1C_1D_1)$, $(D_1Y_1C_1)$ ergibt sich nach [4], (A4), b) $(D'_1A'_1C'_1)$. Gemäß [4], (U1) gilt dann $(D'A'C')$ und $(A'C'B') \wedge (C'A'D')$ impliziert nach (T1) $A'B' \mid C'D'$.

γ) Es sei $(B_1D_1Y_1)$. Nach [4], (A4), a) erhält man $(C_1B_1D_1) \wedge (B_1D_1Y_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (C'_1B'_1D'_1)$, also $(C'B'D')$. Somit ist $(A'C'B') \wedge (C'B'D') \Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

b) Es sei $(B_1Y_1C_1)$. Nach [4], (A4), b) und [4], (U1) gilt $(A_1C_1B_1) \wedge (B_1Y_1C_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (B'_1A'_1C'_1) \Rightarrow (B'A'C')$. Aus $B_1 = C_1$ folgt $B' = C'$ und $(A'C'B') \wedge (C'B'D') \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$. Ferner sei $B_1 \neq C_1$. Nach [1], (Z6) ergibt sich $(B_1Y_1C_1) \wedge$ $\wedge (B_1C_1A_1) \Rightarrow (B_1Y_1A_1)$ und wegen $B_1 \neq C_1$ gilt $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A_1B_1D_1)$. Nach [4], (A4) c) erhält man $(A_1B_1D_1) \wedge (A_1Y_1B_1) \Rightarrow (A'_1D'_1B'_1)$, also $(A'D'B')$. Gemäß [1], (Z5b), (Z6) ergibt sich $(B'D'A') \wedge (B'A'C') \Rightarrow (D'A'C') \wedge$ $\wedge (B'D'C')$ und folglich $(C'A'D') \wedge (C'D'B') \Rightarrow (A'D'B')$. Aus $(A'D'B')$, $(D'A'C')$ folgt dann $A'B' \mid C'D'$.

c) Es sei $(B_1D_1Y_1)$. Aus $B_1 = D_1$ folgt $B' = D'$ und $(A'C'B') \wedge (C'B'D') \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$. Analog $B_1 = C_1$ impliziert $B' = C'$ und $(A'C'B') \wedge (C'B'D') \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$. Ferner sei $B_1 \neq C_1, D_1$. Für C_1, Y_1, B_1 gilt $(C_1Y_1B_1) \vee (B_1C_1Y_1) \vee$ $\vee (C_1B_1Y_1)$. Ist $(C_1Y_1B_1)$, dann nach [1], (Z5b) ergibt sich $(C_1Y_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (Y_1B_1D_1)$, was ein Widerspruch zu $(B_1D_1Y_1)$ und $B_1 \neq D_1$ ist. Aus $(B_1C_1Y_1)$ folgt nach [1], (Z5) $(Y_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow (Y_1B_1D_1) \vee B_1 = C_1$, also $(Y_1B_1D_1)$.

Dies ist aber wieder ein Widerspruch. Mithin gilt $(C_1B_1Y_1)$. Nach [4], (A4), a) und [4], (U1) erhält man $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1Y_1) \Rightarrow (A'_1C'_1B'_1) \Rightarrow (A'C'B')$ und $(C_1B_1D_1) \wedge (B_1D_1Y_1) \Rightarrow (C'_1B'_1D'_1) \Rightarrow (C'B'D')$, woraus $A'B' \mid C'D'$ folgt.

2. Wir nehmen an, daß einer der Punkte A, B, C, D zu S benachbart ist, es sei z. B. $\bar{B} = \bar{S}$. Dann gilt $\bar{b} \neq \bar{g}$, b ist eigentlich und wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ ist auch B' eigentlich. Die anderen Geraden a, c, d und auch die Punkte A', C', D' sind uneigentlich. Entsprechend zum Fall 1 wählen wir einen Punkt Z und eine Gerade z und betrachten die Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$. Wegen $AB \mid CD$ gilt nach (I, 3) $A_1B_1 \mid C_1D_1$ und wir können wieder $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1)$ annehmen. Nach [1], (Z5) ergibt sich $(A_1C_1B_1) \wedge (C_1B_1D_1) \Rightarrow (A_1B_1D_1) \vee B_1 = C_1$. Aus $\bar{B} = \bar{S}$, $\bar{C} \neq \bar{S}$ folgt $\bar{B} \neq \bar{C}$, $\bar{B}_1 \neq \bar{C}_1$ und deswegen gilt $(A_1B_1D_1)$. Nach [1], (Z5b), (Z6) erhält man dann $(A_1C_1B_1) \wedge (A_1B_1D_1) \Rightarrow (C_1B_1D_1) \wedge (A_1C_1D_1)$ und nach [4], (A4), b) gilt $(A_1C_1D_1) \wedge (D_1B_1C_1) \Rightarrow (D'_1A'_1C'_1)$, also $(C'A'D')$. Wegen $A', C', D' \in \mathscr{U}(g')$ und $B' \in g'_\alpha$ ergibt sich nach (T2) $(C'A'D') \Rightarrow C'D' \mid A'B' \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B' \mid C'D'$.

LITERATUR

[1] Kunze, M.: *Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie.* Dissertation, Christian-Albrechts-Universitä zu Kiel 1975.

[2] Machala, F.: *Über Mengen mit Trennrelationen.* Acta Univers. Pal. Olomucensis, t. 69, 1981t 5–22.

[3] Machala, F.: *Über angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen, die sich in projektive Klingenbergsche Ebenen einbetten lassen.* Acta Univers. Pal. Olomucensis.

[4] Machala, F.: *Über die Fortsetzung einer Anordnung der affinen Klingenbergschen Ebene zu einer Anordnung der projektiven Klingenbergschen Ebene* I. Acta Univers. Pal. Olomucensis.

[5] Machala, F.: *Fastgeordnete und geordnete Klingenbergsche Ebenen.* Časopis pro pěst. matem. 106 (1981), 138–155.

[6] Machala, F.: *Angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen.* Czech. Math. Journal, 30 (105) 1980, 341–356.

Übersetzung: František Machala

Adresa autora: RNDr. František Machala, CSc.,
katedra algebry a geometrie
přírodovědecké fakulty University Palackého
Leninova 26
771 46 Olomouc, ČSSR

Souhrn

O PRODLOUŽENÍ USPOŘÁDÁNÍ AFINNÍ KLINGENBERGOVSKÉ ROVINY DO USPOŘÁDÁNÍ PROJEKTIVNÍ KLINGENBERGOVSKÉ ROVINY

FRANTIŠEK MACHALA

Předložená práce je druhou částí autorova článku [4]. Je zde dokázán teorém: Buď α uspořádaná afinní klingenbergovská rovina vnořená do projektivní klingenbergovské roviny π. Jestliže α splňuje požadavky (A1)–(A4) ze [3] a [4], pak je možno rovinu π konvexně uspořádat.

Резюме

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПОРЯДОЧЕННОСТИ АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ КЛИНГЕНБЕРГА В УПОРЯДОЧЕННОСТЬ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ КЛИНГЕНБЕРГА

ФРАНТИШЕК МАХАЛА

Предлагаемая работа представляет вторую часть статьи [4] автора. Здесь доказывается следующая теорема: Пусть α – упорядоченная аффинная плоскость Клингенберга подгруженная в проективную плоскость Клингенберга π. Если в α выполняются условия (A1)–(A4) из [3] и [4], то плоскость π выпукло упорядочиваема.