Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jindřich Palát

Приложение теоремы Штурма

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 20 (1981), No. 1, 77--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120111

1981 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM MATURALIUM — TOM 69

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

(*Поступило в редакцию 15. марта 1980*)

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциального уравнение 2-го рода

$$(r) \qquad y'' - qy = r,$$

где функции $q(t) \in C^2(j)$, $q(t) > 0$, $r(t) \in C(j)$ и $j = (a, b)$, где a, b могут быть несобственными числами.

О соответствующем однородном уравнении

$$(q) \qquad y'' - qy = 0$$

будем всегда предполагать, что оно осцилирующее, т. е., что каждое ее решение осцилирует к обеим граничным точкам интервала j (см. [1] стр. 4).

Определение 1.

Решение $y(t)$ уравнения (r) назовем осцилирующим по отношении к функции $f(t)$, $t \in j$, если существует такая последовательность точек $t_k \in j$, k-целое, $t_k < t_{k+1}$, $t_k \to b$, $t_{-k} \to a$ для $k \to \infty$ такая, что $y(t_k) = f(t_k)$, $y(t) \neq f(t)$ для $t \in (t_k, t_{k+1})$.

Если $f(t) = 0$, $t \in j$, тогда назовем такое решение просто осцилирующим.

Пусть $y(t) \in (r)$ осцилирует по отношении к функции $f(t)$. Рассмотрим взаимно-однозначное отображение $\boldsymbol{T}$

$$\begin{aligned} T &= t, \\ Y &= f(t) - y, \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} t &= T, \\ y &= f(T) - Y. \end{aligned} \right) \tag{1}$$

Если в уравнении (r) перейти, согласно (1), к новым переменным (T, Y), тогда получаем уравнение

$$(R) \qquad Y'' - qY = R,$$

где $R = f'' - qf - r$, причем ось oy перейдет в ось OY и кривая $y = f(t)$ перейдет в ось OT.

В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что для каждого уравнения (r) нам известно одно основное частное решение $w(t)$, $t \in j$.

Рассмотрим отображение T в котором $f(t) = w(t),\ t \in j$:

$$T = t \qquad \left(t = T,\right.$$
$$Y = w(t) - y, \qquad \left.y = w(T) - Y.\right) \tag{2}$$

Тогда, как известно, если $y(t) \in (r)$ осцилирует по отношении к функции $f(t)$, то $Y(T) = f(T) - y(T)$, $T \in j$ является осцилирующим решением уравнения (q), так как $R \equiv 0$.

Далее известно, что если u, v суть линейно независимые решения уравнения (q), тогда общее решение уравнения (r) запишется в виде $y = C_1 u + C_1 v + w$.

Уравнение (q) осцилирующее и поэтому можно его общее решение выразить в виде

$$k_1 \frac{\sin(\alpha(t) + k_2)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}} \tag{3}$$

где k_1, k_2 произвольные постоянные, $\alpha(t) \in C^1(j)$, $\alpha'(t) \neq 0$ первая фаза базиса (u, v) дифференциального уравнения (q) (см. [1] стр. 39).

Итак, каждое решение уравнения (r) можно записать в виде

$$y = w(t) - u(t), \tag{5}$$

где $u(t)$ определенное осцилирующее решение уравнения (q). Отсюда вытекает› что каждое решение уравнения (r) осцилирует по отношению к решению $w(r)$.

Теорема 1.

Пусть $u, v \in (q)$, $y_1 = w - u$, $y_2 = w - v$, $S_1(S_2)$ множество общих точек решений y_1, w уравнения (r) (y_2, w уравнения (r)) и $S_u(S_v)$ множество нулевых точек функции $u(v)$.

Существует простое отображение множества S_1 на S_u(S_2 на S_v) причем для u, v линейно независимые (зависимые) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ $(S_1 = S_2)$.

Доказательство. Очевидно верны утверждения „$u(t_0) = 0 \langle = \rangle w(t_0) = y_1(t_0)$“ и „$v(t_1) = 0 \langle = \rangle w(t_1) = y_2(t_1)$“, которые определяют простые отображения P_1 и P_2 множества нулевых точек функции $u(t)$, $v(t)$ на множества общих точек функций y_1, w и y_2, w соответственно.

