Ján Futák

Über die Beschränktheit und die Existenz von Lösungen der Differentialgleichung 4. Ordnung mit nacheilendem Argument

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 17 (1978), No. 1, 77--84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120070

1978 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 57

ÜBER DIE BESCHRÄNKTHEIT UND DIE EXISTENZ VON LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG 4. ORDNUNG MIT NACHEILENDEM ARGUMENT

JÁN FUTÁK, Žilina

(*Eingelangt am 14. März 1977*)

In der Arbeit [4] untersuchte Ráb die Beschränktheit von Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 3. Ordnung. Teilweise wurden diese Ergebnisse von Marušiak in [3] für die lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit nacheilendem Argument verallgemeinert. Im ersten Teil dieser Arbeit werden einige Ergebnisse von [4] und [3] für die Differentialgleichung (1′) verallgemeinert. Im zweiten Teil wird das Existenzproblem von der Lösung der Anfangsaufgabe für die Differentialgleichung (1) gelöst. Im Satz 3 werden einige Elemente des Beweises aus [1], Satz 1 angewendet.

Betrachten wir die Differentialgleichung 4. Ordnung mit nacheilendem Argument

$$y^{(4)}(t) + [p(t)\, y'(t)]' + \sum_{i=0}^{n} q_i(t)\, y[h_i(t)] = f(t, y(t)). \tag{1}$$

In der ganzen Arbeit werden wir voraussetzen, dass die Funktionen $q_i(t)$, $h_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ aus der Klasse $C_0(J)$ sind, wobei $h_0(t) = t$, $h_i(t) \leqq t$, $i = 1, 2, \ldots, n$ und $p(t) \in C_2(J)$, wo $J \equiv \langle t_0, \infty)$ und die Funktion $f(t, u) \in C_0(D)$ ist, wo $D = J \times R$.

Unter der grundlegenden Anfangsaufgabe (im Weiteren nur Anfangsaufgabe) werden wir folgende Aufgabe verstehen:

Es sei $\Phi(t)$ eine auf der Anfangsmenge

$$E_{t_0} = \bigcup_{i=0}^{n} E_{t_0}^i, \qquad \text{wo} \qquad E_{t_0}^i = (\inf_{t \in J} h_i(t), t_0\rangle,$$

definierte und stetige Funktion und es seien $y_0^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ beliebige reelle Zahlen. Wir suchen die Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung (1) am Intervall J, welche die Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = \Phi(t_0) = y_0, \qquad y^{(k)}(t_0 +) = y_0^{(k)}, \qquad k = 1, 2, 3,$$
$$y(t) \equiv \Phi(t), \qquad t \in E_{t_0}, \tag{2}$$

erfüllt.

Es ist bekannt, (z. B. in [2]), dass wenn $z_0(t)$, $z_1(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$z''(t) + p(t)\,z(t) = 0 \tag{3}$$

ist, dann bilden die Funktionen $z_0^3(t)$, $z_0^2(t)\,z_1(t)$, $z_0(t)\,z_1^2(t)$, $z_1^3(t)$, ein Fundamentalsystem von Lösungen der iterierten Differentialgleichung

$$x^{(4)}(t) + 10p(t)\,x''(t) + 10p'(t)\,x'(t) + 3[3p^2(t) + p''(t)]\,x(t) = 0. \tag{4}$$

Es sei $q_0(t) = \frac{9}{10}p^2(t) + \frac{3}{10}p''(t) + \bar{q}_0(t)$ und $q_i(t) = \bar{q}_i(t)$ für $i = 1, 2, \dots, n$.

Die Differentialgleichung (1) können wir dann in der Form

$$y^{(4)}(t) + [p(t)\,y'(t)]' + \left[\frac{9}{10}\,p^2(t) + \frac{3}{10}\,p''(t)\right]y(t) =$$

$$= f(t, y(t)) - \sum_{i=0}^{n} \bar{q}_i(t)\,y[h_i(t)], \tag{5}$$

schreiben. Wenn $x_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$x^{(4)}(t) + [p(t)\,x'(t)]' + \left[\frac{9}{10}\,p^2(t) + \frac{3}{10}\,p''(t)\right]x(t) = 0 \tag{6}$$

ist, dann hat die Lösung der Anfangsaufgabe (5), (2) durch Anwendung der Variation der Konstanten folgende Form

