Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Josef Hošek

Jacobische Differentialgleichung mit hyperbolischen Phasen die der primitiven Funktion zur Quadratwurzel aus ihrem Träger gleich sind

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 20 (1981), No. 1, 65--75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120110

1981 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 69

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

JACOBISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNG MIT HYPERBOLISCHEN PHASEN DIE DER PRIMITIVEN FUNKTION ZUR QUADRATWURZEL AUS IHREM TRÄGER GLEICH SIND

JOSEF HOŠEK

(Eingelangt am 31. März 1980)

Es gebe eine Differentialgleichung

(Q)
$$y'' + Q(t)\,y = 0,$$

wo die Funktion $Q \in C_j^2$ und $Q(t) > 0$ für $t \in j$. Dabei sei j ein beliebiges offenes Intervall und die die Differentialgleichung (Q) sei im j nichtoszillatorisch.

Problemstellung: Es sollen alle Funktionen von (Q) so bestimmt werden, daß die erste hyperbolische Phase α irgendeiner Basis (u, v) von (Q) mit dem Träger (Q) genau einer primitiven Funktion zur Funktion $\sqrt{Q}$ im offenen Intervall $i \subset j$ gleich ist. Also, daß für jedes $t \in i$

$$\sqrt{\alpha'(t)} = \sqrt{Q(t)} \tag{1}$$

gilt.

Bemerkung 1.

Die Lösung dieses Problems für die erste Phase der oszillatorischen Differentialgleichung (Q) befindet sich in [6].

Satz 1.

Existiert eine erste hyperbolische Phase α irgendeiner Basis (u, v) der Differentialgleichung (Q) mit $|\,u(t)\,| < |\,v(t)\,|$ für $t \in i \subset j$ und gilt für alle $t \in i$ die Beziehung (1), dann stellt der Träger Q im Intervall i die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$4z''z - 5z'^2 - 32z^3 = 0 \tag{2}$$

dar.

Beweis: Nach [4] befriedigt die erste hyperbolische Phase α der Differentialgleichung (Q) im Intervall $i \subset j$ die nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$-\{\alpha, t\} + \alpha'^2 = -Q(t), \tag{3}$$

d. h.

$$\{\mathrm{tgh}\ \alpha, t\} = Q(t),$$

wo das Symbol $\{\alpha, t\} = \left(\frac{\alpha''}{2\alpha'}\right)' - \left(\frac{\alpha''}{2\alpha'}\right)^2$ die sogenannte Schwarzsche Ableitung der Funktion α in t ist. Da für jedes $t \in i$ die Beziehung (1) gilt und

$$\alpha''(t) = \frac{Q'(t)}{2\sqrt{Q(t)}}$$

$$\alpha'''(t) = \frac{1}{2}\frac{Q''(t)}{\sqrt{Q(t)}} - \frac{1}{4}\frac{Q'^2(t)}{Q(t)\sqrt{Q(t)}},$$

so ist nach Einsetzen in (3) und nach einer kleinen Änderung

$$-\frac{1}{2}\frac{2QQ'' - Q'^2}{4Q^2} + \frac{3}{4}\frac{Q'^2}{4Q^2} + 2Q = 0.$$

Nach einer weiteren Umformung ergibt sich schon (2), wo natürlich Q anstatt z geschrieben wird.

Satz 2.

Ist die Funktion Q (mit $Q(t) > 0$ für $t \in j$) eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2) *im Intervall j, dann befriedigt jede primitive Funktion α zur Funktion $\sqrt{Q}$ für $t \in j$ die nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung* (3). *Die Funktion α ist also die erste hyperbolische Phase im j irgendeiner Basis (u, v) von (Q) mit dem Träger Q.*

Beweis. Ist α eine beliebige primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{Q}$ im Intervall j, dann $\alpha \in C_j^3$, $\alpha'(t) > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} Q(t) &= \alpha'^2(t), \\ Q'(t) &= 2\alpha'(t)\,\alpha''(t), \\ Q''(t) &= 2[\alpha''^2(t) + \alpha'(t)\,\alpha'''(t)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in (2) und nach kleiner Abänderung erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{\alpha'''}{\alpha'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 - 2\alpha'^2 = 0$$

woraus

$$-\{\alpha, t\} + \alpha'^2 = -\alpha'^2.$$

Setzen wir an der rechten Seite der letzten Identität im j den Ausdruck aus (4) ein, so erhalten wir (3). Also die Funktion α ist tatsächlich die erste hyperbolische Phase im Intervall j irgeneiner Basis (u, v) von (Q).