Пусть u, v линейно независимые, т. е. $v = C_1 u$, $C_1 \neq 0$ и $(t_0, y_1(t_0)) \in S_1$, $t_0 \in j$. Тогда $w(t_0) = y_1(t_0)$ и $y_2(t_0) = w(t_0) - v(t_0) = w(t_0) - C_1 u(t_0) = w(t_0) = y_1(t_0)$. Следовательно, $(t_0, y_1(t_0)) = (t_0, y_2(t_0)) \in S_2$, и поэтому $S_1 \subset S_2$.

Аналогично проверяется, что $S_2 \subset S_1$, следовательно $S_1 = S_2$.

Пусть u, v линейно независимые и существует точка $t_0 \in j$ такая, что $(t_0, y_1(t_0)) = (t_0, y_2(t_0))$, где $(t_0, y_1(t_0)) \in S_1$ и $(t_0, y_2(t_0)) \in S_2$. Тогда $y_1(t_0) = w(t_0) - u(t_0) = y_2(t_0) = w(t_0) - v(t_0)$ и поэтому $u(t_0) = v(t_0)$. Отсюда, как известно, вытекает, что $u(t)$, $v(t) \in (q)$ линейно зависимые, чтож противоречит предложению. Следовательно $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Замечание.

Так как для $y = w - u$ есть $y' = w' - u'$, можно определить простое отображение множества нулевых точек функции u', $u \in (q)$ на множество точек, в которых функции y', w', $y \in (r)$, $w \in (r)$ имеют одиннаковые значения. Для этих точек и соответствующих множеств можно провестии такие же рассуждения, как выше приведенные.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся некоторые понятия и факты из работы [2].

Определение 2.

Пусть $t \in j$ произвольное число, u, $v \in (q)$ такие, что $u(t) = 0$, $v'(t) = 0$.

Число $x \neq t$, $x \in j$ назовем сопряженным с числом t по отношению к дифференциальному уравнению (q) и именно 1. рода или 2. рода, 3. рода и 4. рода в зависимости то того, если $u(x) = 0$ или $v'(x) = 0$, $u'(x) = 0$, $v(x) = 0$.

Если число x является n-той ($n \geqq 1$) нулевой точкой этой функции, лежащая налево или направо от числа t, тогда назовем ее лево- или правосторонным сопряженным числом с числом t.

Далее обозначим φ, ψ, χ, ω основную центральную дисперсию 1., 2., 3., 4. рода принадлежащую дифференциальному уравнению (q) (см. [1] стр. 105).

Для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ обозначим φ_n, ψ_n n-тую центральную дисперсию 1., 2. рода и для $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ обозначим χ_n, ω_n n-тую центральную дисперсию 3., 4. рода. Причем $\varphi_1 = \varphi$, $\chi_1 = \chi$, $\psi_1 = \psi$, $\omega_1 = \omega$, $\varphi_0 = \psi_0 = t_0$.

Из определений и свойств сопряженных точек и центральных дисперсий вытекают следующие теоремы (см. [2]).

1. Пусть $u, v \in (q)$, $t_0 \in j$, $u(t_0) = v'(t_0) = 0$, тогда имеет место

$$u(\varphi_n(t_0)) = 0 \text{ для } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ и } u(t) \neq 0 \text{ для } t \in j,\ t \neq \varphi_n(t_0),$$
$$v'(\psi_n(t_0)) = 0 \text{ для } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ и } v'(t) \neq 0 \text{ для } t \in j,\ t \neq \psi_n(t_0),$$
$$u'(\chi_n(t_0)) = 0 \text{ для } n = 1, 2, \ldots \text{ и } u'(t) \neq 0 \text{ для } t \in j,\ t \neq \chi_n(t_0),$$
$$v(\omega_n(t_0)) = 0 \text{ для } n = 1, 2, \ldots \text{ и } v(t) \neq 0 \text{ для } t \in j,\ t \neq \omega_n(t_0).$$

