

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

František Machala

Über angeordnete affine Klingenbergische Ebenen, die sich in projektive
Klingenbergische Ebenen einbetten lassen

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 21 (1982), No. 1,
9--31

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/120116>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1982

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Ladislav Sedláček, CSc.*

ÜBER ANGEORDNETE AFFINE KLINGENBERGSCH E EBENEN, DIE SICH IN PROJEKTIVE KLINGENBERGSCH E EBENEN EINBETTEN LASSEN

FRANTIŠEK MACHALA

(Eingelangt am 18. März 1981)

Gewidmet Prof. Miroslav Látoch zu seinem 60. Geburtstag

Ist auf jeder Geraden der affinen Klingenbergischen Ebene eine durch alle Parallelprojektionen reproduzierte Zwischenrelation definiert, dann heißt diese Ebene angeordnet. Der Verfasser untersuchte solche angeordneten Strukturen in [3] und [4].

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit angeordneten affinen Klingenbergischen Ebenen, die sich in projektive Klingenbergische Ebenen einbetten lassen. Falls in einer solchen angeordneten affinen Klingenbergischen Ebene die Zusatzbedingung (A1) gilt, dann läßt sich eine ganze Reihe von in [3] und [4] unter Anwendung der Parallelprojektionen bewiesener Aussagen für sog. PZ-Projektionen (d. h. für Projektionen mit beliebigen uneigentlichen Zentren) verallgemeinern. Auf Grund der Gültigkeit eines weiteren Axioms (A2) werden dann die Sätze 11 bis 18 bewiesen, die in einer folgenden Arbeit des Verfassers zur Lösung des Problems der Erweiterung einer Anordnung der affinen Klingenbergischen Ebene in eine projektive Klingenbergische Ebene benutzt werden.

Definition 1. Es sei $\alpha = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ eine Inzidenzstruktur im Sinne von Dembowski [1] und sei auf \mathcal{L} eine solche Äquivalenzrelation \parallel (Parallelität) erklärt, daß zu beliebigen $P \in \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{L}$ genau eine Gerade q mit $p \parallel q$ existiert. α heißt eine affine Klingenbergische Ebene (kurz AK-Ebene), wenn es eine affine Ebene $\alpha' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ und einen Epimorphismus κ von α auf α' gibt und folgende Forderungen erfüllt sind:

- (1) $P, Q \in \mathcal{P}, P\kappa \neq Q\kappa \Rightarrow \exists! p \in \mathcal{L}; P, QIp,$
- (2) $p, q \in \mathcal{L}, p\kappa \parallel q\kappa \Rightarrow \exists! P \in \mathcal{P}; PIp, q.$

Bemerkung 1. Zur Vereinfachung schreibt man \bar{P} bzw. \bar{p} anstatt $P\kappa$ bzw. $p\kappa$ für $P \in \mathcal{P}$ bzw. $p \in \mathcal{L}$. Elemente von \mathcal{P} bzw. \mathcal{L} heißen Punkte bzw. Geraden. Die Punkte A, B sind benachbart bzw. fern, wenn $\bar{A} = \bar{B}$ bzw. $\bar{A} \neq \bar{B}$ gilt. Die Menge $\Pi(a)$ aller zu a parallelen Geraden nennt man eine Richtung. Eine Parallele zur Geraden a durch den Punkt A wird mit $L(A, a)$ bezeichnet. Im folgenden werden die Geraden als Punkt Mengen aufgefaßt und demgemäß bezeichnet man die Inzidenzrelation mit Symbol \in . Mit $P = p \sqcap q$ bezeichnen wir den nach (2) durch die Geraden p, q eindeutig bestimmten Punkt P .

Definition 2. Es seien g, g' zwei Geraden und $\Pi(h)$ eine Richtung mit $\bar{h} \parallel \bar{g}'$. Eine Abbildung $\varphi : g \rightarrow g'$ mit $\varphi(A) = g' \sqcap L(A, h)$ für alle $A \in g$ heißt eine Parallelprojektion von g in g' mit der Richtung $\Pi(h)$. Solche Parallelprojektion wird mit $\varphi(\Pi(h), g, g')$ bezeichnet.

Definition 3. Eine AK-Ebene α heißt geordnet, wenn es auf jeder Geraden von α mindestens drei voneinander ferne Punkte gibt und für jede Gerade g eine Zwischenrelation auf g erklärt ist ([2], S. 23), welche beim Übergang zu einer anderen Geraden mittels einer Parallelprojektion stets erhalten bleibt.

Definition 4. Es sei $\Pi(h)$ eine Richtung in einer geordneten AK-Ebene α und g eine Gerade mit $\bar{g} \neq \bar{h}$. Für beliebige $h_1, h_2, h_3 \in \Pi(h)$ setzen wir $(h_1 h_2 h_3) : \Leftrightarrow (A_1 A_2 A_3)$, wo $A_i = h_i \sqcap g$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ ist.

Bemerkung 2. Durch Definition 4 wird eine Zwischenrelation in jeder Richtung eingeführt. Das Symbol (ABC) bzw. (abc) bedeutet, daß B bzw. b zwischen A und C bzw. a und c liegt. Nach [2], (2.3) läßt sich auf jeder Geraden und auf jeder Richtung ein Paar voneinander inversen Anordnungen durch die angehörige Zwischenrelation erklären. Im folgenden werden alle Anordnungen von Geraden und Richtungen nach dieser Anschauung aufgefaßt.

Definition 5. Es sei g eine Gerade einer geordneten AK-Ebene. Ist \leq eine durch Definition 4 eingeführte Anordnung von $\Pi(g)$, dann heißen $H_g^+ = \{A \mid g < L(A, g)\}$ und $H_g^- = \{A \mid L(A, g) < g\}$ die durch g erklärten Halbebenen.

Satz 1. Sind H_g^+ und H_g^- die durch g erklärten Halbebenen, dann gilt;

- (H1) $h \parallel g \Rightarrow h = g \vee h \subset H_g^+ \vee h \subset H_g^-$,
- (H2) $X, Y, Z \in h, Y \in g, (XYZ), X \in H_g^+ \Rightarrow Z \in H_g^+ \cup g$,
- (H3) $X, Y, Z \in h, Y \in g, X \in H_g^+, Z \in H_g^- \Rightarrow (XYZ)$,
- (H4) $H_g^+ \cup H_g^- = \mathcal{P} \setminus g$,
- (H5) $H_g^+ \cap H_g^- = \emptyset$.

Zum Beweis siehe [4], Satz 3 und Satz 10.

Definition 6. Es seien $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ eine Inzidenzstruktur, $\pi' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \epsilon)$ eine projektive Ebene und $\kappa : \pi \rightarrow \pi'$ ein Epimorphismus. π heißt eine projektive Klingenbergische Ebene (kurz PK-Ebene), wenn folgende Bedingungen gelten:

- (1) $P, Q \in \mathcal{P}, P\kappa \neq Q\kappa \Rightarrow \exists! p \in \mathcal{L}; P, Q \in p,$
- (2) $p, q \in \mathcal{L}, p\kappa \neq q\kappa \Rightarrow \exists! p \in \mathcal{P}; P \in p, q.$

Bemerkung 3. Analog zu Bemerkung 1 setzen wir \bar{P} bzw. \bar{p} ansatz $P\kappa$ bzw. $p\kappa$ für $P \in \mathcal{P}$ bzw. $p \in \mathcal{L}$ und die Punkte P, Q nennen wir benachbart bzw. fern, falls $\bar{P} = \bar{Q}$ bzw. $\bar{P} \neq \bar{Q}$ gilt. Ähnlich sind die Geraden p, q benachbart bzw. fern, falls $\bar{p} = \bar{q}$ bzw. $\bar{p} \neq \bar{q}$ gilt. Ferner $p = PQ$ bedeutet eine nach (1) mittels der Punkte P, Q eindeutig bestimmte Gerade und $P = p \cap q$ einen nach (2) mittels p, q bestimmten Punkt. Sind $P \in \mathcal{P}$ und $p \in \mathcal{L}$ mit $P \in p$ gegeben, dann bedeutet $N(p, P)$ die Menge derartiger Punkte von p , die zu P benachbart sind und $N(P, p)$ bzw. $F(P, p)$ die Menge solcher durch P gehenden Geraden, die zu p benachbart bzw. fern sind.

Definition 7. Es sei u eine Gerade der PK-Ebene $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$. Für $p \in \mathcal{L}$, $\bar{p} \neq \bar{u}$ setzen wir $p_\alpha = \{X \in p \mid \bar{X} \notin \bar{u}\}$ und $U(p) = \{X \in p \mid \bar{X} \in \bar{u}\}$. Ferner sei $\mathcal{P}_u = \{X \in \mathcal{P} \mid \bar{X} \notin \bar{u}\}$, $\mathcal{L}_u = \{p_\alpha \mid p \in \mathcal{L}, \bar{p} \neq \bar{u}\}$ und $\alpha_u = (\mathcal{P}_u, \mathcal{L}_u, \epsilon)$ gesetzt.

Satz 2. Es sei u eine Gerade der PK-Ebene $\pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ und sei α_u aus Definition 7. Nehmen wir aus der projektiven Ebene π' die Gerade \bar{u} aus, dann erhalten wir eine affine Ebene α_u . Die Restriktion von κ auf α_u bezeichnen wir mit κ' . Sind die Geraden p_α, q_α von \mathcal{L}_u parallel genau dann, wenn p, q einen Punkt auf u gemeinsam haben, dann ist $\alpha_u = (\mathcal{P}_u, \mathcal{L}_u, \epsilon)$ eine AK-Ebene nach Definition 1.

Die Behauptungen von Satz 2 sind offensichtlich.

Bemerkung 4. Im folgenden wird angenommen, daß eine feste PK-Ebene π gegeben ist und durch eine Gerade u von π eine AK-Ebene $\alpha = \alpha_u$ erklärt ist. Dann heißt π eine projektive Erweiterung von α und α ist in π eingebettet. Punkte von \mathcal{P}_u bzw. $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_u$ heißen eigentlich bzw. uneigentlich. Analog ist die Gerade p mit $\bar{p} \neq \bar{u}$ bzw. $\bar{p} = \bar{u}$ eigentlich bzw. uneigentlich. Ferner werden eigentliche Punkte kurz Punkte genannt und diese Verabredung wird auch für Geraden respektiert. Uneigentliche Elemente werden stets besonders bezeichnet. Die Kürze halber wird auch die Gerade p aus π und die angehörige Gerade p_α aus α nicht konsequent unterscheiden. Die zuständigen Zusammenhänge werden aus dem Text sichtbar.

Definition 8. Es seien S ein uneigentlicher Punkt und g, g' eigentliche Geraden mit $S \notin g'$. Die Abbildung $\varphi : g_\alpha \rightarrow g'_\alpha$ mit $\varphi(A) = g' \cap SA$ für alle $A \in g_\alpha$ heißt eine PZ-Projektion, in Zeichen $\varphi(S, g, g')$.

