Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Jindřich Palát

О преобразованиях первых интегралов двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 16 (1977), No. 1, 123--135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120057

1977 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 53

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

(*Поступило в редакцию 31. 3. 1976*)

Настоящая работа является естственным обобщением работы [1] и по существу отличается от нее тем, что рассматриваемые Эвклидовы пространства могут иметь разные размерности. В соответствии с этим получаются более общие теоремы, которые в случае одинаковой размерности рассматриваемых пространств совпадают с теоремами работы [1].

Доказательства теорем настоящей работы по существу не отличаются от доказательств теорем, приеєденных в работе [1], и поэтому они в большинстве случаев опускаются. Приводятся только доказательства тех теорем, которые с формальной точки зрения более отличаются от доказательств соответствующих теорем работы [1].

Заметим, наконец, что будем пользоваться обозначаниями и определениями, приведенными в работе [1].

1. На областях $o = \{z \in o_1, X' \in \mathrm{e_m}\}$, $j = \{u \in j_1, Y' \in \mathrm{e_n}\}$, где o_1, j_1 интервалы, $X' = (x_1, x_2, \dots, x_\mathrm{m})$, $Y' = (y_1, y_2, \dots, y_\mathrm{n})$, и $\mathrm{e_m}, \mathrm{e_n}$ Эвклидовы пространства соответственно размерности m, n, несодержающие начало координат, рассматриваются квазилинейные уравнения в частных производных 1-го порядка

$$\sum_{k=1}^{n \geqq 2} \left(a_{k1}(z)\, x_1 + \dots + a_{kn}(z)\, x_n\right) z_{X_k} = 1 \tag{I}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n \geqq 2} \left(b_{k1}(u)\, y_1 + \dots + b_{kn}(u)\, y_n\right) u_{Y_k} = 1, \tag{II}$$

где $a_{ik}(z)$, $b_{rs}(u)$, i, k = 1, 2, …, m, r, s = 1, 2, …, n, непрерывные функции на интервале o_1, j_1 соответственно и

$$z_{X_k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_m} \end{pmatrix}, \qquad u_{Y_k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Уравнениям (I), (II) соответствуют характеристические уравнения

$$(A) \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = A(z)\,X, \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = B(u)\,Y, \qquad (B)$$

где $A(z) = (a_{ik}(z))$ и $B(u) = (b_{rs}(u))$.

Так же, как и в работе [1] означает $u = r(z)$ функцию определенную на интервале o_1, обладающую непрерывной производной отличной от нуля, отображающей интервал o_1 на интервал j_1 ($j_1 = r(o_1)$) и точку $z_o \in o_1$ на точку

$$u_o \in j_1 \, (u_o = r(z_o)).$$

Функцию, определенную на j_1 и обратную к функции $u = r(z)$, обозначим $z = r^{-1}(u)$.

Далее означает $K(z)$ матрицу типа (m/n), которая является решением уравнения

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z} = A(z)\bar{K}(z) - K(z)\,B(r(z))\frac{\mathrm{d}r(z)}{\mathrm{d}z}, \qquad z \in j_1 \qquad (K_{\mathrm{mn}})$$

определенного на интервале o_1 и удовлетворяющее начальному условию $K(z_o) = K_o$. Это решение для $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ на интервале o_1 регулярно, если $|K_o| \neq 0$ и сингулярно, если $|K_o| = 0$. Если $K(z)$ регулярное решение, тогда обратная матрица $K^{-1}(z)$, $z = r^{-1}(u)$ удовлетворяет на интервале $j_1(j_1 = r(o_1))$ уравнению

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}}{\mathrm{d}u} = B(u)\,K(u) - \bar{K}(u)\,A(r^{-1}(u))\,\frac{\mathrm{d}r^{-1}(u)}{\mathrm{d}u}, \qquad u \in j_1 \qquad (\bar{K}_{\mathrm{nm}}),$$

где в общем случае $\bar{K}$ матрица типа (n/m) и ее ранг $\mathrm{h} = \min\,(\mathrm{m}, \mathrm{n})$.

2. Преобразование точек двух Эвклидовых пространств

Лемма 2.1. *Пусть Матрица $K_{\mathrm{n}}(K)$ является на интервале $j_1(o_1)$ решением уравнения $(\bar{K}_{\mathrm{nm}})$ $((K_{\mathrm{mn}}))$, определенное начальной матрицей $K_{\mathrm{no}}(K_o)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}(\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m})$.