2. Пусть $t_0 \in j$, y_0 произвольные числа и y_1, y_2 произвольные решения уравнения (r). Если $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, тогда имеют место равенства $y_1(\varphi_n(t_0)) = y_2(\varphi_n(t_0)) = w(\varphi_n(t_0))$ и $y_1(t) \neq y_2(t)$ для $t \in j$, $t \neq \varphi_n(t_0)$ и $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

3. Все решения $y \in (r)$, которые проходят точкой (t_0, y_0) имеют общими как раз точки $[\varphi_n(t_0), y(\varphi_n(t_0))] = [\varphi_n(t_0), w(\varphi_n(t_0))]$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4. Пусть $t_0 \in j$, y'_0 произвольные числа и y_1, y_2 произвольные решения уравнения (r). Если $y'_1(t_0) = y'_2(t_0) = y'_0$, тогда имеют место равенства $y'_1(\psi_n(t_0)) = y'_2(\psi_n(t_0)) = w(\psi_n(t_0))$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

5. Все решения y к (r), первые производные которых проходят точкой (t_0, y'_0), имеют то свойство, что их производные имеют одинаковое значение как раз в точках $[\psi_n(t_0), y'(\psi_n(t_0))] = [\psi_n(t_0), w'(\psi_n(t_0))]$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Определение 3.

Пусть $t_0 \in j$. Точки $[\varphi_n(t_0), w(\varphi_n(t_0))]$ $[\psi_n(t_0), w(\psi_n(t_0))]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ назовем системой $S(t_0, y_0)$ $(T(t_0, y'_0))$ узлов 1. (2.) рода соответствующая дифференциальному уравнению (r).

Определение 4.

Пусть $t_0, t_1 \in j$, $[t_0, w(t_0)]$, $[t_1, w(t_1)] \in S(t_0, y_0)$ $([t_0, w'(t_0)]$, $[t_1, w(t_1)] \in$ $\in T(t_0, y'_0)))$, назовем соседними узлами 1. (2.) рода соответствующие дифференциальному уравнению (r), если числа t_0, t_1 являются соседними сопряженными числами 1. (2.) рода.

Определение 5.

Все решения дифференциального уравнения (r), которые проходят узлами системы $S(t_0, y'_0)$ (первые производные которых проходят узлами системы $T(t_0, y_0)$), назовем пучком решений 1. (2.) рода.

Рассмотрим теперь два уравнения типа (r)

$$(r_1) \qquad y'' - q_1 y = r_1, \qquad t \in j_1,$$

$$(r_2) \qquad y'' - q_2 y = r_2, \qquad t \in j_2,$$

где $j_1 \cap j_2 \neq \emptyset$. Пусть w_1, y_1 и w_2, y_2 суть два частные решения уравнений (q_1) и (q_2). Тогда $u_1 = w_1 - y_1$ будет решением осцилирующего уравнения

$$(q_1) \qquad y'' - q_1 y = 0$$

и $u_2 = w_2 - y_2$ решением осцилирующего уравнения

$$(q_2) \qquad y'' - q_2 y = 0.$$

Пусть $\langle c, d\rangle \subset j_1 \cap j_2$ и φ_n^1, φ_n^2 центральные дисперсии 1. рода уравнений (q_1), (q_2) соответственно. При этих предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема 2.

Пусть

$$q_1(t) \geqq q_2(t), \; t \in \langle c, d\rangle. \tag{6}$$

Пусть пучек решений $S_1(t_0, w_1(t_0))$, $t_0 \in (c, d\rangle$ соответствующий дифференциальному уравнению (q_1) имеет на отрезке $(c, d\rangle$ как раз k *узлов $[\varphi_n^1(t_0)$, $w_1(\varphi_n^1(t_0))]$, $n = 0, 1, \ldots, \mathrm{k} - 1$, и решение $y_2 \in (r_2)$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{w'_1(c) - y'_1(c)}{w_1(c) - y_1(c)} \geqq \frac{w'_2(c) - y'_2(c)}{w_2(c) - w_2(c)} \tag{7}$$

(если $w_1(c) - y_1(c) = 0$ или $w_2(c) - y_2(c) = 0$, то соответствующая дробь заменится ∞).