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,\frac{W(t, s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{n} \frac{W(t, s)}{W(s)}\,\bar{q}_i(s)\,y[h_i(s)]\,\mathrm{d}s, \tag{7}$$

wo $x(t) = \sum_{k=0}^{3} C_k x_k(t)$, C_k, $k = 0, 1, 2, 3$ solche Konstanten sind, dass $x(t)$ die Bedingungen

$$x(t_0) = y_0, \qquad x^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}, \qquad k = 1, 2, 3, \text{ erfüllt,} \tag{2'}$$

$W(t)$ ist der Wronskian der Lösungen $x_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$ und

$$W(t, s) = \begin{vmatrix} x_0(s), & x_1(s), & x_2(s), & x_3(s) \\ x_0'(s), & x_1'(s), & x_2'(s), & x_3'(s) \\ x_0''(s), & x_1''(s), & x_2''(s), & x_3''(s) \\ x_0(t), & x_1(t), & x_2(t), & x_3(t) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Für $z_0(t)$, $z_1(t)$ gelte

$$z_j^{(k)}(t_0) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \qquad j, k = 0, 1.$$

Wenn wir $x_0(t) = z_0^3(t)$, $x_1(t) = z_0^2(t)\,z_1(t)$, $x_2(t) = z_0(t)\,z_1^2(t)$, $x_3(t) = z_1^3(t)$ schreiben, dann ist mit Rücksicht auf die Liouvillesche Formel $W(t) = 12$. Nach längerer Berechnung erhalten wir:

$$W(t, s) = 2 \begin{vmatrix} z_0^3(s), & z_1^3(s) \\ z_0^3(t), & z_1^3(t) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Bezeichnen wir

$$C = \sum_{k=0}^{3} | C_k |.$$

I.

In diesem Teil werden wir die Differentialgleichung (1) untersuchen, für den Fall, dass $f(t, y(t)) \equiv g(t)$ ist. Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + [p(t)\, y'(t)]' + \sum_{i=0}^{n} q_i(t)\, y[h_i(t)] = g(t). \tag{1'}$$

Mit Rücksicht auf (9) und darauf, dass $W(t) = 12$, können wir die Lösung (7) der Anfangsaufgabe (1'), (2) in folgender Form schreiben:

$$y(t) = C_0 z_0^3(t) + C_1 z_0^2(t)\, z_1(t) + C_2 z_0(t)\, z_1^2(t) + C_3 z_1^3(t) +$$
$$+ \frac{1}{6} \int_{t_0}^{t} \begin{vmatrix} z_0^3(s), & z_1^3(s) \\ z_0^3(t), & z_1^3(t) \end{vmatrix} g(s)\, ds - \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n} \int_{t_0}^{t} \begin{vmatrix} z_0^3(s), & z_1^3(s) \\ z_0^3(t), & z_1^3(t) \end{vmatrix} \bar{q}_i(s)\, y[h_i(s)]\, ds. \tag{10}$$

Satz 1. *Es seien alle Lösungen $z(t)$ der Differentialgleichung* (3) *im Intervall J beschränkt, $\Phi(t)$ sei beschränkt auf E_{t_0} und*

$$\int_{t_0}^{\infty} | g(t) |\, dt < \infty, \qquad \int_{t_0}^{\infty} | q_i(t) |\, dt < \infty, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Dann ist jede Lösung $y(t)$ der Anfangsaufgabe (1'), (2) *auf J beschränkt.*

Beweis. Wenn die Funktionen $z_0(t)$, $z_1(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (3) bilden, und am Intervall J beschränkt sind, dann existiert eine solche Konstante $m > 0$ und eine Zahl $t_1 \in J$, dass für $t \geqq t_1$

$$| z_0(t) | < m, \qquad | z_1(t) | < m,$$

$\int_{t_1}^{\infty} | g(t) |\, dt \leqq \dfrac{1}{m^6}$ und $\int_{t_1}^{\infty} | \bar{q}_i(t) |\, dt \leqq \dfrac{2}{(n+1)\, m^6}$, gilt.

Wenn wir $\alpha(t) \quad \max\limits_{s \in E_{t_1} \cup \langle t_1, t \rangle} | y(s) | < \infty$ bezeichnen, erhalten wir aus (10)

$$| y(t) | \leqq m^3 C + \frac{1}{3} + \frac{2m^6}{3} \frac{(n+1)}{(n+1)\, m^6}\, \alpha(t) = m^3 C + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, \alpha(t),$$

für $t \in E_{t_1} \cup \langle t_1, t \rangle$.