Тогда существует на интервале $o_1(j_1)$ решение $K(K_{\mathrm{n}})$ уравнения (K_{mn}) (K_{nm}) такое, что $K(z)\,K_{\mathrm{n}}(r(z)) = E_{\mathrm{m}}$ $\quad (K_{\mathrm{n}}(u)\,K(r^{-1}(u)) = E_{\mathrm{n}})$.

Доказатеьство. Пусть $K_{\mathrm{n}}(u)$ решение уравнения (K_{nm}), определенное начальной матрицей K_{no} ранга $h = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$. Покажем, что можно выбрать матрицу K_o типа (m/n) такую, что $K_{\mathrm{no}}K_o = E_{\mathrm{m}}$. Действительно. Рассматривая матричное уравнение $K_{\text{по}}X = E_{\mathrm{m}}$, где искомая матрица X типа (m/n), видим, что ранг матрицы системы и расширенной системы одинаковые и поэтому в случае $\mathrm{h} = \mathrm{m} = \mathrm{n}$ существует единственное решение и в случае $\mathrm{h} = \mathrm{m} < \mathrm{n}$ бесконечно много решений. Пусть $K_{\text{о}}$ есть такое и $K(z)$ решение уравнения (K_{mn}), определенное этой начальной матрицей.

Рассмотрим сейчас произведение матриц $K(z)K_{\text{п}}(r(z))$, где K выше определенная матрица и вычислим его производную

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(K(z)\,K_{\text{п}}(r(z)) = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z}K_{\text{п}}(r(z)) + K(z)\,\frac{K_{\text{п}}\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z} = A(z)\,K(z)\,K_{\text{п}}(r) -$$

$$- K(z)\,B(r)\,K_{\text{п}}(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} + K(z)\,B(r)\,K_{\text{п}}(r)\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} - K(z)\,K_{\text{п}}(r)\,A(z)\,\frac{\mathrm{d}r^{-1}}{\mathrm{d}z}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} =$$

$$= A(z)\,K(z)\,K_{\text{п}}(r) - K(z)\,K_{\text{п}}(r)\,A(z).$$

Следовательно, произведение матриц $K(z)\;K_{\text{п}}(r(z))$ является решением уравнения

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = A(z)\,X - XA(z), \qquad z \in o_1,$$

причем значение $K(z_{\text{о}})\;K_{\text{п}}(r(z_{\text{о}})) = E_{\mathrm{m}}$. Но этому уравнению удовлетворяет также постоянное решение E_{m}. В силу односзначности получаем, что

$K(z)\;K_{\text{п}}(r(z)) = E_{\mathrm{m}},\; z \in o_1$.

Таким же образом доказывается вторая часть леммы.

Заметим, что для $\mathrm{h} = \mathrm{m} = \mathrm{n}$ $K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1}$ (см. [1]).

В дальнейшем будем без оговорки предполагать, что матрица $K(z)$ типа (m/n) $(K_{\text{п}}(u),\; K_{\text{л}}(u)$ типа $(\mathrm{n}/\mathrm{m}))$ ранга $h = min(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ означает решение уравнения $(K_{\mathrm{mn}})\,(\bar{K}_{\mathrm{nm}})$, определенное на интервале $o_1(j_1)$ и соответствующее функции $u = r(z)$ и начальному значению $K_{\text{о}}(K_{\text{по}},\, K_{\text{ло}})$.

Определение 2.1. В области j(o) определим преобразование $B(B_{\text{п}}, B_{\text{л}})$ до $(\mathrm{m}+1)\,((\mathrm{n}+1))$ – размерного пространства согласно следующих равенств:

$$\left(\begin{array}{l} z = r^{-1}(u),\, X = K(r^{-1}(u))\,Y, \\ u = r(z),\, Y = K_{\text{п}}(r(z))\,X, \text{ если } \mathrm{n} \geqq \mathrm{m}, \\ u = r(z),\, Y = K_{\text{л}}(r(z))\,X, \text{ если } \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}, \end{array}\right) \begin{array}{l} (B) \\ (B_{\text{п}}) \\ (B_{\text{л}}) \end{array}$$

$$\text{где для } \mathrm{n} = \mathrm{m}\; K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1} \text{ и } (B_{\text{п}}) = (B_{\text{л}}).$$