Тогда пучек решений $S_2(\varphi_n^2(t), w_2(\varphi_n^2(t))$ имеет на отрезке (c, t_k) хотя бы k *узлов, если в неравенстве* (7) *имеет место острое неравенство или когда в* (6) *имеет место острое неравенство.*

Доказательство. Оба уравнения (q_1) и (q_2) являются на своих интервалах определения осцилирующими. Из условий теоремы вытекает, что $u_1(t) \in (q_1)$ имеет на интервале $(c, d\rangle$ как раз k нулевых точек и из неравенства (7) вытекает неравенство

$$\frac{u_1'(c)}{u_1(c)} \geqq \frac{u_2'(c)}{u_2(c)}, \tag{8}$$

где $u_2 \in (q_2)$.

Следовательно, для уравнений (q_1), (q_2) выполнены условия теоремы Штурма (см. [3]), согласно которой имеет решение $u_2 \in (q_2)$ на интервале (c, t_k) хотя бы k нулевых точек $c < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < t_k$. Согласно теореме 1. соответствуют этим нулевым точкам узлы $[\varphi_i^2(x_1), w_2(\varphi_i^2(x_1))] \in S_2(x_1, w_2(x_1))$, $x_1 \in (c, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \geqq k$.

Следствие 1. Пусть имеют место предположения теоремы 2. и $[\varphi_n^1(t_0)$, $w(\varphi_n^1(t_0))]$, $[\varphi_{n+1}^1(t_0)$, $w(\varphi_{n+1}^1(t_0))]$ два соседних узла пучка решений $S_1(t_0$, $w_1(t_0))$.

Тогда каждое решение $y_2 \in (q_2)$ осцилирующее по отношению к функции $w_2(t)$ имеет на интервале $\langle\varphi_n^1(t_0), \varphi_{n+1}^1(t_0)\rangle$ хотя бы один узел $[\varphi_i^2(x_1), w_2(\varphi_i^2(x_1))] \in$ $\in S_2(x_1, w_2(x_1))$.

Следствие 2. (см. [2]). Пусть имеют место предположения теоремы 2., где $q_1(t) = q_2(t) = q(t)$, $t \in \langle c, d\rangle$.

Пусть $y_1 = w_1 - u_1$ и $y_2 = w_1 - u_2$ два решения того же уравнения (r) (оба осцилируют по отношении к функции $w_1(t)$), непринадлежащие к одному и тому же пучку решений уравнения (r).

Тогда узлы $[\varphi_n^2(\bar{t}_1), w_1(\varphi_n^1(t_1))] \in S_1(t_1, w_1(t_1))$ и узлы $[\varphi_n^2(\bar{t}_1), w_1(\varphi_n^2(\bar{t}_1))] \in S_2(\bar{t}_1$, $w_1(\bar{t}_1))$, $t_1 \neq \bar{t}_1$, $\bar{t}_1 \in j$ взаимно отделяются т. е., между каждыми двумя соседними узлами

$$[\varphi_n^1(t_1), w_1(\varphi_n^1(t_1))], \ [\varphi_{n+1}^1(t_1), w_1(\varphi_{n+1}^1(t_1))],$$

лежащими на кривой $w_1(t)$, лежит как раз один узел

$$[\varphi_k^2(\bar{t}_1), w_1(\varphi_k^2(\bar{t}_1))] \in S_2(\bar{t}_1, w_1(\varphi_k^1(\bar{t}_1))), \ \varphi_n^1(t_1) < \varphi_k^2(\bar{t}_1) < \varphi_{n+1}^1(t_1)$$

и наоборот.

Замечаъие.