Bemerkung 5. Eine PZ-Projektion $\varphi(S, g, g')$ ist wirklich eine Abbildung von g_α in g'_α : Ist A aus g_α , dann gilt $S \neq \bar{A}$ und es gibt eine Gerade SA . Wegen $S \notin g'$

erhält man $S\bar{A} \parallel \bar{g}'$ und g' , SA schneiden sich in einem eigentlichen Punkt, also $\varphi(A) \in g'$. Ist $S \notin \bar{g}$, dann $\varphi(S, g, g')$ stellt eine bijektive Abbildung von g_α auf g'_α dar. Im Fall $S \in u$ ist $\varphi(S, g, g')$ eine Parallelprojektion.

Satz 3. *Es seien S ein Punkt, g eine Gerade der AK-Ebene α und A, B, C Punkte aus g , von denen mindestens zwei zu S fern sind, wobei S, A bzw. S, B bzw. S, C auf einer Geraden a bzw. b bzw. c liegen. Dann gilt $A \in b \Rightarrow a = b \vee b = c$.*

Beweis. Es sei $A \in b$ und $a \neq b$ angenommen. Dann sind A, S wegen $A, S \in a, b$ benachbart. Unserer Voraussetzung nach folgt daraus $\bar{B}, \bar{C} \neq \bar{S}$ und $\bar{A} \neq \bar{B}$. Mithin ist $g = AB = b$ und folglich $S \in g$ und $S, C \in g, c$. Wegen $\bar{S} \neq \bar{C}$ erhält man $c = SC = g = b$.

Bemerkung 6. Im folgenden setzen wir voraus, daß die AK-Ebene α nach Definition 3 geordnet ist.

Satz 4. *Es seien g, g' zwei Geraden und S ein Punkt von α mit $S \notin \bar{g}'$. Ferner seien $A, B, C \in g$ und $A', B', C' \in g'$ solche Punkte von α , daß mindestens zwei von A, B, C zu S fern sind und S, A, A' bzw. S, B, B' bzw. S, C, C' auf einer Geraden a bzw. b bzw. c liegen.*

1. Aus $\neg(ASA'), \neg(CSC')$ bzw. $(ASA'), (CSC')$ folgt $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.
2. Sind die Punkte A', B', C' voneinander verschieden, dann $(ABC) \wedge (A'B'C') \Rightarrow \neg(ASA'), \neg(CSC') \vee (ASA'), (CSC')$.

Beweis. 1. Es sei (ABC) . Gilt $A \in b$, dann nach Satz 3 erhält man $a = b \vee b = c$. Nehmen wir $a = b$ an, dann wegen $\bar{a} \neq \bar{g}'$ gilt $A' = B'$ und nach [2], (Z5c) ergibt sich hieraus $(A'B'C')$. Ähnlich erhält man $b = c \Rightarrow B' = C' \Rightarrow (A'B'C')$. Werde nun $A, C \notin b$ und $A' \in b$ angenommen. Ist zugleich $A' \neq B'$, dann wegen $A', B' \in g', b$ gilt $\bar{g}' = \bar{b}$, was ein Widerspruch zu $S \notin \bar{g}'$ ist. Somit ist $A' = B'$, was aber $a = SA' = SB' = b$ und $A \in b$, also einen Widerspruch bedeutet. Es gilt daher $A' \notin b$. Analog beweist man, daß auch $C' \notin b$ gilt. Ferner wird $A, C \notin b$ und folglich $A', C' \notin b$ angenommen.

a) Es sei $\neg(ASA')$ und $\neg(CSC')$. Wegen $A \notin b$ gilt nach (H4) $A \in H_b^+ \vee A \in H_b^-$. Es sei z. B. $A \in H_b^+$. Wird $A' \in H_b^-$ angenommen, dann nach (H3) gilt $A \in H_b^+ \wedge A' \in H_b^- \Rightarrow (ASA')$, was aber ein Widerspruch ist. Mithin ist $A' \in H_b^+ \cup b$ und wegen $A' \notin b$ ergibt sich also $A' \in H_b^+$ (Fig. 1). Gemäß (H2) gilt $(ABC) \wedge A \in H_b^+ \wedge A \notin b \Rightarrow C \in H_b^-$ und nach $\neg(CSC')$ erhält man hieraus $C' \in H_b^-$. Aus (H3) folgt dann $A' \in H_b^+ \wedge C' \in H_b^- \Rightarrow (A'B'C')$.

b) Es sei (ASA') und (CSC') . Wird wieder $A \in H_b^+$ angenommen, dann $(ASA') \wedge A \in H_b^+ \wedge A' \notin b \Rightarrow A' \in H_b^-$, $(ABC) \wedge A \in H_b^+ \wedge A \notin b \Rightarrow C \in H_b^-$ und $(CSC') \wedge C \in H_b^- \wedge C' \notin b \Rightarrow C' \in H_b^+$. Somit ist $A' \in H_b^- \wedge C' \in H_b^+ \Rightarrow (A'B'C')$.

2. Es seien A', B', C' voneinander verschieden und es sei dabei $(ABC) \wedge (A'B'C')$. Wegen $S \notin \bar{g}'$ sind auch die Geraden a, b, c voneinander verschieden und folglich

$A', C' \notin b$. Nach Satz 3 ergibt sich $A, C \notin b$. Zunächst nehmen wir $\neg(ASA')$ und (CSC') an. Ist $A \in H_b^+$, dann gilt nach (H2) $(ABC) \wedge A \in H_b^+ \wedge C \notin b \Rightarrow C \in H_b^-$ und $(CSC') \wedge C \in H_b^- \wedge C' \notin b \Rightarrow C' \in H_b^+$. Aus $\neg(ASA')$ und $A \in H_b^+$ folgt $A' \in H_b^+$ und $(A'B'C')$, $A' \in H_b^+$, $C' \notin b$ impliziert $C' \in H_b^-$, was ein Widerspruch

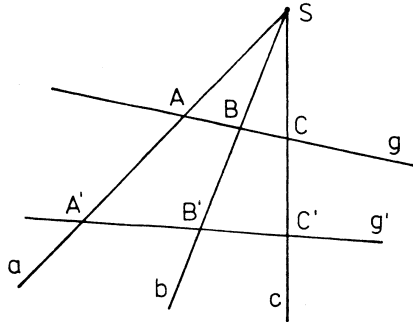


Fig. 1

zu (H5) ist. Analog führen auch die Voraussetzungen (ASA') und $\neg(CSC')$ zum Widerspruch. Mithin gilt $\neg(ASA')$, $\neg(CSC') \vee (ASA')$, (CSC') .

Satz 5. Es seien S, g, g' aus α mit $\bar{S} \notin \bar{g}'$ und die Punkte A, B, C von g mit (ACB) so gegeben, daß mindestens zwei von ihnen zu S fern sind. Ferner seien A', B', C' solche Punkte von g' , daß S, A, A' bzw. S, B, B' bzw. S, C, C' auf einer Geraden a bzw. b bzw. c liegen. Gilt $\neg(ASA') \wedge \neg(BSB')$ bzw. $(ASA') \vee (BSB')$, dann ist $\neg(CSC')$ bzw. (CSC') .

Beweis. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ ist $a = SA', b = SB', c = SC'$ und $a = b \Leftrightarrow A' = B', a = c \Leftrightarrow A' = C', b = c \Leftrightarrow B' = C'$.

I. Wir setzen $\neg(ASA')$ und $\neg(BSB')$ voraus.

1. Es sei $a = b$, also $A' = B' = X$.

a) Es sei $b = c$, also $B' = C' = X$ und $a = b = c = g$. Da $\neg(ASX)$ gilt, erhält man aus [2], (Z2): $(SAX) \vee (SXA)$. Wir setzen zugleich voraus, daß (CSC') , also (CSX) , gilt. Zunächst sei (SAX) . Nach [2], (Z5b) ist $(XAS) \wedge (XSC) \Rightarrow (ASC)$ und nach [2], (Z6) ergibt sich $(ASC) \wedge (ACB) \Rightarrow (ASB)$. Dann gemäß [2], (Z5) gilt $(XAS) \wedge (ASB) \Rightarrow (XSB) \vee A = S$, was wegen $A = S \Rightarrow (ASA')$ ein Widerspruch zu $\neg(ASA')$ und $\neg(BSB')$ ist. Es sei nun (SXA) . Nach [2], (Z5) ist $(CSX) \wedge (SXA) \Rightarrow (CXA) \vee B = S$, d. h. es gilt (CXA) , denn $\neg(BSB')$ impliziert $B \neq S$. Gemäß [2], (Z5b) ist $(AXC) \wedge (ACB) \Rightarrow (XCB)$ und $(XSC) \wedge (XCB) \Rightarrow (XSB)$ führt dann zum Widerspruch. Da unsere Voraussetzung (CSX) in jedem Fall zum Widerspruch führt, gilt $\neg(CSC')$.

b) Es sei $b \neq c$. Aus $A \in c$ folgt nach Satz 3 $a = c \vee b = c$. Gilt $a = c$, dann wegen $a = b$ erhält man $b = c$, also ein Widerspruch. Somit ist $A \notin c$. Analog läßt sich $B \notin c$ zeigen. Wegen $\neg(ASA')$ gilt nach [2], (Z2) $(SAX) \vee (SXA)$. Wir wollen beweisen, daß in beiden Fällen $\neg(ASB)$ erfüllt ist: Werde angenommen, es gelte das Gegenteil, also (ASB) . Zuerst sei (SAX) . Dann nach [2], (Z5) ist $(BSA) \wedge (SAX) \Rightarrow (BAX) \vee S = A$, also (BAX) , denn aus $\neg(ASA')$ folgt $S \neq A$. Nach [2], (Z6) erhält man $(BSA) \wedge (BAX) \Rightarrow (BSX)$, was ein Widerspruch zu $\neg(BSB')$ ist. Aus (SXA) folgt nach [2], (Z5b) $(AXS) \wedge (ASB) \Rightarrow (XSB)$, was wieder einen Widerspruch bedeutet. Damit ist die Gültigkeit von $\neg(ASB)$ bewiesen. Wegen $A \notin c$ ist nach (H4) $A \in H_c^+ \vee A \in H_c^-$. Es sei z. B. $A \in H_c^+$. Aus $B \in H_c^-$ folgt nach (H3) (ASB) , also ein Widerspruch. Mithin ist $B \in H_c^+ \cup c$. Da zugleich $(ACB) \wedge A \in H_c^+ \Rightarrow B \in H_c^- \cup c$ gilt, erhält man wegen $B \notin c$ einen Widerspruch zu (H5). Daraus folgt, daß $a = b$ stets $b = c$ impliziert.