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $B(u, Y') = (Bu, |BY|') = (r^{-1}(u),\, |K(r^{-1}(u))\,Y|')$, $\bar{o} = \{z \in o_1,\; X' \in \mathrm{e}_{\mathrm{m}}\}$, $\bar{j} = \{u \in j_1,\; Y' \in \mathrm{e}_{\mathrm{m}}\}$, $= \{u \in j_1,\; Y' = (K_{\text{п}}(u)\,X)',\; X' \in \mathrm{e}_{\mathrm{m}}\}$ и $\tilde{o} = \{z \in o_1,\; X' = (K(z)\,Y)',\; Y' \in \mathrm{e}_{\mathrm{n}}\}$.

Теорема 2.1. *Пусть преобразование B определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} < \mathrm{m}, \mathrm{n}$.

Тогда B преобразует множество j в множество $\bar{o}$.

Теорема 2.2. *Пусть преобразование $B_{\text{п}}$ определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K_{\text{п}}(u)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$.

Тогда $B_{\text{п}}$ преобразует множество o просто на множество $\check{j} \subseteq j$, где $\check{j} = j$ если $\mathrm{m} = \mathrm{n}$.

Доказательство. Рассмотрим точку $(u_o, 0, \ldots, 0)$ $\bar{j}$ и уравнение $K_{\text{п}}(u_o)$ $X = 0(\mathrm{n}/1)$. Так как ранг матрицы $K_{\text{п}}(u_o)$ равен $\mathrm{m} = \mathrm{n}$, то это уравнение имеет только тривиальные решения $X = 0(m/1)$. Следовательно, не существуют точки $(z, X') \in o$, которые $B_{\text{п}}$ преобразовало бы на точку $(u, 0, \ldots, 0) \in \bar{o}$.

Пусть $\mathrm{h} = \mathrm{m} < \mathrm{n}$ и $(u_o, Y'_o) \in j$. Тогда уравнение $K_{\text{п}}(u_o)\, X = Y_o$ имеет или не имеет решение в зависимости от того, будет-ли ранги матрицы системы и матрицы расширенной одиннаковые. Если решение существует, то оно будет единственным. С другой стороны очевидно, что можно подобрать точку $Y'_o \in \mathrm{e_n}$ такую, что уравнение $K_{\text{п}}(u_o)\, X = Y_o$ решение не имеет.

Из всего вытекает, что $B_{\text{п}}$ преобразует множество о на множество $\check{j} = B_{\text{п}}(o) = \{u \in j_1, Y' = /K_{\text{п}}(u)\, X/', X' \in \mathrm{e_m}\}$.

Пусть $(z_1, X'_1) \neq (z_2, X'_2)$. Если $z_1 \neq z_2$, то $u_1 = r(z_1) \neq r(z_2) = u_2$ и если $X_1 \neq X_2$, то в силу регулярности матрицы $K_{\text{п}}$ имеем $K_{\text{п}}(u_o)\, X_1 \neq K_{\text{п}}(u_o)\, X_2$. Следовательно, если $(z_1, X'_1) \neq (z_2, X'_2)$, то $B_{\text{п}}(z_1, X'_1 \neq B_{\text{п}}(z_2, X'_2)$ и поэтому $B_{\text{п}}$ преобразование простое.

Утверждение теоремы в случае $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ вытекает из [1].

Теорема 2.3. *Пусть преобразование B определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{m} < \mathrm{n}$ $(\mathrm{h} = \mathrm{m} = \mathrm{n})$.

Тогда B преобразует

1) *множество j на множество $\bar{o}(o)$,*

2) *множество $\check{j}(j)$ просто на множество o и является обратным к преобразованию $B_{\text{п}}$.*

Теорема 2.4. *Пусть преобразование B определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}$.

Тогда B преобразует множество j просто на множество $\tilde{o} \subseteq o$, причем для $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ $\tilde{o} = o$.

Теорема 2.5. *Пусть преобразование B определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K_{\text{л}}(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}$ $\quad (\mathrm{h} = \mathrm{n} = \mathrm{m})$.