Если имеют место предположения теоремы 2. и если для каждого уравнения (r_1), (r_2) перейдем к новым переменным, согласно (2), где $w = w_i$, $i = 1, 2$, тогда функции $Y_i = w_1 - u_i$, $i = 1, 2$ будут осцилирующие решения уравнения (q_i), $i = 1, 2$ и теорема 2. и ее следствия 1. и 2. перепишутся в классическую формулировку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Borůvka O.: *Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung*, VEB, DVW, Berlin 1967, 218 pages.

[2] Laitoch M.: *A modification of the Sturm's theorem on separating zeros of solutions of a linear differential equation of the 2nd order*, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis FRN, Tom 57, 1978.

[3] Hartman P.: *Ordinary differential equations*, John Wiley comp. sons, New York—London—Sydney, 1964.

РЕЗЮМЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ШТУРМА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

Рассматриваются два уравнения

$$(r_1) \qquad y'' - q_1 y = r_1, \qquad y'' - q_2 y = r_2, \qquad (r_2)$$

где $q_i(t) \in C^2(j)$, $q_i(t) > 0$, $r_i(t) \in C(j)$, $i = 1, 2$, $j = (a, b)$, a, b могут быть и несобственными числами. О соответствующих однородных уравнениях

$$(q_1) \qquad (q_1) y'' - q_1 y = 0, \qquad y'' - q_2 y = 0 \qquad (q_2)$$

предполагается, что они осцилируют (см. [1] стр. 4).

Пусть w_i, $i = 1, 2$ частные решения уравнений (r_i). Каждое решение уравнения (r_i) имеет бесконечно много общих точек с решением w_i, что и лежит в основе определения осциляции решения уравнения (r_i) по отношению к решению w_i.

Показывается, что существует простое отображение общих точек решений y_i, w_i уравнения (r_i) на нулевые точки решения $u_i = w_i - y_i$ уравнения (q_i). Далее, при определенных условиях и при помощи теоремы Штурма, показывается, что если решения y_1, w_1 уравнения (q_1) имеют на интервале $(c, d\rangle \subset j$ k общих точек, тогда решения y_2, w_2 уравнения (r_2) имеют на этом интервале хотя бы k общих точек.

Если в частном случае $q_1 \equiv q_2$, тогда между любимыми двумя соседними общими точками решений y_1, w уравнения (r_1) лежит на кривой w как раз одна общая точка решений y_2, w того же уравнения.

SOUHRN

POUŽITÍ STURMOVY VĚTY

JINDŘICH PALÁT

Uvažují se dvě rovnice

$$(r_1) \qquad y'' - q_1 y = r_1,$$

$$(r_2) \qquad y'' - q_2 y = r_2,$$

kde $q_i(t) \in C^2(j)$, $q_i(t) > 0$, $r_i(t) \in C(j)$, $i = 1, 2, j = (a, b)$, a, b mohou být popřípadě nevlastní čísla. O příslušných homogenních rovnicích

$$(q_1) \qquad y'' - q_1 y = 0,$$

$$(q_2) \qquad y'' - q_2 y = 0$$

se předpokládá, že jsou oscilující (viz [1] str. 4).

Nechť w_i, $i = 1, 2$ jsou partikulární řešení rovnic (r_i). Každé řešení rovnice (r_i) má nekonečně mnoho společných bodů s řešením w_i, což se bere za základ definice o oscilaci řešení rovnice (r_i) vzhledem k řešení w_i.

Ukazuje se, že existuje vzájemně jednoznačná souvislost mezi společnými body y_i, w_i řešení rovnice (r_i) a nulovými body řešení $u_i = w_i - y_i$ rovnice (q_i). Dále se za jistých předpokladů a za pomoci Sturmovy věty ukazuje, že mají-li řešení y_1, w_1 rovnice (q_1) na intervale $(c, d\rangle \subset j$ k společných bodů, potom řešení y_2, w_2 rovnice (r_2) mají na tomto intervale alespoň k společných bodů.

Je-li ve zvláštním případě $q_1 \equiv q_2$, potom mezi libovolnými dvěma sousedními společnými body řešení y_1, w rovnice (r_1) leží na křivce w právě jeden společný bod řešení y_2, w téže rovnice (r_1).