2. Es sei $a \neq b$.

a) Es sei $b = c$, also $B' = C' = X$. Aus $B \in a$ folgt nach Satz 3 $b = a \vee c = a$. Wegen $a \neq b$ ist also $a = c$, aber aus $b = c$ folgt $a = b$, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $B \notin a$. Analog zeigt man $C \notin a$. Dann wegen $C \notin a$ ist $A \neq C$ und aus (ACB) erhält man nach [2], (Z3) $\neg(BAC)$. Wird $B \in H_a^+$ angenommen, dann wegen $\neg(BAC)$, $C \notin a$ ist $C \in H_a^+$ und wegen $\neg(BSX)$, $X \notin a$ ist $X \in H_a^+$. Aus $C, X \in H_a^+$ folgt dann $\neg(CSX)$, also $\neg(CSC')$.

b) Es sei $b \neq c$. Ist $a = c$, dann verfahren wir analog zum Fall a). Ist $a \neq c$, dann $a \neq b \neq c \neq a$ und nach Satz 3 gilt $A, C \notin b$. Wegen $B \neq C$ und (ACB) gilt gemäß [2], (Z3) $\neg(ABC)$. Wird $A \in H_b^+$ angenommen, so $\neg(ABC)$ und $\neg(ASA')$ impliziert $C \in H_b^+$ und $A' \in H_b^+$. Nach Satz 4 gilt $(ACB) \Rightarrow (A'C'B)$, also $\neg(A'B'C')$. Wegen $A' \in H_b^+$ ist dann $C' \in H_b^+$ und infolge $C, C' \in H_b^+$ erhält man $\neg(CSC')$.

II. Wir setzen (ASA') und (BSB') voraus.

1. Es sei $a = b$, also $A' = B' = X$.

a) Es sei $c = b$, also $C' = B' = X$ und $a = b = c = g$. Gilt $A = S$, dann aus [2], (Z5b) folgt $(BSC) \wedge (BSX) \Rightarrow (CSX)$, also (CSC') . Auch $B = S$ hat $(ACS) \wedge (ASX) \Rightarrow (CSX)$ zur Folge, also (CSC') . Ferner sei $A, B \neq S$ vorausgesetzt. Zuerst zeigen wir, daß $\neg(ASB)$ gilt: Es sei (ASB) . Für die Punkte A, B, X erhalten wir nach [2], (Z2) $(ABX) \vee (BAX) \vee (AXB)$. Ist (ABX) , dann gemäß [2], (Z5b) gilt $(ASB) \wedge (ABX) \Rightarrow (SBX)$ und gemäß [2], (Z3) $(SBX) \wedge (BSX) \Rightarrow B = S$, was ein Widerspruch ist. Aus (BAX) folgt nach [2], (Z5b) $(BSA) \wedge (BAX) \Rightarrow (SAX)$, was wegen (ASX) und $A \neq S$ ein Widerspruch ist. Gilt (AXB) , so ist nach [2], (Z5b) $(ASX) \wedge (AXB) \Rightarrow (SXB)$, also wieder ein Widerspruch zu (BSX) . Somit ergibt sich $\neg(ASB)$ und nach [2], (Z2) ist also $(SAB) \vee (SBA)$ erfüllt. Aus (SAB) folgt nach [2], (Z5b) $(BCA) \wedge (BAS) \Rightarrow (CAS)$ und nach [2], (Z5) $(CAS) \wedge (ASX) \Rightarrow (CSX) \vee A = S$, also (CSC') . Ist (SBA) , dann gilt $(ACB) \wedge (ABS) \Rightarrow (CBS)$ und $(CBS) \wedge (BSX) \Rightarrow (CSX) \vee B = S$, also (CSC') .

b) Es sei $b \neq c$. Analog wie unter I, 1, läßt sich $A, B, X \notin c$ zeigen. Ist $A \in H_c^+$, so gilt $(ASX) \wedge A \in H_c^+ \wedge X \notin c \Rightarrow X \in H_c^-$ und $(BSX) \wedge X \in H_c^- \wedge B \notin c \Rightarrow B \in H_c^+$. Dann aus $A, B \in H_c^+$ folgt $\neg(ACB)$, was ein Widerspruch zu (ACB) ist. Die Voraussetzung $b \neq c$ ist also falsch und $a = b$ impliziert stets $b = c$.

2. Es sei $a \neq b$.

a) Es sei $b = c$, also $B' = C' = X$. Nach Satz 3 gilt $B, C \notin a$ und wegen $a \neq b$ ist $X \notin a$. Nehmen wir $B \in H_a^+$ an, dann (BSX) und $X \notin a$ implizieren $X \in H_a^-$. Aus $C \notin a$ folgt $A \neq C$ und deshalb (ACB) hat $\neg(BAC)$ zur Folge. Unter Anwendung von (H2) erhält man daraus $C \in H_a^+$ und $C \in H_a^+ \wedge X \in H_a^- \Rightarrow (CSX)$.

b) Es sei $b \neq c$. Im Fall $a = c$ verfahren wir entsprechend zu a). Es sei also $a \neq c$. Gilt $A \in H_b^+$, dann $(ASA)'$ impliziert $A' \in H_b^-$. Aus (ACB) folgt $\neg(ABC)$, woraus sich $C \in H_b^+$ ergibt. Nach Satz 4 gilt $(ACB) \Rightarrow (A'C'B')$, also $\neg(A'B'C')$. Mithin ist $C' \in H_b^-$ und $C \in H_b^+ \wedge C' \in H_b^- \Rightarrow (CSC')$.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß in α die nachstehende Aussage erfüllt ist:

(A1) Haben zwei verschiedene Geraden g, h einen uneigentlichen Punkt gemeinsam, so liegt h in einer durch g bestimmten Halbebene.

Bemerkung 7. Es seien Geraden g, h aus α mit $\bar{g} \neq \bar{h}$ so gegeben, daß \bar{g}, \bar{h} keinen eigentlichen Punkt gemeinsam haben. Nach Definition 6 haben g, h einen Punkt in π gemeinsam, der muß also uneigentlich sein. Nach (A1) liegt dann h in einer durch g bestimmten Halbebene und α ist nach [4], Satz 6 konvex geordnet ([4], Def. 8). Ist also die Forderung (A1) in α erfüllt, dann ist α konvex geordnet.

Satz 6. Jede PZ-Projektion reproduziert die Zwischenrelationen auf den Geraden von α .

Beweis. Es sei $\varphi(S, g, g')$ eine PZ-Projektion, d. h. S ist uneigentlich und g, g' sind eigentlich mit $\bar{S} \notin g'$. Es seien $A, B, C \in g$ mit (ABC) gegeben und sei $a = SA, b = SB, c = SC, A' = \varphi(A), B' = \varphi(B), C' = \varphi(C)$ gesetzt. (Fig. 2). Aus $a = b$ folgt $A' = B'$ und $(A'B'C')$. Ähnlich erhalten wir $(A'B'C')$ auch in den Fällen $b = c$ und $a = c$. Ferner setzen wir voraus, daß a, b, c voneinander verschieden sind. Es sei z. B. $A \in H_b^+$. Wegen $C \notin b$ gilt nach (H2) $(ABC) \wedge A \in H_b^+ \Rightarrow C \in H_b^-$, aus (A1) folgt dann $a \subset H_b^+$ und $c \subset H_b^-$, also $A' \in H_b^+$ und $C' \in H_b^-$. Nach (H3) erhält man dann $(A'B'C')$.

Definition 9. Mit $\Pi(S)$ bezeichnen wir die Menge der Geraden von α , die durch den gegebenen uneigentlichen Punkt S gehen. Ist m eine Gerade m mit $\bar{S} \notin \bar{m}$, so setzen wir $(abc) \Leftrightarrow (ABC)$ für $a, b, c \in \Pi(S)$ und $A = a \sqcap m, B = b \sqcap m, C = c \sqcap m$.

Bemerkung 8. Nach Satz 6 ist die vorangehende Definition der Zwischenrelation auf $\Pi(S)$ von der Wahl der Geraden m unabhängig. Durch diese Zwischenrelation lassen sich zwei inverse Anordnungen von $\Pi(S)$ erklären (Bemerkung 2).

Satz 7. Es sei $\varphi(S, g, g')$ eine PZ-Projektion. Sind auf den Geraden g, g' von a die Anordnungen \leq und \leq' nach Bemerkung 2 eingeführt, dann ist φ eine monotone Abbildung von g auf g' ([3], Bem. 1).

Da φ die Zwischenrelationen auf der Geraden g, g' reproduziert, läßt sich der Beweis von Satz 7 analog zu [3], Beweis des Satzes 4, durchführen.

Satz 8. Sind g, g' zwei Geraden, die einen uneigentlichen Punkt R gemeinsam haben, dann ist das Produkt der PZ-Projektionen $\varphi_1(S, g, g')$ und $\varphi_2(S', g', g)$ eine monoton wachsende Abbildung der geordneten Menge (g, \leq) .

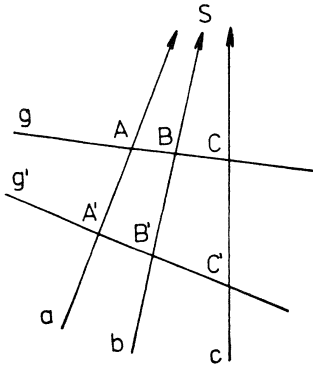


Fig. 2

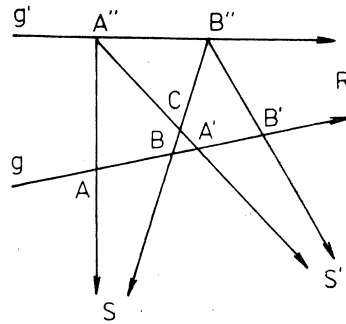


Fig. 3

Beweis. Da φ_1, φ_2 monoton sind, ist das Produkt $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ auch monoton. Nach [2], (2.3) genügt es nur zu zeigen, daß für ein Paar verschiedener Punkte A, B aus $A < B$ die Ungleichheit $\varphi(A) < \varphi(B)$ folgt.

1. Es sei $\bar{S} \neq \bar{S}'$. Wegen $\bar{S} \notin \bar{g}'$ und $\bar{S}' \notin \bar{g}$ ist $\bar{R} \neq \bar{S}, \bar{S}'$. Wir wählen einen Punkt $A \in g$ und setzen $A'' = \varphi_1(A), A' = \varphi(A)$ (Fig. 3). Da $\bar{S}, \bar{S}' \neq \bar{R}$ ist, gilt $\overline{SA} \parallel \bar{g}'$, $\overline{S'A''} \parallel \bar{g}$ und A', A'' sind eigentlich mit $\bar{A} \neq \bar{A}'$. Nach [4], Satz 9 gibt es einen Punkt $B \in g$ mit $B \neq A, A'$ und (ABA') . Erklären wir die Punkte $B'' = \varphi_1(B), B' = \varphi(B)$, so wegen $\bar{S} \neq \bar{S}'$ gilt $\overline{SB''} \parallel \overline{S'A'}$ und es gibt einen Punkt $C = \overline{S'A''} \cap \overline{SB''}$. Da $\bar{S} \neq \bar{S}'$ und $\bar{R} \neq \bar{S}, \bar{S}'$ gilt, sind $\psi_1(S, g, S'A''), \psi_2(R, S'A'', SB''), \psi_3(S', SB'', g)$ PZ-Projektionen und unter Anwendung von ψ_1, ψ_2, ψ_3 erhält man $(ABA') \Rightarrow (A''CA'') \Rightarrow (B''CB) \Rightarrow (B'A'B)$. Aus $A < B$ folgt hieraus $A < B \leq A'$ und $B \leq A' \leq B'$, also $A' \leq B'$. Gilt $A' = B'$, so $A'' = B''$ und $A = B$, was ein Widerspruch ist. Mithin $A' \neq B'$ und folglich $A' < B'$.