Aus der letzten Ungleichheit erhalten wir weiter

$$\alpha(t) < m^3 C + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha(t),$$

woraus weiter folgt, dass

$$|y(t)| \leqq \alpha(t) < 3m^3 C + 1.$$

Damit ist die Beschränktheit der Lösung $y(t)$ der Anfangsaufgabe (1'), (2) auf $E_{t_1} \cup \cup \langle t_1, t \rangle$ bewiesen. Aus der Stetigheit der Funktion $y(t)$ auf J, folgt weiter die Beschränktheit jeder Lösung $y(t)$ der Anfangsaufgabe (1'), (2) am ganzen Intervall J.

Satz 2. *Es gelte für jede Losung $z(t)$ der Differentialgleichung* (3) $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ *und zusätzlich sollen die Voraussetzungen des Satzes* 1 *gelten. Dann gilt fur jede Lösung $y(t)$ der Anfangsaufgabe* (1'), (2): $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Beweis. Mit Rücksicht darauf, dass $z(t) \to 0$ für $t \to \infty$ ist und mit Rücksicht auf die Voraussetzungen des Satzes 1, existiert eine Zahl $t_1 \geqq t_0$ und solche Konstanten $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ dass

$$|z_0(s)| < m_1, \qquad |z_1(s)| < m_1, \qquad |y[h_i(s)]| < m_2,$$

$$\int_{t_1}^{\infty} |g(s)| \, ds < m_2, \qquad \int_{t_1}^{\infty} |\bar{q}_i(s)| \, ds < \frac{m_2}{(n+1)}, \qquad s \geqq t_1.$$

Bei Anwendung der letzten Ungleichheiten folgt aus der Formel des Typus (10) die Ungleichheit:

$$|y(t)| \leqq |C_0| \, |z_0(t)|^3 + |C_1| \, z_0^2(t) \, |z_1(t)| + |C_2| \, |z_0(t)| \, z_1^2(t) + |C_3| \, |z_1(t)|^3 +$$
$$+ \frac{1}{6} m_1^3 m_2 (|z_0(t)|^3 + |z_1(t)|^3) + \frac{1}{6} m_1^3 m_2^2 (|z_0(t)|^3 + |z_1(t)|^3),$$

$t \geqq t_1$.

Mit Rücksicht darauf, dass $\lim_{t\to\infty} z_0(t) = \lim_{t\to\infty} z_1(t) = 0$, gilt aus der letzten Ungleichheit $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, was wir beweisen wollten.

Bemerkung. Dazu, dass für jede Lösung $z(t)$ der Differentialgleichung (3) $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ gelte, genügt, dass

$$p(t) > 0, \qquad p'(t) \geqq d > 0 \qquad \text{für } t \in J \qquad \text{und} \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{p(t)} = +\infty.$$

II.

In diesem Teil werden wir die Differentialgleichung (1) untersuchen.

Satz 3. *Es sei $z_0(t)$, $z_1(t)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung* (3) *und es soll eine solche Konstante $m > 0$ existieren, dass*

$$| z_0(t) | < m, \qquad | z_1(t) | < m, \qquad t \in J, \tag{12}$$

gilt.

Es sei $\Phi(t)$ beschränkt auf E_{t_0} und es sei

$$\int_{t_0}^{\infty} | \bar{q}_i(t) | \, dt \leqq \frac{1}{(n+1)\, m^6}, \qquad t \in J, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Setzen wir überdies voraus, dass $(t, u) \in D$

$$| f(t, u) | \leqq \psi(t) \, | u |, \tag{14}$$

gilt, wo $\psi(t) \in C_0(J)$, $\psi(t) \geqq 0$, $t \in J$ und

$$\int_{t_0}^{\infty} \psi(t) \, dt \leqq \frac{1}{m^6}. \tag{15}$$

Ferner $x(t)$ sei die Lösung der Anfangsaufgabe (6), (2'). *Dann existiert eine Lösung $y(t)$ der Anfangsaufgabe* (1), (2) *am Intervall J, für welche*

$$\frac{| y(t) - x(t) |}{L} \leqq \frac{2}{3}, \qquad t \in J, \qquad \textit{gilt},$$

wo $L = 3Cm^3 + \sup_{t \in E_{t_0}} | \Phi(t) |$ ist. C ist bestimmt wie früher.