Тогда $B_{\text{л}}$ преобразует

1) *множество o на множество $\bar{j}$ $\quad (j)$,*

2) *множество $\tilde{o}(o)$ просто на множество j и является обратным к преобразованию B.*

Определение 2.2. Точку $(z_o, X'_o) \in \mathrm{o}\ ((u_o, Y'_o))$ назовем сопряженной по отношению к преобразованию $B(B_{\text{п}}, B_{\text{л}})$ с точкой $(u_o, Y'_o) \in j\ ((z_o, X'_o))$, если $B(u_o, Y'_o) = (z_o, X'_o)\ (B_{\text{п}}(z_o, X'_o) = (u_o, Y'_o),\ B_{\text{л}}(z_o, X'_o) = (u_o, Y'_o))$.

Если одновременно $B(u_o, Y'_o) = (z_o, X'_o)$ и $B_{\text{п}}(z_o, X'_o) = (u_o, Y'_o)$ или $B_{\text{л}}(z_o, X'_o) = (u_o, Y'_o)$ и $B(u_o, Y'_o) = (z_o, X'_o)$, тогда эти точки назовем просто-сопряженными.

Теорема 2.6. *Пусть* $(u_o, Y'_o) \in j(\tilde{j})$ *и* $(z_o, X'_o) \in \tilde{o}(o)$, $n \leqq m \qquad (n \geqq m)$.

Существует взаимнооднозначное преобразование B множества $j(\tilde{j})$ на множество $\tilde{o}(o)$ такое, что точки (u_o, Y'_o) и (z_o, X'_o) будут сопряженными.

Определение 2.3. h точек $(u_o, Y'_1), \ldots, (u_o, Y'_h)$ $((z_o, X'_1), \ldots, (z_o, X'_h))$ из области $j(o)$ назовем регулярными, если $h = \min(m, n)$ и матрица $Y = (Y_1, \ldots, Y_h)$ типа (n/h) $(X = (X_1, \ldots, X_h)$ типа $(m/h))$ ранга h.

Теорема 2.7. *Пусть преобразование $B(B_{\text{п}})$ определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ $(K_{\text{п}}(u))$ ранга* $h = n \leqq m$ $(h = m \leqq n)$.

Если $(u_o, Y'_1), \ldots, (u_o, Y'_h)$ $((z_o, X'_1), \ldots, (z_o, X'_h))$ регулярные точки области $j(o)$, тогда $B(u_o, Y'_1), \ldots, B(u_o, Y'_h)$ $(B_{\text{п}}(z_o, X'_1), \ldots, B_{\text{п}}(z_o, X'_h))$ регулярные точки области $o(j)$.

Теорема 2.8. *Пусть $(u_o, Y'_1), \ldots (u_o, Y'_h)$ и $(z_o, X'_1), \ldots, (z_o, X'_h)$ регулярные точки из соответствующих областей j, $\tilde{o} \subseteq o$, если $h = n \leqq m$ или из соответствующих областей o, $\tilde{} \subseteq j$, если $h = m \leqq n$.*

Существует простое преобразование $B(B_{\text{п}})$ множества $j(o)$ на множество $\tilde{o} \subseteq o$ $(\tilde{j} \subseteq j)$ такое, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, h$ будет

$B(u_o, Y'_i) = (z_o, X'_i)$ $(B_{\text{п}}(z_o, X'_i) = (u_o, Y'_i))$.

Заметим, что упускаем от формулировок теорем аналогичных теоремам 2.7 и 2.8, которые касаются преобразования $B_{\text{л}}$. В этих теоремах всегда для $h = m = n$, $K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1}$, $B_{\text{п}} = B_{\text{л}} = B^{-1}$, $\tilde{o} = o$ и $\tilde{j} \subseteq j$ (см. [1]).

3. Преобразование характеристик

Для дальнейшего обозначим mA, $m\bar{A}$, $m\tilde{A}$ множество характеристик уравнения (A) рассматриваемого на области o, $\bar{o}$, $\tilde{o}$ и mB, $m\bar{B}$, $m\tilde{B}$ множество характеристик уравнения (B), рассматриваемого на области j, $\bar{j}$, $\tilde{j}$.

Так как $|A(z)| \neq 0$ $(|B(u)| \neq 0)$ на интервале o_1 (j_1), то $\Phi_o = 0(m/1)$ $(\Psi_o = 0(n/1))$ будет единственной характеристикой проходящая точкой

$(z, 0, \ldots, 0) \in \bar{o}$ $((u, 0, \ldots, 0) \in \bar{j})$. Поэтому $m\bar{A} = mA \cup \Phi_o$ $(m\bar{B} = mB \cup \Psi_o)$.