2. Es sei $\bar{S} = \bar{S}'$. In diesem Fall wählen wir einen uneigentlichen Punkt S'' mit $\bar{S}'' \neq \bar{R}$ und $\bar{S}'' \neq \bar{S}$. Betrachten wir die PZ-Projektion $\psi(S'', g', g)$, dann wegen $\bar{S}'' \notin \bar{g}'$ gibt es eine inverse PZ-Projektion $\psi^{-1}(S'', g, g')$ und nach a) ergibt

sich $A < B \Rightarrow \psi\varphi_1(A) < \psi\varphi_1(B) \Rightarrow \varphi_2\psi^{-1}[\psi\varphi_1(A)] < \varphi_2\psi^{-1}[\psi\varphi_1(B)] \Rightarrow \varphi_2\varphi_1(A) < \varphi_2\varphi_1(B) \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$.

Satz 9. Es seien a, b, c solche Geraden mit $\bar{a} \parallel \bar{b}$, daß b, c einen uneigentlichen Punkt gemeinsam haben. Das Produkt der PZ-Projektionen $\varphi_1(S, a, b)$, $\varphi_2(S', b, c)$ und $\varphi(S, c, a)$ ist eine monoton wachsende Abbildung der geordneten Menge (a, \leq) .

Beweis. Das Produkt $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ ist eine monotone Abbildung. Gilt $A < B \Rightarrow \varphi(A) < \varphi(B)$ für $A, B \in a$, so ist φ sogar monoton wachsend. Im Fall $S = S'$ ist φ die identische Abbildung von a , die monoton wachsend ist. Ferner nehmen wir $S \neq S'$ an. Da $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ PZ-Projektionen sind, gilt $\bar{S} \notin \bar{a}, \bar{b}$, $\bar{S}' \notin \bar{c}$ und wegen $\bar{b} \parallel \bar{c}$ auch $\bar{S}' \notin \bar{b}$ und $\bar{S} \notin \bar{c}$. Mithin sind φ_1, φ_2 und φ_3 bijektive Abbildungen und auch φ ist bijektiv. Wegen $\bar{a} \parallel \bar{b}$ gibt es einen eigentlichen Punkt $O = a \cap b$. Setzen wir $\varphi_1(O) = O$, $\varphi_2(O) = S' \cap O \cap c = O''$, $\varphi_3(O'') = SO'' \cap a = \varphi(O)$ und $A'' = SO \cap c$, $A' = S'A'' \cap b$, $A = SA' \cap a$, $B = SA \cap c$, dann ist $\varphi(A) = O$ (Fig. 4). Wegen $\bar{S} \notin \bar{b}$ und $\bar{S}' \notin \bar{c}$ sind auch $\psi_1(S, c, b)$ und $\psi_2(S', b, c)$ PZ-Projektionen. Setzen wir $\psi = \psi_2\psi_1$, so ist $\psi(B) = A''$ und $\psi(A'') = O''$, wobei $B \neq A''$ und $A'' \neq O''$ erfüllt ist. Wählt man auf c eine Anordnung \leq' mit $B \leq' A''$, so gilt nach Satz 8 $\psi(B) \leq' \psi(A'')$, also $A'' \leq' O''$ und $B \leq' A'' \leq' O''$, d. h. $(BA''O'')$. Wegen $B \neq A''$ und $\bar{S} \notin \bar{c}$ ist $B \notin g$ und deshalb $B \in H_g^+ \vee B \in H_g^-$, wo man $g = OS$

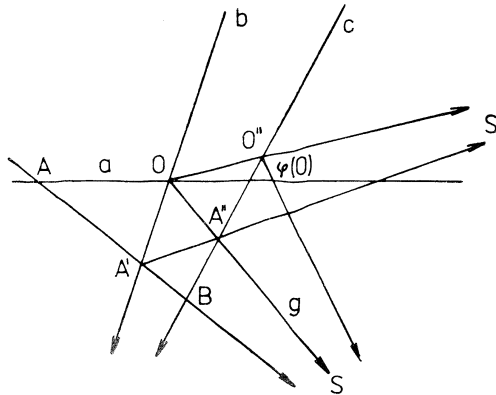


Fig. 4

setzt. Ist $B \in H_g^+$, dann wegen $O'' \notin g$ und $(BA''O'')$ erhält man nach (H2) $O'' \in H_g^-$. Gemäß (A1) gilt $SB \subset H_g^+$ und $SO'' \subset H_g^-$, also $A \in H_g^+$ und $\varphi(O) \in H_g^-$. Aus (H3) folgt dann $(AO\varphi(O))$ mit $A \neq O$. Nehmen wir $A \leq O$ in der Anordnung von a an, dann ist $O \leq \varphi(O)$ und folglich $\varphi(A) \leq \varphi(O)$. Da φ bijektiv ist, gilt $\varphi(A) \neq \varphi(O)$ und $\varphi(A) < \varphi(O)$.

Satz 10. Es seien g, g' zwei Geraden, die einen uneigentlichen Punkt R gemeinsam haben. Weiter seien zwei ungeeignete Punkte S, S' und Punkte $A, A', B, B' \in g, A'', B'' \in g'$ so gegeben, daß $\bar{R} \neq \bar{S} \neq \bar{S}' \neq \bar{R}$ und S, A, A'' bzw. S, B, B'' bzw. S', A', A'' bzw. S', B', B'' auf einer Geraden liegen. Ist \leq eine Anordnung von g mit $A \leq A'$, dann $B \leq B'$.

Beweis. Wegen $\bar{R} \neq \bar{S} \neq \bar{S}' \neq \bar{R}$ sind $\varphi_1(S', g, SA), \varphi_2(R, SA, SB)$ und $\varphi_3(S', SB, g)$ PZ-Projektionen (Fig. 5). SA, SB haben einen uneigentlichen Punkt S gemeinsam und wegen $\bar{S} \neq \bar{R}$ ist $\bar{g} \parallel \bar{SA}$. Also die Geraden g, SA, SB genügen

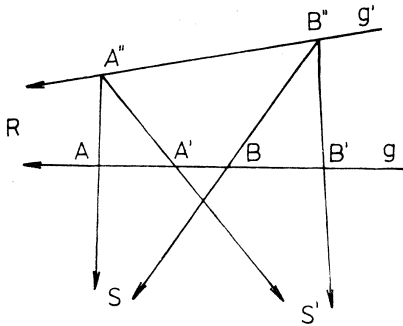


Fig. 5

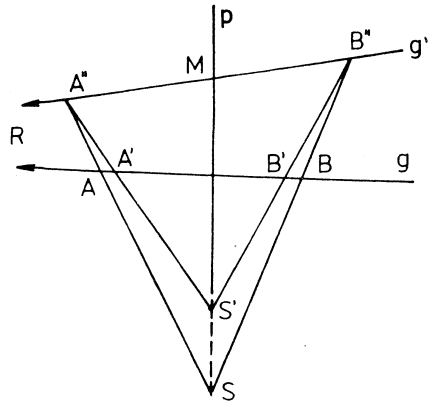


Fig. 6

den Forderungen des Satzes 9 und diesem Satz nach ist $\varphi = \varphi_3\varphi_2\varphi_1$ monoton wachsend. Aus $A \leq A'$ folgt daher $\varphi(A) \leq \varphi(A')$ und folglich $B \leq B'$.

Ferner wird vorausgesetzt, daß die folgende Forderung (A2) in α erfüllt ist:

(A2) Es seien g, g' zwei Geraden mit $\bar{g} \neq \bar{g}'$, welche einen uneigentlichen Punkt R gemeinsam haben und seien S, S' zwei benachbarte ungeeignete Punkte mit $\bar{S} \neq \bar{R}$, die auf einer Geraden p von π liegen. Ferner seien $A, A', B, B' \in g; A'', B'' \in g'$, wobei S, A, A'' bzw. S, B, B'' bzw. S', A', A'' bzw. S', B', B'' auf einer Geraden liegen. Ist $M = g' \cap p$ ein uneigentliches Punkt bzw. ist M eigentlich mit $\neg(A''MB'')$ und $\bar{M} \neq \bar{A}'', \bar{B}''$, dann gilt $A \leq A' \Leftrightarrow B \leq B'$ in der Anordnung von g . Ist M eigentlich mit $(A''MB'')$ und $\bar{M} \neq \bar{A}'', \bar{B}''$, dann $A \leq A' \Leftrightarrow \bar{B}' \leq \bar{B}$. (Fig. 6, wo M ein eigentlicher Punkt mit $(A''MB'')$ ist und Fig. 7, wo M uneigentlich ist).

Satz 11. Es seien s, s', a drei Geraden mit $\bar{a} \neq \bar{s}, \bar{s}'$, die einen uneigentlichen Punkt R gemeinsam haben und seien M, N ungeeignete Punkte mit $\bar{R} \neq \bar{M}, \bar{N}$,

die auf einer Geraden p von π liegen. Ferner seien $S \in s, S' \in s'$ Punkte mit $\bar{S}, \bar{S}' \notin \bar{p}$. Nach Definition 9 führen wir eine Zwischenrelation auf $\Pi(R)$ ein und betrachten folgende Möglichkeiten;

- (1) $\neg(sas')$,
- (2) (sas) ,
- (3) S, S' liegen in einer durch p bestimmten Halbebene,
- (4) S, S' liegen in verschiedenen durch p bestimmten Halbebenen.

(Ist p uneigentlich, dann nehmen wir an, daß (3) gilt). Es seien schließlich $A, B, A', B' \in a$ derartige Punkte, wo S, A, M bzw. S, B, N bzw. S', A', M bzw. S', B', N

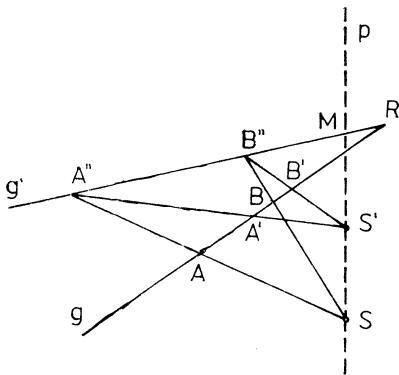


Fig. 7

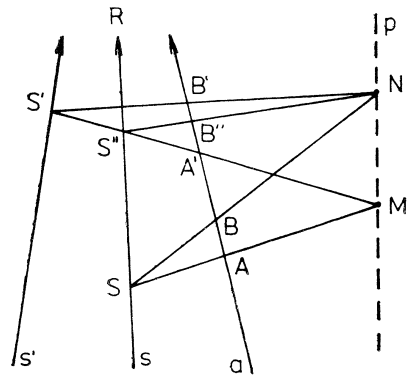


Fig. 8

auf einer Geraden liegen. Gilt (1), (3) bzw. (2), (4), dann ist $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B'$ in der Anordnung von a . Gilt (1), (4) bzw. (2), (3), dann $A \leq B \Leftrightarrow B' \leq A'$.