Beweis. Y sei ein Raum von stetigen Funktionen $y(t)$, welche auf $E_{t_0} \cup J$ definiert sind. Es sei $\{I_l\}_{l=1}^{\infty}$ eine Folge solcher kompakter Intervalle, dass $\bigcup_{l=1}^{\infty} I_l = J$, wo $I_l = \langle t_0, t_1 \rangle$ und für jedes l gilt $I_l \subset I_{l+1} \subset J$. Definieren wir im Raum Y ein System von Halbnormen:

$$R_l(y) = \max_{t \in E_{t_0} \cup \langle t_0, t_1 \rangle} | y(t) |. \tag{16}$$

Dieses System von Halbnormen bildet auf Y eine konvexe Topologie und deshalb ist der Raum Y lokal konvex (Siehe z. B. [5] S. 149). Betrachten wir die Teilmenge $F \subset Y$ welche durch die Beziehung

$$F = \{ y \in Y, | y(t) | \leqq L, t \in E_{t_0} \cup J \},$$

definiert ist.

Definieren wir für $y \in F$ den Operator T wie folgt:

$$(\mathrm{T}y)(t) = \Phi(t), \qquad t \in E_{t_0}, \tag{17}$$

$$(\mathrm{T}y)(t) = x(t) + \frac{1}{6} \int_{t_0}^{t} [z_0^3(s) \, z_1^3(t) - z_0^3(t) \, z_1^3(s)] \, f(s, y(s)) \, ds -$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} [z_0^3(s) \, z_1^3(t) - z_0^3(t) \, z_1^3(s)] \, \bar{q}_i(s) \, y[h_i(s)] \, ds, \qquad t \in J.$$

a) Es ist ersichtlich, dass F eine konvexe und abgeschlossene Menge ist.

b) Wir zeigen, dass $\mathrm{T}F \subset F$.

Für $t \in E_{t_0}$ gilt $|(\mathrm{T}y)(t)| = |\Phi(t)| \leqq L$.

Für $t \in J$ aus (17) erhalten wir mit Rücksicht auf die Voraussetzungen des Satzes:

$$|\mathrm{T}y(t)| \leqq |x(t)| + \frac{1}{6}\int_{t_0}^{t} [z_0^3(s)\, z_1^3(t) - z_0^3(t)\, z_1^3(s)]\, |f(s, y(s))|\, ds +$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n}\int_{t_0}^{t} [z_0^3(s)\, z_1^3(t) - z_0^3(t)\, z_1^3(s)]\, |\bar{q}_i(s)|\, |y[h_i(s)]|\, ds \leqq$$
$$\leqq |C_0|\, |z_0(t)|^3 + |C_1|\, z_0^2(t)\, |z_1(t)| + |C_2|\, |z_0(t)|\, z_1^2(t) + |C_3|\, |z_1(t)|^3 +$$
$$+ \frac{m^6}{3}\int_{t_0}^{t} \psi(s)\, |y(s)|\, ds + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} m^6 \int_{t_0}^{t} |\bar{q}_i(s)|\, |y[h_i(s)]|\, ds \leqq$$
$$\leqq Cm^3 + \frac{1}{3}L + \frac{1}{3}L \leqq L.$$

Also $\mathrm{T}F \subset F$.

c) Wir zeigen, dass der Operator T stetig ist.

Es sei $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, $y_j \in F$ eine Folge, welche auf jedem kompakten Teilintervall aus J zu $y \in F$ gleichmässig konvergiert. Es sei $I_l \equiv \langle t_0, t_l \rangle$ ein beliebiges kompaktes Intervall aus J und $\varepsilon > 0$ sei gegeben. Wir zeigen, dass für $t \in I_l$, $(\mathrm{T}y_j)(t) \rightrightarrows (\mathrm{T}y)(t)$. Da die Funktion f stetig ist und die Folge $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ gleichmässig zu $y(t)$ auf I_l konvergiert, existiert ein solches $\delta > 0$, dass für $j \geqq \delta$

$$|y_j[h_i(t)] - y[h_i(t)]| < \varepsilon \tag{18}$$

und

$$|f(t, y_j(t)) - f(t, y(t))| < \frac{2}{m^6(t_l - t_0)}\varepsilon, \qquad t \in I_l,$$

gilt.

Aus (17) mit Rücksicht auf (18) und auf die Voraussetzungen des Satzes für $t \in I_l$ und $j \geqq \delta$ erhalten wir:

$$|(\mathrm{T}y_j)(t) - (\mathrm{T}y)(t)| \leqq \frac{1}{6}\int_{t_0}^{t} [z_0^3(s)\, z_1^3(t) - z_0^3(t)\, z_1^3(s)]\, |f(s, y_j(s)) -$$
$$- f(s, y(s))|\, ds + \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n}\int_{t_0}^{t} [z_0^3(s)\, z_1^3(t) - z_0^3(t)\, z_1^3(s)] \times$$
$$\times |\bar{q}_i(s)|\, |y_j[h_i(s)] - y[h_i(s)]|\, ds < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Deshalb ist der Operator T stetig auf F.

d) Wir zeigen, dass $\overline{\mathrm{T}F}$ eine kompakte Mange ist.