Vereinbarung.

Die Menge aller reellen Zahlen wird im weiteren Betrachtungen mit $\mathbf{R}$ bezeichnet.

Alle positiven Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind nach [2] von der Form

$$z(t) = \frac{1}{(2\sqrt{2}t + c)^2}, \qquad \text{wo } c \in \mathbf{R}, \text{ beliebig} \tag{5}$$

$$z(t) = \frac{1}{(2\sqrt{2}t - c)^2}, \qquad \text{wo } c \in \mathbf{R}, \text{ beliebig} \tag{5'}$$

$$z(t) = \frac{16a^2}{[(at + b)^2 - 32]^2}, \qquad \text{wo } a \in \mathbf{R} - \{0\},\ b \in \mathbf{R}, \text{ beliebig.} \tag{6}$$

Bemerkung 2.

Wird $c_1 = -c$ in (5′) gesetzt, dann läßt sich die Funktion (5′) auch in der Form (5) ausdrücken. Im folgenden werden wir also die Differentialgleichung (Q) bloß mit den Trägern (5), (6) betrachten und diese nacheinander mit q_1 und q_2 bezeichnen. In beiden Fällen existiert stets ein offenes Intervall j bei beliebig gewählten Konstanten a, b, c so daß für alle $t \in j$ entweder $2\sqrt{2}t + c \neq 0$ oder $(at + b)^2 - 32 \neq 0$.

Es sei in diesem Zusammenhang noch bemerkt, daß nach [5] die Differentialgleichung (Q) mit dem Träger $q_1(t) = \dfrac{1}{(2\sqrt{2}t + c)^2}$ im Intervall j zu sich selbst begleitend ist.

Satz 3.

Es sei α eine beliebige primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{q_l}$, $l = 1,2$, im Intervall j_l. Dann ist die Funktion α die erste hyperbolische Phase der Basis

$$\left(\frac{\sinh \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}, \frac{\cosh \alpha(t)}{\sqrt{|\alpha'(t)|}}\right), \tag{7}$$

im Intervall j_l der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger

$$q_l, \qquad l = 1, 2.$$

Beweis. Es gilt vor allem für $t \in j_l$, $l = 1,2$, $\alpha \in C^3_{j_l}$, $\alpha'(t) > 0$. Nach Satz 2 gilt für jedes $t \in j_l$

$$-\{\alpha, t\} + \alpha'^2 = -q_l(t), \qquad l = 1,2$$

und der Schluß des Beweises folgt aus [4].

Folgerung.

Ist α eine beliebige primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{q_l}$, dann ist die erste hyperbolische Phase der Basis

$$\left(\frac{\sinh \alpha(t)}{\sqrt[4]{q_l(t)}}, \frac{\cosh \alpha(t)}{\sqrt[4]{q_l(t)}}\right), \qquad l = 1, 2,$$

im Intervall j_l der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_l. Der Beweis folgt aus Satz 3, wenn bedenkt, daß $\alpha'(t) = \sqrt{q_l(t)}$, $l = 1,2$, $t \in j_l$.

Satz 4.

Es sei α eine erste hyperbolische Phase im Intervall j_l, $l = 1,2$, der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_l, die eine primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{q_l}$ in j_l ist. Wenn α_1 auch eine primitive Funktion zu derselben Funktion $\sqrt{q_l}$ im j_l ist, dann ist α_1 ebenfalls eine erste hyperbolische Phase der Basis (u_1, v_1) im Intervall j_l der Differentialgleichung (Q), wo

$$u_1(t) = \frac{\sinh \alpha(t)}{\sqrt[4]{q_l(t)}} \cosh k + \frac{\cosh \alpha(t)}{\sqrt[4]{q_l(t)}} \sinh k,$$

$$u_2(t) = \frac{\sinh \alpha(t)}{\sqrt[4]{q_l(t)}} \sinh k + \frac{\cosh \alpha(t)}{\sqrt[4]{q_l(t)}} \cosh k$$

und $k \in \mathbf{R}$ eine geeignete Konstante, $l = 1,2$.

Beweis. Aus den Eigenschaften der primitiven Funktionen α, α_1 zu derselben Funktion $\sqrt{q_l}$, $l = 1,2$ im Intervall j_l ergibt sich die Existenz einer solchen Konstante $k \in \mathbf{R}$, daß

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) + k, \qquad t \in j_l. \tag{8}$$

Nach [4] ist die Funktion α_1 auch eine hyperbolische Phase der Basis (u_1, v_1) der Differentialgleichung (Q) im j_l und in Bezug auf die Folgerung folgen daraus die Beziehungen für die Funktionen u_1, v_1.