Beweis. Im Fall $M = N$ ist $SM = SN, S'M = S'N$ und folglich $A = B, A' = B'$. Sei also $M \neq N$. Wegen $\bar{S}, \bar{S}' \notin \bar{a}$ ist dann $A \neq B, A' \neq B'$, wegen $\bar{R} \neq \bar{M}, \bar{N}$ gilt $\overline{S'M} \parallel \bar{s}, \overline{S''N} \parallel \bar{a}$ und deshalb gibt es Punkte $S'' = S'M \cap s, B'' = S''N \cap a$, wobei $A' \neq B''$ ist.

1. Es sei p uneigentlich (Fig. 8). Aus $\bar{M} \neq \bar{N}$ folgt $\bar{R} \neq \bar{M} \neq \bar{N} \neq \bar{R}$ und nach Satz 10 erhält man $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B''$. Ist $\bar{M} = \bar{N}$, dann wegen $\bar{s} \neq \bar{a}$ und $\bar{R} \neq \bar{M}$ gilt nach (A2) $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B''$.

2. Es sei p eigentlich (Fig. 9). Da $\bar{M} \neq \bar{R}$ und folglich $\bar{s} \parallel \bar{p}$ ist, gibt es einen Punkt $Q = p \cap s$. Gilt $S, S' \in H_p^+$ bzw. $S, S' \in H_p^-$, so ist $\neg(S'QS'')$. Wegen $\bar{S}, \bar{S}' \notin \bar{p}$ ergibt sich $\bar{S}, \bar{S}' \neq \bar{Q}$ und nach (A2) gilt dann $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B''$. Aus $S \in H_p^+, S' \in H_p^-$ folgt (SQS'') und nach (A2) ist $A \leq B \Leftrightarrow B'' \leq A'$.

Wir betrachten die PZ-Projektion $\varphi(N, S'M, a)$ in der $B' = \varphi(S'), B'' = \varphi(S'')$

und $A' = \varphi(A')$ ist. Gilt (sas') , dann wegen $\bar{M} \neq \bar{R}$ und nach Definition 9 erhält man $(S''A'S')$. Nach Satz 6 folgt daraus $(B''A'B')$. Entsprechend $\neg(sas')$ impliziert $\neg(S''A'S')$ und $\neg(B''A'B')$.

a) Wir nehmen an, daß die Bedingungen (1) und (3) erfüllt sind. Gemäß (3) ist $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B''$ und (1) hat zur Folge $\neg(B''A'B')$. Ist $B' < A'$, so wegen $A' \leq B''$ gilt $B' < A' \leq B''$, also $(B'A'B'')$, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $A' \leq B'$. Setzen wir umgekehrt $A' \leq B'$ voraus, dann aus $B'' < A'$ folgt $B'' < A' \leq B'$, also wieder ein Widerspruch. Mithin gilt $A' \leq B''$ und folglich $A \leq B$. Damit ist $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B''$ bewiesen.

b) Es sei (2) und (4) erfüllt. Dann gilt $A \leq B \Leftrightarrow B'' \leq A'$ und $(B''A'B')$. Hieraus folgt $B'' \leq A' \Leftrightarrow A' \leq B'$, also $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B'$.

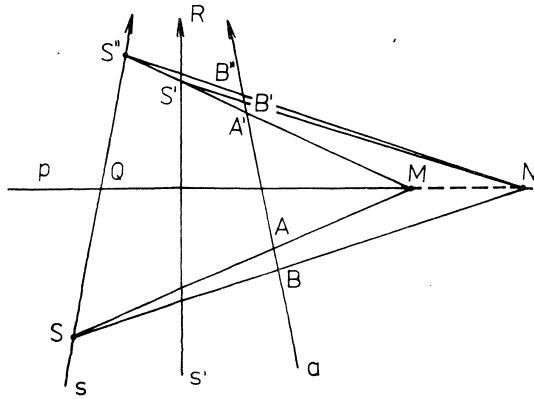


Fig. 9

c) Es seien (1) und (4), also $A \leq B \Leftrightarrow B'' \leq A'$ und $\neg(B''A'B')$ erfüllt. Aus $A' < B'$ erhält man $B'' \leq A' < B'$, was ein Widerspruch zu $\neg(B''A'B')$ ist. Somit ist $B' \leq A'$. Gilt $B' \leq A'$ und zugleich $A' < B''$, so ist $B' \leq A' < B''$, was wieder zum Widerspruch führt. Daraus erhält man $A \leq B \Leftrightarrow B' \leq A'$.

d) Es seien (2) und (3), also $A \leq B \Leftrightarrow A' \leq B''$ und $(B''A'B')$ erfüllt. Dann gilt $A' \leq B'' \Leftrightarrow B' \leq A'$, also $A \leq B \Leftrightarrow B' \leq A'$.

Satz 12. Es seien $a, b, c \in N(S, p)$ (Bemerkung 3) und m, m' zwei Geraden mit $S \notin \bar{m}, \bar{m}'$ und $\bar{m} \not\parallel \bar{p}, \bar{m}' \not\parallel \bar{p}$. Setzt man $A = m \cap a, B = m \cap b, C = m \cap c, A' = m' \cap a, B' = m' \cap b, C' = m' \cap c$, dann $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.

Beweis. 1. Zuerst nehmen wir $\neg(ASA')$ und (CSC') an. Setzen wir $g = L(S, m)$, dann ist m in einer durch g bestimmten Halbebene enthalten. Es sei z. B. $m \subset H_g^+$ und folglich $A, C \in H_g^+$. Wegen $\neg(ASA')$ ergibt sich dann $A' \in H_g^+$ (Fig. 10).

Gilt $C' \in g$, so nach $\bar{C}' \neq \bar{S}$ ist $g = C'S = c$, also $c \parallel m$. Dann aus $\bar{p} = \bar{c}$ folgt $\bar{p} \parallel \bar{m}$, was ein Widerspruch ist. Es gilt daher $C' \notin g$ und (CSC') , $C \in H_g^+$ impliziert $C' \in H_g^-$.

a) Es sei $\bar{m} \parallel \bar{m}'$. Aus $\bar{m}' \parallel \bar{g}$ und $S \in \bar{m}'$, $S \in g$ folgt $\bar{m}' \neq \bar{g}$. Die Geraden m' , g haben dann einen uneigentlichen Punkt gemeinsam und nach (A1) liegt m' in einer durch g bestimmten Halbebene. Dies ist aber im Widerspruch zu $A' \in H_g^+$ und $C' \in H_g^-$.

b) Es sei $\bar{m}' \not\parallel \bar{m}$. Dann ist auch $\bar{m}' \not\parallel \bar{g}$ und m' , g haben einen Punkt R gemeinsam. Wegen $A' \in a$, $C' \in c$ und $\bar{a} = \bar{c}$ ist \bar{A}' , $\bar{C}' \in \bar{a}$. Aus $\bar{A}' \neq \bar{C}'$ folgt $\bar{m}' = \overline{A'C'} = \bar{a}$ im Widerspruch zu $\bar{m}' \not\parallel \bar{a}$. Es sei also $\bar{A}' = \bar{C}'$. Nach $A' \in H_g^+$ und $C' \in H_g^-$ ergibt sich aus (H3) $(A'RC')$. Da α konvex ist (Bemerkung 7), so folgt aus $\bar{A}' = \bar{C}'$

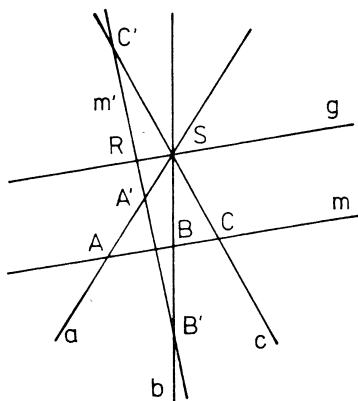


Fig. 10

die Gleichheit $\bar{A}' = \bar{R}$, also $\bar{A}' \in \bar{g}$. Wird dabei $\bar{A}' \neq \bar{S}$ angenommen, dann gilt $\bar{a} = \overline{A'S} = \bar{g}$, was wegen $m \parallel g$ ein Widerspruch zu $\bar{m} \parallel \bar{g}$ ist. Aus $\bar{A}' = \bar{S}$ folgt $S \in \bar{m}'$, also wieder ein Widerspruch.

Nach a) und b) führt unsere Voraussetzung $\neg(ASA') \wedge (CSC')$ stets zum Widerspruch.

2. Entsprechend zum Teil 1 läßt sich beweisen, daß auch (ASA') und $\neg(CSC')$ nicht zugleich gelten können.

Nach 1 und 2 gilt $(ASA') \wedge (CSC')$ oder $\neg(ASA') \wedge \neg(CSC')$ und nach Satz 4 ergibt sich daraus $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.

Definition 10. Es seien $a, b, c \in N(S, p)$. Ist m eine Gerade mit $\bar{m} \parallel \bar{p}$, $S \notin \bar{m}$ und sind A, B, C die Schnittpunkte von m mit a, b, c , dann setzen wir $(abc): \Leftrightarrow (ABC)$.

Bemerkung 9. Durch Definition 10 wird auf der Menge $N(S, p)$ eine von der Wahl der Geraden m unabhängige Zwischenrelation eingeführt. Mit dieser Zwischenrelation lassen sich zwei inverse Anordnungen auf $N(S, p)$ erklären (Bemerkung 2).

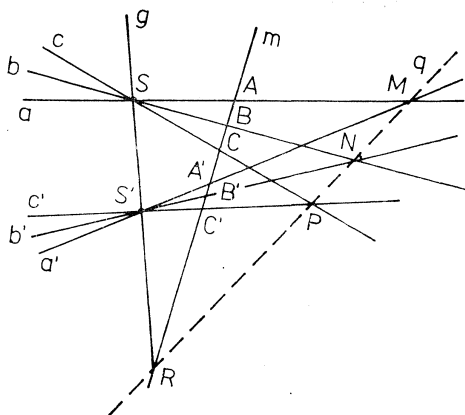


Fig. 11

Satz 13. Es sein $a, b, c \in N(S, p)$ und $a', b', c' \in N(S', p')$ derartige Geraden, daß a, a' bzw. b, b' bzw. c, c' einen uneigentlichen Punkt M bzw. N bzw. P gemeinsam haben, wobei M, N, P auf einer Geraden q aus π mit $\bar{q} \neq \bar{p}, \bar{p}'$ liegen. Dann gilt $(abc) \Rightarrow (a'b'c')$.

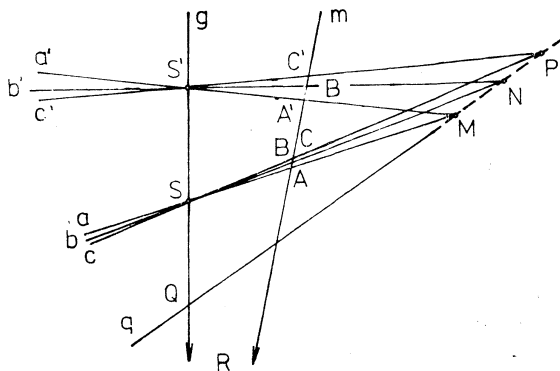


Fig. 12

Beweis. Wegen $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c}$ und $\bar{q} \neq \bar{p}$ sind M, N, P benachbart und es gilt zugleich $\bar{p} \parallel \bar{p}'$.