Wenn wir (17) differenzieren, erhalten wir für $t \in J$ die Abschätzung:

$$| (\mathrm{T}y)'(t) | \leqq | x'(t) | + \frac{1}{2} z_1^2(t) | z_1'(t) | L \int_{t_0}^{t} | z_0^3(s) | \psi(s) \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} z_0^2(t) | z_0'(t) | L \int_{t_0}^{t} | z_1^3(s) | \psi(s) \, ds + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} z_1^2(t) | z_1'(t) | L \int_{t_0}^{t} | z_0^3(s) | \; | \bar{q}_i(s) | \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} z_0^2(t) | z_0'(t) | L \int_{t_0}^{t} | z_1^3(s) | \; | \bar{q}_i(s) | \, ds.$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichheit ist in I_l durch eine Konstante beschränkt, welche von $y(t)$ unabhängig ist. Deshalb ist $(\mathrm{T}y)'(t)$ gleichmässig beschränkt. Damit ist die gleichgradige Stetigkeit von $(\mathrm{T}y)(t)$ gesichert, woraus folgt, dass $\overline{\mathrm{T}F}$ eine kompakte Menge ist.

Da a) – d) gilt, können wir den Tichonovschen Fixpunktsatz für den Operator T anwenden. Der Operator T hat also mindestens einen Fixpunkt $y \in F$ und es gilt

$$(\mathrm{T}y)(t) = y(t). \tag{19}$$

Deshalb ist $y(t) \in F$ die Lösung der Gleichung (1) auf J. Mit Rücksicht auf die Voraussetzungen des Satzes und auf (19) erhalten wir aus (17):

$$\frac{| y(t) - x(t) |}{L} \leqq \frac{2}{3}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Ähnlich wie Satz 3 beweisen wir

Satz 4. *Es sollen die Voraussetzungen des Satzes 3 gelten und anstelle von* (14) *und* (15) *gelte für die Funktion* $f(t, u)$*:*

1. $f(t, u)$ *ist nichtnegativ und nichtfallend in* u, $0 \leqq u < \infty$, *bei jedem festen* $t \in J$,
2. *für jede Zahl* $a > 0$ *ist*

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t, a) \, dt \leqq \frac{a}{m^6}, \qquad t \in J.$$

Dann existiert eine Lösung $y(t)$ der Anfangsaufgabe (1), (2) am Intervall J.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Hallam T. G.: *Asymptotic relationship between solution of two second order differential equations.* Anal. Polon. Math. 24, 1971, p. 295—300.

[2] Hustý Z.: *Asymptotické vlastnosti integrálov homogénnej lin. diferenciálnej rovnice 4-tého rádu.* Čas. pro pěst. mat. 1, 81, (1958).

[3] Marušiak P.: *On monotony of solutions of n-th order delay differential equation.* Sborník prací VŠP a VÚD, č. 44, 1971, p. 67—74.

[4] Ráb M.: *Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung.* Spisy Přír. fak. Univ. Brno, 1956/59, č. 374.
[5] Taylor A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy.* Académia Praha 1973.

Adresse des Autors:
Ján Futák, Katedra matematiky, Fakulta Strojno-elektrotechnická VŠD, Žilina, Marxa—Engelsa 25.

SOUHRN

O OHRANIČENOSTI A EXISTENCII RIEŠENIA DIFERENCIÁLNEJ ROVNICE 4. RÁDU S ONESKORENÝM ARGUMENTOM

JÁN FUTÁK

Práca je rozdelená na dve časti. V prvej časti sú uvedené postačujúce podmienky pre to, aby pre každé riešenie $y(t)$ začiatočnej úlohy (1'), (2), platilo: $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. V druhej časti práce je metódou pevného bodu, dokázaná existencia riešenia $y(t)$ začiatočnej úlohy (1), (2) na intervale $J = \langle t_0, \infty)$.

РЕЗЮМЕ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 4-ОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

ЯН ФУТАК

Работа разделена в две части. В первой части приведены достаточные условия для того, чтобы для всех решений $y(t)$ начальной задачи (1'), (2) было справедливо: $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Во второй части, методом неподвижной точки доказано существование решения $y(t)$ начальной задачи (1), (2) на промежутке $J = \langle t_0, \infty)$.