Далее обозначим $mY(u)$ множество всех непрерывных кривых $Y'(u) = (y_1(u), \ldots, y_n(u))$, $u \in j_1$ из области j.

Определение 3.1. На множестве $mY(u)$ определяем преобразование H в множество непрерывных кривых из $(m + 1)$ — размерной области $(z, x_1, \ldots, x_n)$ равенством

$$HY(u) = K(z)\, Y(r(z)),\ z \in j_1. \qquad (H)$$

Теорема 3.1. *Пусть преобразование H определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга $h < m, n$.*

Тогда H преобразует множество mB в множество $m\bar{A}$.

Теорема 3.2. *Пусть преобразование H определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$.

Тогда H преобразует

1) *множество mB в множество $m\tilde{A}$,*

2) *множество $m\tilde{B}$ просто на множество mA и будет обратным к преобразованию $H_{\text{п}}$, определенное равенством*

$H_{\text{п}}\Phi(z) = K_{\text{п}}(u)\,\Phi(r^{-1}(u))$, где $K(r^{-1}(u))\,K_{\text{п}}(u) = E_{\text{п}}$, $(H_{\text{п}})$ $u \in j_1$, *которое преобразует множество mA просто на множество $m\tilde{B}$.*

(*Для* $\mathrm{h} = \mathrm{m} = \mathrm{n}$ $K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1}$ и $m\tilde{B} = mB$).

Доказательство. Заметим, что согласно леммы 2.1 матрица $K_{\text{п}}(u)$ существует и, следовательно, преобразование $H_{\text{п}}$ имеет смысл.

1. Матрицей $K(z)$ и функцией $u = r(z)$ определенно также преобразование B множества j на множество $\bar{o}$ (см. теорему 2.3). Пусть $(z_{\text{o}}, 0, \ldots, 0) = B(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}})$, $(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}}) \in j$, т. е. $K(z_{\text{o}})\,Y_{\text{o}} = 0(\mathrm{m}/1)$. Точкой $(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}})$ проходит характеристика $\Psi(u)$, которую изобразит преобразование Π на характеристику $K(z)\,\Psi(r(z))$ уравнения (A). Так как $K(z_{\text{o}})\,\Psi(r(z_{\text{o}})) = \Phi_{\text{o}} = 0(\mathrm{m}/1)$, то в силу однозначности $K(z)\,\Psi(r(z)) = \Phi_{\text{o}} \in mA$.

Если на характеристике $\Psi(u) \in mB$ не лежит точка, которая по отношению к преобразованию B, сопряженна с точкой $(z, 0, \ldots, 0) \in \bar{o}$, то H преобразует $\Psi(u)$ на характеристику множества mA, отличную от Φ_{o}.

Итак, H преобразует множество mB в множество $m\tilde{A}$.

2. Рассмотрим область j, любую характеристику $\Psi(u) \in mB$, точку

$$(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}}) \in \Psi(u)$$

и преобразование B, определенное выбранной матрицей $K(z)$ и функцией $u = r(z)$. Согласно теоремы 2.3. преобразует B множество $\bar{j}$ просто на множество o. Пусть $B(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}}) = (z_{\text{o}}, X'_{\text{o}})$ и $\Phi(z) \in mA$ характеристика, проходящая через точку $(z_{\text{o}}, X'_{\text{o}})$. Так как характеристики $K(z)\,\Psi(r(z))$ и $\Phi(z)$ проходят через ту же точку $(z_{\text{o}}, X'_{\text{o}})$ то в силу однозначности они тождественны. Итак, $H(m\tilde{B}) \subset mA$.

3. Рассмотрим любую характеристику $\Phi(z) \in mA$. Покажем, что существует характеристика $\Psi(u) \in mB$, которую преобразует H на $\Phi(z)$. Действительно. Выберем на характеристике $\Phi(z)$ любую точку $(z_{\text{o}}, X'_{\text{o}})$. Согласно теоремы 2.2 выбранной матрицей $K(z)$ и функцией $u = r(z)$ определено преобразование $B_{\text{п}}$, изображающее множество о просто на множество $\bar{j}$ и точку $(z_{\text{o}}, X'_{\text{o}})$ на точку $(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}})$. Точкой $(u_{\text{o}}, Y'_{\text{o}})$ проходит единственная характеристика $\Psi(u) \in mB$. Как нам известно, $K(z)\,\Psi(r(z)) \in mA$ и проходит через точку $(z_{\text{o}}, X'_{\text{o}})$. Поэтому, согласно однозначности решения уравнения (A), получаем, что $K(z)\,\Psi(r(z)) = H\Psi(u)$. Итак $H(mB) = mA$.