1. Wir setzen voraus, daß S, S' auf einer zu p fernen Geraden g liegen. Dann ist $\bar{g} \neq \bar{p}$ und wegen $\bar{p} \parallel \bar{p}'$ folgt hieraus $\bar{g} \neq \bar{p}'$.

a) Es sei q uneigentlich und sei $R = q \cap g$ gesetzt. Dann wegen $\bar{g} \neq \bar{p}$ ist $\bar{R} \neq \bar{M}$. Durch R führen wir eine Gerade m mit $\bar{m} \neq \bar{g}$ (Fig. 11). Da $\bar{M} \neq \bar{R}$ ist, gilt $\bar{m} \parallel \bar{p}$, $\bar{m} \parallel \bar{p}'$ und m schneidet a, b, c, a', b', c' schrittweise in den Punkten A, B, C, A', B', C' . Nach Definition 10 erhält man dann $(abc) \Rightarrow (ABC)$ und in der Anordnung von m folgt daraus $A \leq B \leq C$ oder $C \leq B \leq A$. Gilt $A \leq B \leq C$, so gemäß (A2) ist $A \leq B \Rightarrow A' \leq B'$ und $B \leq C \Rightarrow B' \leq C'$, also $A' \leq B' \leq C'$ und $(A'B'C')$. Nach Definition 10 ergibt sich dann $(a'b'c')$. Aus $C \leq B \leq A$ folgt nach (A2) $C' \leq B' \leq A'$, also $(A'B'C')$ and $(a'b'c')$.

b) Es sei q eigentlich. Wegen $M \in a, q$ ist $\bar{a} \parallel \bar{q}$, $\bar{q} \parallel \bar{p}$ und folglich $\bar{q} \parallel \bar{g}$. Mithin gibt es einen Schnittpunkt $Q = q \cap g$ (Fig. 12). Führen wir eine Gerade m mit

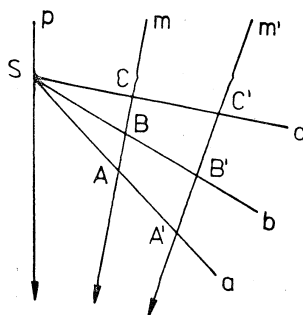


Fig. 13

$\bar{m} \parallel \bar{g}$, $\bar{m} \neq \bar{g}$, dann haben m, g einen uneigentlichen Punkt R mit $\bar{R} \neq \bar{M}$ gemeinsam. Also es existieren die Schnittpunkte A, B, C, A', B', C' von m mit a, b, c, a', b', c' . Zuerst sei $\neg(SQS')$. Da die Forderungen von (A2) erfüllt sind, ergibt sich nach (A2) und nach Definition 10 $(abc) \Rightarrow (ABC) \Rightarrow A \leq B \leq C \vee C \leq B \leq A \Rightarrow A' \leq B' \leq C' \vee C' \leq B' \leq A' \Rightarrow (A'B'C') \Rightarrow (a'b'c')$. Aus (SQS') folgt dann $(abc) \Rightarrow (ABC) \Rightarrow A \leq B \leq C \vee C \leq B \leq A \Rightarrow C' \leq B' \leq A' \vee A' \leq B' \leq C' \Rightarrow (A'B'C') \Rightarrow (a'b'c')$.

2. Es gibt keine zu p ferne Gerade, die durch S, S' geht. In diesem Fall wählen wir einen Punkt S'' , so daß S, S' bzw. S', S'' auf einer zu p fernen Geraden g' bzw. g'' liegen. Durch S'' führen wir die Geraden a'', b'', c'' , die schrittweise durch M, N, P gehen. Nach Teil 1 erhält man dann $(abc) \Rightarrow (a''b''c'')$, $(a''b''c'') \Rightarrow (a'b'c')$ und folglich $(abc) \Rightarrow (a'b'c')$.

Satz 14. Es seien $a, b, c \in F(S, p)$ gegeben (Bemerkung 3). Sind m, m' zwei Geraden mit $\bar{m} \parallel \bar{m}' \parallel \bar{p}$ und $S \notin \bar{m}, \bar{m}'$ und wird $A = a \cap m, B = b \cap m, C = c \cap m, A' = a' \cap m, B' = b' \cap m, C' = c' \cap m$ gesetzt, so $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.

Beweis. Wegen $S \notin \bar{m}, \bar{m}'$ gilt $\bar{p} \neq \bar{m}, \bar{m}'$ und nach (A1) ist m bzw. m' in einer durch p bestimmten Halbene enthalten (Fig. 13). Gilt $m, m' \subset H_p^+$, so ist $A, C, A', C' \in H_p^+$, folglich $\neg(ASA'), \neg(CSC')$ und nach Satz 4 gilt $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$. Aus $m \in H_p^+$ und $m' \in H_p^-$ folgt $(ASA'), (CSC')$ und $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$.

Definition 11. Es seien $a, b, c \in F(S, p)$. Ist m eine Gerade mit $\bar{m} \parallel \bar{p}, S \notin \bar{m}$ und sind A, B, C die Schnittpunkte von m mit a, b, c , dann wird $(abc) \Leftrightarrow (ABC)$ gesetzt.

Bemerkung 10. Laut Definition 11 wird auf $F(S, p)$ eine nach Satz 14 von der Wahl der Geraden m unabhängige Zwischenrelation eingeführt. Mit dieser Zwischenrelation lassen sich zwei inverse Anordnungen auf $F(S, p)$ erklären.

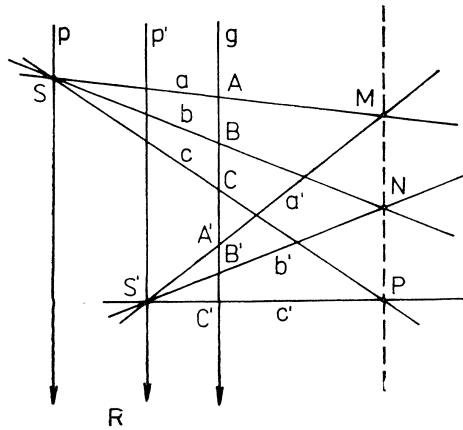


Fig. 14

Satz 15. Es seien $a, b, c \in F(S, p)$ und $a', b', c' \in F(S', p')$ mit $\bar{p} \parallel \bar{p}'$. Haben a, a' bzw. b, b' bzw. c, c' einen uneigentlichen Punkt M bzw. N bzw. P gemeinsam und sind M, N, P in einer uneigentlichen Geraden enthalten, so gilt $(abc) \Rightarrow (a'b'c')$.

Beweis. Der gemeinsame uneigentliche Punkt von p, p' bezeichnen wir mit R und durch R führen wir eine Gerade g mit $\bar{g} \neq \bar{p}, \bar{g} \neq \bar{p}'$, so daß $\neg(pgp')$ in der Zwischenrelation von $\Pi(R)$ ist. Setzen wir $A = a \square g, B = b \square g, C = c \square g, A' = a' \square g, B' = b' \square g, C' = c' \square g$, dann nach Definition 11 ist $(abc) \Rightarrow (ABC)$ (Fig. 14). Wegen $a, b, c \in F(S, p)$ gilt $R \neq \bar{M}, \bar{N}, \bar{P}$ und nach (1), (3) aus Satz 11 erhält man $(ABC) \Rightarrow A \leq B \leq C \vee C \leq B \leq A \Rightarrow A' \leq B' \leq C' \vee C' \leq B' \leq A' \Rightarrow (A'B'C') \Rightarrow (a'b'c')$.

Satz 16. Es seien m, n zwei Geraden, R ein uneigentlicher Punkt und S ein Punkt mit $R \notin \bar{m}, \bar{n}, S \notin \bar{n}$. Ferner seien $A, B, C \in m$ und $A', A'', B', B'', C' \in n$ Punkte mit

$\bar{S} \neq \bar{A}, \bar{B}$ so gegeben, daß S, A, A'' bzw. S, B, B'' bzw. R, A, A' bzw. R, B, B' bzw. R, S, C, C' auf einer Geraden liegen. Gilt $\neg(ASA'')$, $\neg(BSB'')$, $\neg(CSC')$, dann ist

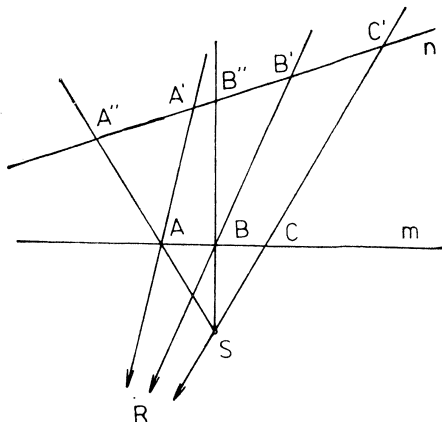


Fig. 15

$A' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B''$ in Anordnung von m . Aus (ASA'') , (BSB'') und (CSC') folgt $A' \leq B' \Leftrightarrow B'' \leq A''$.

Beweis. I. Es sei $\neg(ASA'')$, $\neg(BSB'')$, $\neg(CSC')$.

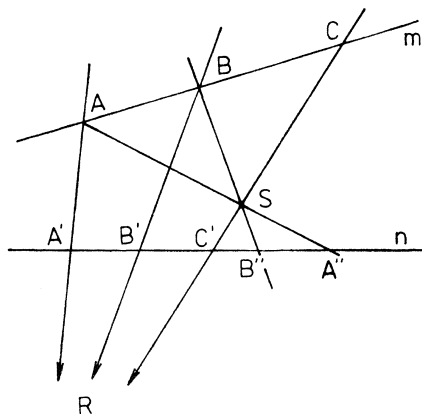


Fig. 16

1. Es sei (SBB'') (Fig. 15). Wegen $\bar{S} \notin \bar{n}$ ist $\varphi(R, SB'', n)$ eine PZ-Projektion und unter Anwendung von φ erhalten wir $(SBS'') \Rightarrow (C'B'B'')$.

a) Es sei (ABC) . Wegen $\bar{S} \neq \bar{A}, \bar{B}$ und $\neg(ASA'')$, $\neg(CSC')$ gilt nach Satz 4

$(ABC) \Rightarrow (A''B''C')$ und nach Satz 6 ergibt sich zugleich $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$. Aus $(A'B'C')$, $(B''B'C')$ und $(A''B''C')$ folgt dann schrittweise $A' \leq B' \Leftrightarrow A' \leq B' \leq C' \Leftrightarrow B'' \leq B' \leq C' \Leftrightarrow A'' \leq B'' \leq C' \Leftrightarrow A'' \leq B''$.

b) Es sei (BAC) . Wegen $\bar{S} \neq \bar{A}, \bar{B}$ und $\neg(BSB'')$, $\neg(CSC')$ gilt nach Satz 4 erneut $(B''A''C')$ und nach Satz 6 ist $(B'A'C')$. Hieraus ergibt sich $A' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq A' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq B' \leq B'' \Leftrightarrow C' \leq A'' \leq B'' \Leftrightarrow A'' \leq B''$.

c) Es sei (ACB) . Dann gilt $(A''C'B'')$ und $(A'C'B')$ und folglich $A' \leq B' \Leftrightarrow A' \leq C' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq B' \leq B'' \Leftrightarrow A'' \leq C' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B''$.