Fall 1

Für $q_1(t) = \dfrac{1}{(2\sqrt{2}t + c)^2}$, $j_1 = \left(-\dfrac{c}{2\sqrt{2}}, \infty\right)$, $c \in \mathbf{R}$ ist nach der Folgerung die Funktion

$$\alpha(t) = \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}},$$

wo $t \in j_1$, eine erste hyperbolische Phase der Basis

$$\left(\sqrt{2\sqrt{2}t + c} \sinh \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2}t + c} \cosh \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}}\right)$$

im Intervall j_1 der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_1. Aus Satz 4 folgt, daß die Funktion

$$\alpha_1(t) = \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}} + k, \qquad t \in j_1, k \in \mathbf{R},$$

eine erste hyperbolische Phase der Basis (u_1, v_1) im j_1 derselben Gleichung ist, wobei

$$u_1(t) = \sqrt{2\sqrt{2}t + c}\left[\sinh \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}} \cosh k + \cosh \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}} \sinh k\right]$$

$$v_1(t) = \sqrt{2\sqrt{2}t + c}\left[\sinh \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}} \sinh k + \cosh \frac{\ln(2\sqrt{2}t + c)}{2\sqrt{2}} \cosh k\right].$$

Fall 2

Für $q_2(t) = \dfrac{16a^2}{[(at+b)^2 - 32]^2}$, $j_2 = \left(\dfrac{4\sqrt{2} - b}{a}, \infty\right)$, $a > 0$, a, $b \in \mathbf{R}$ ist unter Berücksichtigung der Folgerung die Funktion

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right), \qquad t \in j_2$$

eine erste hyperbolische Phase der Basis

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(at+b)^2 - 32}{a}} \sinh \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(at+b)^2 - 32}{a}} \cosh \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right)\right),$$

im Intervall j_2 der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_2. Aus Satz 4 ergibt sich, daß auch die Funktion

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right) + k, \qquad t \in j_2,\ k \in \mathbf{R}$$

eine erste hyperbolische Phase der Basis (u_1, v_1) im Intervall j_2 der Differentialgleichung (Q) ist, wo natürlich

$$u_1(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(at+b)^2 - 32}{a}}\left\{\sinh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right)\right]\cosh k +\right.$$
$$\left. + \cosh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right)\right]\sinh k\right\},$$
$$v_1(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(at+b)^2 - 32}{a}}\left\{\sinh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right)\right]\sinh k +\right.$$
$$\left. + \cosh\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}}\right)\right]\cosh k\right\}.$$

In [4] wurde ein vollständiges Phasensystem der ersten hyperbolischen Phase α von (Q) mit der Bezeichnung $[\alpha]$ definiert.

Satz 5.

Es sei α eine beliebige primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{q_l}$, $l = 1{,}2$, im Intervall j_l. Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_l}$, $l = 1{,}2$, bildet in Interval j_l ein vollständiges Phasensystem $[\alpha]$ der ersten hyperbolischen Phase α

von (Q) mit dem Träger q_l. Jede Phase dieses vollständigen Phasensystems $[\alpha]$ ist im Intervall j_l eine wachsende Funktion.

Beweis. Es sei α_1 eine beliebige primitive Funktion zu $\sqrt{q_l}$, $l = 1{,}2$, im Intervall j_l. Dann gibt es eine Konstante $k \in \mathbf{R}$ so, daß für alle $t \in j_l$ die Beziehung von (8) gilt. Da α_1 die erste hyperbolische Phase im j_l von (Q) mit der Eigenschaft (8) ist, dann nach [4] $\alpha_1 \in [\alpha]$. Umgekehrt, für jede erste hyperbolische Phase $\alpha_1 \in [\alpha]$ im j_l von (Q) gibt es eine Konstante $k_1 \in \mathbf{R}$, für die (8) im j_l gilt. Folglich α_1 ist in diesem Intervall eine primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{q_l}$. Ferner für jede $\alpha_1 \in [\alpha]$ gilt $\alpha'(t) = \sqrt{q_l(t)} > 0$, $t \in j_l$, $l = 1{,}2$, so daß α_1 im Intervall j_l notwendig wachsend ist.

Bemerkung 3.