2. Es sei $(SB''B)$. Da $\varphi(R, SB'', n)$ eine PZ-Projektion ist, gilt $\varphi(S) = C'$, $\varphi(B'') = B''$, $\varphi(B) = B'$ und $(SB''B) \Rightarrow (C'B''B')$.

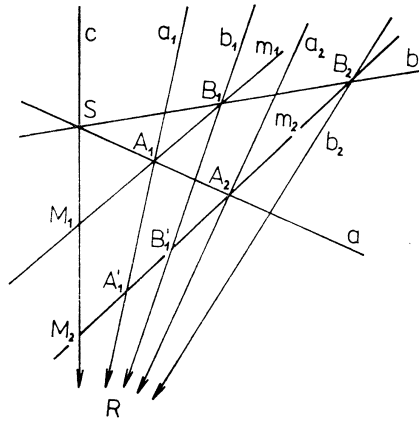


Fig. 17

a) Aus (ABC) folgt $(A''B''C')$ und $(A'B'C')$, woraus sich $A' \leq B' \Leftrightarrow A' \leq B' \leq C' \Leftrightarrow B'' \leq B' \leq C' \Leftrightarrow A'' \leq B'' \leq C' \Leftrightarrow A'' \leq B''$ ergibt.

b) (BAC) impliziert $(B''A''C')$ und $(B'A'C')$, also $A' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq A' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq B' \leq B'' \Leftrightarrow C' \leq A'' \leq B'' \Leftrightarrow A'' \leq B''$.

c) Aus (ACB) folgt $(A''C'B'')$, $(A'C'B')$ und $A' \leq B' \Leftrightarrow A' \leq C' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq B' \leq B'' \Leftrightarrow A'' \leq C' \leq B' \Leftrightarrow A'' \leq B''$.

II. Es sei (ASA'') , (BSB'') und (CSC') . Unter Anwendung der PZ-Projektion $\varphi(R, SB'', n)$ erhält man $(BSB'') \Rightarrow (B'C'B'')$ (Fig. 16)

a) Es sei (ABC) . Wegen $\bar{S} \neq \bar{A}, \bar{B}$ und (ASA'') , (CSC') gilt nach Satz 4 $(ABC) \Rightarrow (A''B''C')$ und nach Satz 6 ist $(ABC) \Rightarrow (A'B'C')$. Hieraus folgt dann $A' \leq B' \Leftrightarrow A' \leq B' \leq C' \Leftrightarrow B'' \leq B' \leq C' \Leftrightarrow A'' \leq B'' \leq C' \Leftrightarrow A'' \leq B''$.

b) (BAC) impliziert $(B'A'C')$, $(B''A''C')$, woraus sich $A' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq A' \leq B' \Leftrightarrow C' \leq B' \leq B'' \Leftrightarrow C' \leq A'' \leq B'' \Leftrightarrow A'' \leq B''$ ergibt.

c) Gilt (ACB) , dann ist $(A'C'B')$, $(A''C'B'')$ und $A' \leq B' \Leftrightarrow A' \leq C' \leq B' \Leftrightarrow B'' \leq C' \leq B' \Leftrightarrow B'' \leq C' \leq A'' \Leftrightarrow B'' \leq A''$.

Satz 17. Es seien a, b, c durch einen Punkt S gehende Geraden so gegeben, daß a, b benachbart und a, c fern sind. Durch einen Punkt $M_1 \in c$ bzw. $M_2 \in c$ mit $\bar{M}_1 \neq \bar{S}$ bzw. $\bar{M}_2 \neq \bar{S}$ führen wir eine Gerade m_1 bzw. m_2 mit $\bar{m}_1 \neq \bar{c}$, $\bar{m}_1 \parallel \bar{a}$ bzw. $\bar{m}_2 \neq \bar{c}$, $\bar{m}_2 \parallel \bar{a}$. Wir setzen $A_i = m_i \cap a$, $B_i = m_i \cap b$ und $a_i = RA_i$, $b_i = RB_i$ für $i \in \{1, 2\}$, wo R ein uneigentlicher Punkt von c ist. Aus $\neg(M_1SM_2)$ bzw. (M_1SM_2) folgt $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow a_2 \leq b_2$ bzw. $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow b_2 \leq a_2$ in der Anordnung von $\Pi(R)$.

Beweis. Wegen $\bar{a} = \bar{b}$ und $\bar{m}_1 \neq \bar{c}$, $\bar{m}_1 \parallel \bar{a}$ ist $\bar{A}_1 = \bar{B}_1$ und $\bar{A}_1 \neq \bar{M}_1$. Da α

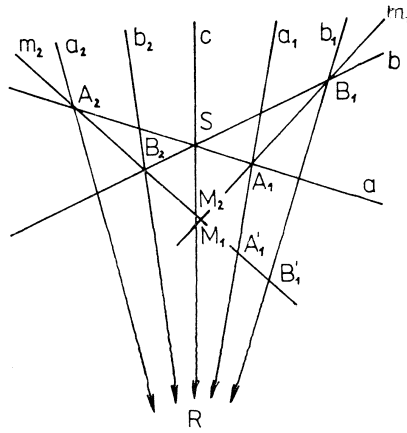


Fig. 18

konvex ist, folgt daraus $\neg(A_1M_1B_1)$. Entsprechend gilt auch $\neg(A_2M_2B_2)$. Wegen $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \neq \bar{c}$ und $\bar{S}_1 \neq \bar{M}_1, \bar{M}_2$ ist $A_1, B_1 \notin c$ und $A_2, B_2 \notin c$. Aus $a = b$ folgt $A_1 = B_1$ und $A_2 = B_2$, also $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$. Es sei ferner $a \neq b$.

I. Wir setzen $\neg(A_1SA_2)$ voraus. Da $A_1 \notin c$ ist, gilt $A_1 \in H_c^+ \vee A_1 \in H_c^-$. Ist z. B. $A_1 \in H_c^+$, dann erhält man schrittweise $\neg(A_1SA_2) \wedge A_1 \in H_c^+ \wedge A_2 \notin c \Rightarrow A_2 \in H_c^+$, $\neg(A_1M_1B_1) \wedge A_1 \in H_c^+ \wedge B_1 \notin c \Rightarrow B_1 \in H_c^+$, $\neg(A_2M_2B_2) \wedge A_2 \in H_c^+ \wedge B_2 \notin c \Rightarrow B_2 \in H_c^+$ und $A_2, B_2 \in H_c^+ \Rightarrow \neg(B_1SB_2)$. Wir setzen $A'_1 = a_1 \cap m_2$, $B'_1 = b_1 \cap m_2$. (Fig. 17).

1. Es sei $\neg(M_1SM_2)$. Wegen $\neg(A_1SA_2)$, $\neg(B_1SB_2)$, $\neg(M_1SM_2)$ gilt nach Satz 16 $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$ in der Anordnung von m_2 , also $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow a_2 \leq b_2$ in der Anordnung von $\Pi(R)$.

2. Es sei (M_1SM_2) . Wegen $\neg(A_1M_1B_1)$ gilt nach [2], (Z2) $(B_1A_1M_1) \vee (A_1B_1M_1)$.

a) Es sei $(B_1A_1M_1)$. Durch die PZ-Projektion $\varphi(R, m_1, m_2)$ ergibt sich daraus $(B'_1A'_1M_2)$. Unter Anwendung von $\varphi_1(R, a, m_2)$ erhält man analog $\neg(A_1SA_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \neg(A'_1 M_2 A_2)$. Wird $M_1 \in H_a^+$ angenommen, so $(M_1 S M_2)$ impliziert $M_2 \in H_a^-$. Wegen $a \neq b$ ist $B_1, B_2 \notin a$, folglich $(B_1 A_1 M_1) \wedge M_1 \in H_a^+ \Rightarrow B_1 \in H_a^-, \neg(B_1 S B_2) \wedge B_1 \in H_a^- \Rightarrow B_2 \in H_a^-$, also $B_2, M_2 \in H_a^- \Rightarrow \neg(B_2 A_2 M_2)$. Da zugleich $\neg(A_2 M_2 B_2)$ gilt, erhält man nach [2], (Z2) $(A_2 B_2 M_2)$. Aus $(B'_1 A'_1 M_2)$ folgt $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow M_2 \leq A'_1$ in der Anordnung von m_2 . Gemäß $\neg(A'_1 M_2 A_2)$ gilt $(M_2 A'_1 A_2) \vee (M_2 A_2 A'_1)$, was $M_2 \leq A'_1 \Leftrightarrow M_2 \leq A_2$ bedeutet und nach $(A_2 B_2 M_2)$ ist dann $M_2 \leq A_2 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$. Somit erhält man $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$, also $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow b_2 \leq a_2$ in der Anordnung von $\Pi(R)$.

b) Es sei $(A_1 B_1 M_1)$, also $(A'_1 B'_1 M_2)$. Gilt $M_1 \in H_b^+$, so ist $M_2 \in H_b^-$. Wegen $a \neq b$ ist $A_1, A_2 \notin b$, woraus sich $(M_1 B_1 A_1) \wedge M_1 \in H_b^+ \Rightarrow A_1 \in H_b^-, \neg(A_1 S A_2) \wedge$

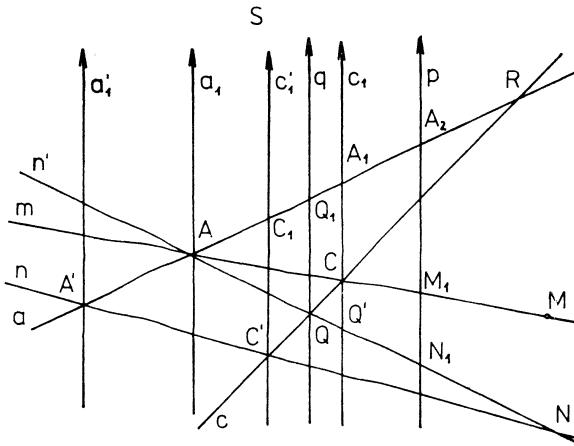


Fig. 19

$\wedge A_1 \in H_b^- \Rightarrow A_2 \in H_b^-$ und $A_2, M_2 \in H_b^- \Rightarrow \neg(A_2 B_2 M_2)$ ergibt. Aus $\neg(A_2 M_2 B_2)$ folgt dann $(B_2 A_2 M_2)$. Wegen $(A'_1 B'_1 M_2)$ gilt $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow B'_1 \leq M_2$ in der Anordnung von m_2 . Mit $\varphi_1(R, a, m_2)$ erhält man $\neg(B_1 S B_2) \Rightarrow \neg(B'_1 M_2 B_2)$, also $(M_2 B_2 B'_1) \vee (M_2 B'_1 B_2)$, was $B'_1 \leq M_2 \Leftrightarrow B_2 \leq M_2$ impliziert. Nach $(B_2 A_2 M_2)$ ergibt sich $B_2 \leq M_2 \Rightarrow B_2 \leq A_2$, also $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$. Dies aber bedeutet $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow b_2 \leq a_2$.

II. Wir setzen $(A_1 S A_2)$ voraus. Ist $A_1 \in H_c^+$, dann gilt $\neg(A_1 M_1 B_1) \Rightarrow B_1 \in H_c^+$, $(A_1 S A_2) \Rightarrow A_2 \in H_c^-, \neg(A_2 M_2 B_2) \Rightarrow B_2 \in H_c^-$ und $B_2 \in H_c^- \wedge B_1 \in H_c^+ \Rightarrow (B_1 S B_2)$. Wir setzen erneut $A'_1 = a_1 \sqcap m_2$, $B'_1 = b_1 \sqcap m_2$.

1. Es sei $\neg(M_1 S M_2)$. Wegen $\neg(A_1 M_1 B_1)$ gilt $(B_1 A_1 M_1) \vee (A_1 B_1 M_1)$ (Fig. 18).

a) Es sei $(B_1 A_1 M_1)$. Mit den PZ-Projektionen $\varphi(R, m_1, m_2)$ und $\varphi_1(R, a, m_2)$ ergibt sich $(B_1 A_1 M_1) \Rightarrow (B'_1 A'_1 M_2)$ und $(A_1 S A_2) \Rightarrow (A'_1 M_2 A_2)$. Nehmen wir $M_1 \in H_a^+$ an, so gilt $\neg(M_1 S M_2) \Rightarrow M_2 \in H_a^+$, $(B_1 A_1 M_1) \Rightarrow B_1 \in H_a^-, (B_1 S B_2) \Rightarrow B_2 \in$

$\in H_a^+$ und $B_2, M_2 \in H_a^+ \Rightarrow \neg(B_2A_2M_2)$. Wegen $\neg(A_2M_2B_2)$ ist dann $(A_2B_2M_2)$. Nach $(B'_1A'_1M_2)$ gilt $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow M_2 \leq A'_1$ in der Anordnung von m_2 , nach $(A'_1M_2A_2)$ ist $M_2 \leq A'_1 \Leftrightarrow A_2 \leq M_2$ und $(A_2B_2M_2)$ impliziert $A_2 \leq M_2 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$. Damit erhält man $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$, also $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow a_2 \leq b_2$.

b) Es sei $(A_1B_1M_1)$, also $(A'_1B'_1M_2)$. Mit $\varphi_1(R, a, m_2)$ ergibt sich $(B_1SB_2) \Rightarrow (B'_1M_2B_2)$. Nehmen wir $M_1 \in H_b^+$ an, dann wegen $\neg(M_1SM_2)$ ist $M_2 \in H_b^+$. Es gilt zugleich $(M_1B_1A_1) \Rightarrow A_1 \in H_b^-$, $(A_1SA_2) \Rightarrow A_2 \in H_b^+$ und $A_2, M_2 \in H_b^+ \Rightarrow \neg(A_2B_2M_2)$, woraus wegen $\neg(A_2M_2B_2)$ wieder $(B_2A_2M_2)$ folgt. Nach $(A'_1B'_1M_2)$

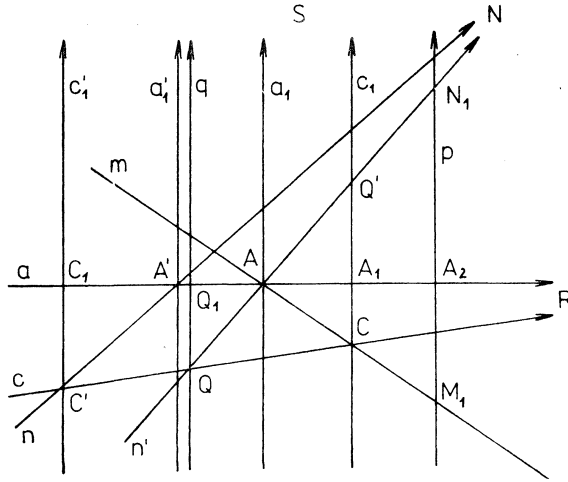


Fig. 20

ist $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow B'_1 \leq M_2$, nach $(B'_1M_2B_2)$ ist $B'_1 \leq M_2 \Leftrightarrow M_2 \leq B_2$ und $(B_2A_2M_2)$ impliziert $M_2 \leq B_2 \Leftrightarrow A_2 \leq B_2$, was $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow a_2 \leq b_2$ bedeutet.

2. Ist (M_1SM_2) , so wegen (A_1SA_2) , (B_1SB_2) , (M_1SM_2) gilt nach Satz 16 $A'_1 \leq B'_1 \Leftrightarrow B_2 \leq A_2$, also $a_1 \leq b_1 \Leftrightarrow a_2 \leq b_2$.

Satz 18. Es seien M, N, R, S uneigentliche Punkte mit $\bar{R} \neq \bar{M}, \bar{N}, \bar{S}$; $\bar{S} \neq \bar{M}, \bar{N}$ und a, c durch R gehende Geraden. Auf a bzw. c sind derartige Punkte A, A' bzw. C, C' gegeben, daß A, C bzw. A', C' in einer durch M bzw. N gehenden Geraden m bzw. n enthalten sind. Setzen wir $a_1 = AS, a'_1 = A'S, c_1 = CS, c'_1 = C'S$ und $n' = AN$, dann $m, a, n' \in F(A, a_1)$. Ist $\neg(man')$ bzw. (man') in der Zwischenrelation von $F(A, a_1)$ (Definition 11), dann gilt $a_1 \leq c_1 \Leftrightarrow a'_1 \leq c'_1$ bzw. $a_1 \leq c_1 \Leftrightarrow c'_1 \leq a'_1$ in der Anordnung von $\Pi(S)$.

Beweis. Wegen $\bar{N} \neq \bar{R}, \bar{S}$ und $\bar{R} \neq \bar{S}$ läßt sich $Q = n' \cap c, Q' = c_1 \cap n', q = SQ, Q_1 = q \cap a, A_1 = c_1 \cap a, C_1 = c'_1 \cap a$ setzen. Da $a = c \Leftrightarrow A = C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 = c_1$ und $a = c \Leftrightarrow A' = C' \Leftrightarrow a'_1 = c'_1$ gilt, kann man ferner $a \neq c$ setzen. Durch S führen wir eine Gerade p , so daß $\bar{A} \notin \bar{p}$ und $(a_1 c_1 p)$ in der Zwischenrelation von $\Pi(S)$ gilt. Wegen $\bar{S} \neq \bar{R}, \bar{M}, \bar{N}$ läßt sich dann $A_2 = a \sqcap p, M_1 = m \sqcap p$ und $N_1 = n' \sqcap p$ setzen. Aus $(a_1 c_1 p)$ ergibt sich nach Definition 9 $(AQ'N_1)$ und (ACM_1) .

1. Es sei $\neg(man')$. Nach Definition 11 erhält man hieraus $\neg(M_1 A_2 N_1)$ (Fig. 19). Es sei z. B. $M_1 \in H_a^+$. Dann $\neg(M_1 A_2 N_1)$ impliziert $N_1 \in H_a^+$ und aus $(AQ'N_1)$ bzw. (ACM_1) folgt $Q' \in H_a^+$ bzw. $C \in H_a^+$. Wegen $C \in H_a^+$ und $a \neq c$ ergibt sich nach (A1) $c \subset H_a^+$, folglich $Q \in H_a^+$. Mithin gilt $\neg(QAQ')$ und nach Definition 9 auch $\neg(Q_1 AA_1)$, was $(AQ_1 A_1) \vee (AA_1 Q_1)$ bedeutet. Nach Bemerkung 8 betrachten wir eine Anordnung \leq von $\Pi(S)$ mit $a_1 \leq c_1$ und auf der Geraden a eine durch \leq induzierte Anordnung. Dann erhält man $a_1 \leq c_1 \Leftrightarrow A \leq A_1$ und wegen $(AQ_1 A_1) \vee (AA_1 Q_1)$ ist $A \leq A_1 \Leftrightarrow A \leq Q_1$. Wegen $\bar{R} \neq \bar{S} \neq \bar{N} \neq \bar{R}$ gilt nach Satz 10 $A \leq Q_1 \Leftrightarrow A'_1 \leq C_1$, woraus $a'_1 \leq c'_1$ folgt.

2. Es sei (man') , also $(M_1 A_2 N_1)$ (Fig. 20). Ist $M_1 \in H_a^+$ vorausgesetzt, so gilt $N_1 \in H_a^-$ und aus $(AQ'N_1), (ACM_1)$ folgt $Q' \in H_a^-, C \in H_a^+$. Dann ergibt sich schrittweise $c \subset H_a^+, Q \in H_a^+, (QAQ')$ und $(Q_1 AA_1)$. Analog zum Fall 1 erhält man $a_1 \leq c_1 \Leftrightarrow A \leq A_1 \Leftrightarrow Q_1 \leq A \Leftrightarrow C_1 \leq A' \Leftrightarrow c'_1 \leq a'_1$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. Dembowski: *Finite Geometrie*. New York 1968.
- [2] M. Kunze: *Angeordnete Hjelmslevsche Geometrie*. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.
- [3] F. Machala: *Angeordnete affine Klingenbergische Ebenen*. Czech. Math. Journal, 30, (105), 1980, 341—356.
- [4] F. Machala: *Fastgeordnete und geordnete Klingenbergische Ebenen*. Čas. pro pěst. mat. 106 (1981), 138—155.

Souhrn

О УСПОŘÁDANÝХ АФФИННІХ КЛИНГЕНБЕРГОВСКÝХ РОВИНАХ, КТЕРÉ JSOU VNOŘENY DO ПРОЕКТИВНІХ КЛИНГЕНБЕРГОВСКÝХ РОВИН

FRANTIŠEK MACHALA

V předcházejících pracích [3], [4] studoval autor uspořádané afinní klingenbergovské roviny. V předkládané práci se předpokládá, že tyto roviny jsou navíc vnořeny do projektivních klingenbergovských rovin. Jestliže platí axiom (A1), pak tvrzení z [3], [4], dokázaná pomocí rovnoběžných projekcí, platí pro projekce s libovolným nevlastním středem. Na základě platnosti dalšího axiomu (A2) jsou dokázány věty, které se používají v další autorově práci k řešení problému rozšíření uspořádání afinní klingenbergovské roviny do uspořádání klingenbergovské projektivní roviny.

Резюме

О УПОРЯДОЧЕННЫХ АФФИННЫХ ПЛОСКОСТЯХ КЛИНГЕНБЕРГА, КОТОРЫЕ ПОДГРУЖЕНЫ В ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОСКОСТИ КЛИНГЕНБЕРГА

ФРАНТИЩЕК МАХАЛА

В предыдущих работах [3], [4] автор изучал упорядоченные аффинные плоскости Клингенберга. В предлагаемой работе предполагается, что эти плоскости сверх того подгружены в проективные плоскости Клингенберга. Если выполняется аксиома (A1), то утверждения из [3], [4], которые доказываются при помощи параллельных проектирований, выполняются для проектирований с произвольными несобственными центрами. При помощи следующей аксиомы (A2) доказываются предложения, которыми автор пользуется в дальнейшей работе при решении проблемы распространения упорядоченности аффинной плоскости Клингенберга в упорядоченность проективной плоскости Клингенберга.