Es ist klar, daß im vollständigen Phasensystem für jede Zahl $t_0 \in j_l$ genau eine erste hyperbolische Phase α_1 von (Q) mit dem Träger q_l, $l = 1{,}2$, existiert. Für diese gilt $\alpha_1(t_0) = 0$.

In [1], [3] wurde erste hyperbolische Hauptphase und rechtsseitige (linksseitige) hyperbolische Nullphase der Differentigleichung (Q) eingeführt. Von diesem Gesichtspunkt aus werden wir uns nun mit der Differentialgleichung (Q) und dies mit dem Träger q_l, $l = 1{,}2$, befassen.

Lemma 1.

Jede primitive Funktion α zur Funktion $\sqrt{q_1}$ ist im Intervall $\left(-\infty, -\frac{c}{2\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{c}{2\sqrt{2}}, \infty\right)$, $c \in \mathbf{R}$, eine erste hyperbolische Hauptphase von (Q) mit dem Träger q_1.

Beweis. Eine leichte Rechnung ergibt, daß für $t \in \left(-\infty, -\frac{c}{2\sqrt{2}}\right)$

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |2\sqrt{2}t + c| + k, \qquad k \in \mathbf{R},$$

gilt

$$\begin{aligned} &\alpha'(t) = \frac{1}{|2\sqrt{2}t + c|} > 0, \qquad \operatorname{sgn} \alpha'(t) = 1, \\ &\lim_{t \to -\infty} \alpha(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to \left(-\frac{c}{2\sqrt{2}}\right)-} \alpha(t) = \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Analog, für $t \in \left(-\frac{c}{2\sqrt{2}}, \infty\right)$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln (2\sqrt{2}t + c) + k, \qquad k \in \mathbf{R},$$

gilt

$$\alpha'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2t} + c} > 0, \qquad \operatorname{sgn} \alpha'(t) = 1,$$
$$\lim_{t \to \left(-\frac{c}{2\sqrt{2}}\right)+} \alpha(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty. \tag{10}$$

Aus Satz 2 und aus den Beziehungen (9), (10) ergibt sich sofort für die Funktion α das nach [6] geforderte Resultat.

Lemma 2.

Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_1}$ im Intervall $\left(-\infty, -\frac{c}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\text{im Intervall } \left(-\frac{c}{2\sqrt{2}}, \infty\right)\right)$ bildet ein vollständiges Phasensystem einer ersten hyperbolischen Hauptphase

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln |2\sqrt{2t} + c| \tag{11}$$

$$\left(\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln (2\sqrt{2t} + c)\right) \tag{12}$$

der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_1.

Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_1}$ im Intervall $\left(-\infty, -\frac{1+c}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\text{im Intervall } \left(-\frac{1+c}{2\sqrt{2}}, -\frac{c}{2\sqrt{2}}\right)\right)$, $c \in \mathbf{R}$, bildet ein vollständiges Phasensystem der rechtsseitigen (linksseitigen) hyperbolischen Nullphase (11) von (Q) mit dem Träger q_1. Die menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_1}$ im Intervall $\left(-\frac{c}{2\sqrt{2}}, \frac{1-c}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\text{im Intervall } \left(\frac{1-c}{2\sqrt{2}}, \infty\right)\right)$, $c \in \mathbf{R}$, bildet ein vollständiges Phasensystem der rechtsseitigen (linksseitigen) hyperbolischen Nullphase (12) von (Q) mit dem Träger q_1.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Lemma 1 und Satz 5. Alle weiteren lassen sich beweisen wenn man bedenkt, daß jede Funktion (11), (12) bei Beachtung der Eigenschaften (9), (10) und in Bezug darauf, daß

$$\lim_{t \to \left(-\frac{1+c}{2\sqrt{2}}\right)} \alpha(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \frac{1-c}{2\sqrt{2}}} \alpha(t) = 0,$$

im zugehörigen Intervall die rechtsseitige (linksseitige) hyperbolische Nullphase der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_1 ist, für welche $\alpha'(t) = \sqrt{q_1(t)}$ gilt, so daß wieder Satz 4 anwendbar ist.

Lemma 3.

Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_2}$ im Intervall $\left(-\infty, -\frac{4\sqrt{2}+b}{a}\right)$, $a > 0$, $\left(\text{im Intervall } \left(-\infty, \frac{4\sqrt{2}-b}{a}\right), a < 0\right)$ bildet ein vollständiges Phasensystem der linksseitigen hyperbolischen Nullphase

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}} \right), \tag{13}$$

$$\left(\alpha(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}} \right) \right), \tag{14}$$

von (Q) mit dem Träger q_2.

Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_2}$ im Intervall $\left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}, \frac{4\sqrt{2}-b}{a} \right)$, $a > 0$, $\left(\text{im Intervall} \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}, -\frac{4\sqrt{2}+b}{a} \right), a < 0 \right)$ bildet ein vollständiges Phasensystem der ersten hyperbolischen Hauptphase

$$\alpha(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}} \right|, \tag{15}$$

$$\left(\alpha(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{at + b - 4\sqrt{2}}{at + b + 4\sqrt{2}} \right| \right), \tag{16}$$

von (Q) mit dem Träger q_2.

Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_2}$ im Intervall $\left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}, \infty \right)$, $a > 0$, $\left(\text{im Intervall} \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}, \infty \right), a < 0 \right)$ bildet ein vollständiges Phasensystem der rechtsseitigen hyperbolischen Nullphase (13), ((14)) von (Q) mit dem Träger q_2.

Die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_2}$ im Intervall $\left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}, -\frac{b}{a} \right)$, $a > 0$, $\left(\text{im Intervall} \left(-\frac{b}{a}, \frac{4\sqrt{2}-b}{a} \right), a > 0 \right)$ bildet im vollständiges Phasensystem der rechtsseitigen (linksseitigen) hyperbolischen Nullphase (15) und die Menge aller primitiven Funktionen zur Funktion $\sqrt{q_2}$ im Intervall $\left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}, -\frac{b}{a} \right)$, $a < 0$, $\left(\text{im Intervall} \left(-\frac{b}{a}, -\frac{4\sqrt{2}+b}{a} \right), a < 0 \right)$ bildet ein vollständiges Phasensystem der rechtsseitigen (linksseitigen) hyperbolischen Nullphase (16) von (Q) mit dem Träger q_2.

Beweis. Bezeichnen wir für $a > 0$:

$$j_1 = \left(-\infty, -\frac{4\sqrt{2}+b}{a} \right), \quad j_2 = \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}, \frac{4\sqrt{2}-b}{a} \right),$$
$$j_3 = \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}, \infty \right);$$

für $a < 0$:

$$j_1 = \left(-\infty, \frac{4\sqrt{2}+b}{a} \right), \quad j_2 = \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}, -\frac{4\sqrt{2}+b}{a} \right),$$
$$j_3 = \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}, \infty \right).$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeiten, daß jede Funktion (13), (14), (15), (16) im entsprechenden Intervall eine primitive Funktion zur Funktion $\sqrt{q_2}$ darstellt. Also es gilt

$$\alpha'(t) = \sqrt{q_2(t)}. \tag{17}$$

Eine leichte Rechnung ergibt für die Funktion α aus (13) bei $a > 0$, $t \in j_l$, $l = 1, 3$,

$$\alpha'(t) = \frac{4a}{(at + b)^2 - 32} > 0, \qquad \operatorname{sgn} \alpha'(t) = 1, \tag{18}$$

$$\lim_{t \to -\infty} \alpha(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}\right)-} \alpha(t) = \infty, \tag{19}$$

$$\lim_{t \to \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}\right)+} \alpha(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 0. \tag{20}$$

Für die Funktion α aus (15) bei $a > 0$, $t \in j_2$, erhalten wir

$$\alpha'(t) = \frac{4a}{|(at + b)^2 - 32|} > 0, \qquad \operatorname{sgn} \alpha'(t) = 1, \tag{21}$$

$$\lim_{t \to \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}\right)+} \alpha(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}\right)-} \alpha(t) = \infty.$$

Analog läßt sich für die Funktion α aus (14) für den Fall $a < 0$, $t \in j_l$, $l = 1,3$, berechnen, daß

$$\alpha'(t) = \frac{4|a|}{(at + b)^2 - 32} > 0, \qquad \operatorname{sgn} \alpha'(t) = 1, \qquad \lim_{t \to -\infty} \alpha(t) = 0,$$

$$\lim_{t \to \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}\right)-} \alpha(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}\right)+} \alpha(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = 0.$$

Tritt der Fall $a < 0$, $t \in j_2$ ein, so hat die Funktion α aus (16) die Ableitung

$$\alpha'(t) = \frac{4|a|}{|(at + b)^2 - 32|} > 0, \qquad \operatorname{sgn} \alpha'(t) = 1$$

und ferner

$$\lim_{t \to \left(\frac{4\sqrt{2}-b}{a}\right)+} \alpha(t) = -\infty, \qquad \lim_{t \to \left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}\right)-} \alpha(t) = \infty.$$

Aus der Beziehungen (17), (18), (19), Satz 5 (aus den Beziehungen (17), (21), Satz 5) läßt sich die geforderte Behauptung für die Funktion α aus (13) (für die Funktion α aus (18)) in den entsprechenden Intervallen j_1, $a > 0$, (j_2, $a < 0$) ableiten. Bei den übrigen Intervallen ist der Beweis analog. Wir beschränken uns im Beweis den letzten Teiles vom Lemma 3 auf das Intervall $\left(-\frac{4\sqrt{2}+b}{a}, -\frac{b}{a}\right)$, $a > 0$, denn für die anderen Intervalle verläuft der Beweis vollkommen analog. Da für die Funktion α aus (15) im betrachteten Intervall (17) gilt, $\lim_{t \to -\frac{b}{a}} \alpha(t) = 0$, so stellt die Funktion α, nach (21), Satz 2, eine rechtsseitige hyperbolische Nullphase der Differentialgleichung (Q) mit dem Träger q_2 dar. Dann genügt es schon den Satz 5 anzuwenden.

LITERATUR

[1] Blaško, R., Háčik, M.: *Lineárne homogénne diferenciálne rovnice druhého rádu rýdzo diskonjugované vzhľadom na derivácie.* Matem. čas. 22 (1972), No. 4, 323—331.

[2] Kamke, E.: *Differentialgleichungem. Lösungsmethoden und Lösungen I.* Leipzig, 1959 (ruský překlad Moskva, 1956).

[3] Krbila, J.: *Základy teórie hyperbolickdch fáz diferenciálnej rovnice $y'' = q(t)\,y$.* Kandidátská dizertačná práca.

[4] Krbila, J.: *Algebraická štruktúra množiny hlavných hyperbolických fáz diferenciálnych rovníc $y'' = q(t)\,y$ v intervale $(-\infty, \infty)$.* Matem. čas. 20 (1970), No. 3, 195—202.

[5] Laitoch, M.: *Homogene lineare zu sich selbst begleitende Differentialgleichung zweiter Ordnung.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 33, 1971, 61—72.

[6] Zeman, J.: *Über eine Anwendung der Phasentheorie.* Acta Univ. Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 53, 1977, 137—140.

SOUHRN

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE JACOBIHO TYPU S HYPERBOLICKÝMI FÁZEMI ROVNÝMI PRIMITIVNÍ FUNKCI KE DRUHÉ ODMOCNINĚ Z JEJÍHO NOSIČE

JOSEF HOŠEK

Práce obsahuje řešení problému nalézti všechny funkce Q spojité a kladné v intervalu j takové, aby první hyperbolická fáze některé báze neoscilatorické diferenciální rovnice

$$y'' + Q(t)\,y = 0$$

($Q(t) > 0$ pro $t \in j$) byla právě rovna v j některé primitivní funkci k funkci $\sqrt{Q}$.

Řešení tohoto problému je úzce spjaté s existencí kladných řešení nelineární diferenciální rovnice 2. řádu

$$4z''z - 5z'^2 - 32z^3 = 0,$$

která lze explicitně vyjádřit v podstatě ve tvaru

$$q_1(t) = \frac{1}{(2\sqrt{2}t + c)^2}$$

resp.

$$q_2(t) = \frac{16a^2}{[(at + b)^2 - 32]^2},$$

kde $a \neq 0$, b, c jsou libovolné reálné konstanty.

РЕЗЮМЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ЯКОБИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФАЗАМИ РАВНЫМИ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ К КОРНИ ОТ ЕГО НОСИТЕЛЯ

ИОСИФ ГОШЕК

Работа содержит решение проблемы найти все функции Q непрерывные и положительные в интервале j и такие, чтобы первая гиперболическая фаза некоторого базиса неколеблющегося дифференциального уравнения

$$y'' + Q(t)\,y = 0$$

($Q(t) > 0$ для $t \in j$) равнялась в j как раз некоторой первообразной функции по отношению к функции $\sqrt{Q}$.

Решение этой проблемы очень тесно связано с существованием положительных решений нелинейного дифференциального уравнения 2-го рода

$$4z''z - 5z'^2 - 32z^3 = 0,$$

которые можно выразить в явном виде по существу следующим образом

$$q_1(t) = \frac{1}{(2\sqrt{2}t + c)^2}$$

или

$$q_2(t) = \frac{16a^2}{[(at + b)^2 - 32]^2},$$

где $a \neq 0$, b, c, произвольные вещественные постоянные.