4. Пусть $\Psi_1(u) \neq \Psi_2(u)$ две любие характеристики уравнения (B) рассматриваемого на множестве $\bar{j}$. Предположим, что

$$\Psi_1(u_{\text{o}}) \neq \Psi_2(u_{\text{o}}) \text{ но } H\Psi_1(u_{\text{o}}) = H\Psi_2(u_{\text{o}}).$$

Тогда

$$B(u_o, \Psi_1(u_o)) = (r^{-1}(u_o),/K(z_o)\ \Psi_1(u_o)/') = (r^{-1}(u_o),/K(z_o)\ \Psi_2(u_o)/') = B(u_o, \Psi_2(u_o)).$$

Но это невозможно, так как согласно теоремы 2.3 в простое преобразование множества $\bar{j}$ на множество o.

Так как любие две характеристики не имеют общих точек, то из сказанного следует, что H преобразует mB просто на mA.

5. Преобразование H является обратным по отношению к преобразованию $H_{\text{п}} : HH_{\text{п}}\Phi(z) = H(K_{\text{п}}(u)\ \Phi(r^{-1}(u)) = K(z)\ K_{\text{п}}(r(z))\ \Phi(z) = E_{\text{m}}\Phi(z) = \Phi(z)$.

То, что $H_{\text{п}}$ простое преобразование множества mA на множество mB, доказывается таким же образом, как преобразование H, ибо они одинаковые по типу.

Утверждение теоремы для случая, что $\text{h} = \text{m} = \text{n}$ вытекает из [1].

Теорема 3.3. *Пусть преобразование H определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга $\text{h} = \text{n} \leqq \text{m}$.*

Тогда H преобразует множество mB просто на множество $m\tilde{A}$, причем обратное преобразование $H_{\text{л}}$ определено равенством

$H_{\text{л}}\Phi(z) = K_{\text{л}}(u)\ \Phi(r^{-1}(u))$, где $K_{\text{л}}(u)\ K(r^{-1}(u)) = E_{\text{m}}$, $u \in j_1(H_{\text{л}})$ (Для $\text{h} = \text{m} = \text{n}$ $K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1}$, $B_{\text{п}} = B_{\text{л}} = B^{-1}$ и $m\tilde{A} = mA$).

Теорема 3.4. *Пусть преобразование B и H определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$.*

Если $\Phi(z) = H\Psi(u)$, где $\Psi(u) \in mB$, тогда кривая $\Phi(z)$ представляется множеством всех точек из области o, сопряженных по отношению к преобразованию B с точками на кривой $\Psi(u)$.

Теорема 3.5. *Рассмотрим характеристики $\Psi(u) \in m\tilde{B}$ (mB) и $\Phi(z) \in mA$ $(m\tilde{A})$.*

Существует простое преобразование H множества $m\tilde{B}(mB)$ на множество mA $(m\tilde{A})$ такое, что $H\Psi(u) = \Phi(z)$.

Теорема 3.6. *Пусть преобразование H множества mB в множество $m\tilde{A}$ определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга $\text{h} < \text{m}, \text{n}$. Пусть*

$$\Psi_1(u), \ldots, \Psi_{\text{h}}(u)$$

линейно независимые характеристики уравнения (B), рассматриваемого на области j.

Тогда $H\Psi_1(u), \ldots, H\Psi_{\text{h}}(u)$ будут линейно независимые характеристики уравнения (A).

Теорема 3.7. *Пусть преобразование H $(H_{\text{п}})$ определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ $(K_{\text{п}}(u))$ ранга $\text{h} = \text{n} \leqq \text{m}$ $(h = \text{m} \leqq \text{n})$.*

Если $\Psi_1(u), \ldots, \Psi_{\text{h}}(u)$ $(H\Phi_1(z), \ldots, H\Phi_{\text{h}}(z))$ линейно независимые характеристики уравнения (B) $((A))$, тогда $H\Psi_1(u), \ldots, H\Psi_{\text{h}}(u)$ $(H_{\text{п}}\Phi_1(z), \ldots, H_{\text{п}}\Phi_{\text{h}}(z))$ будут ли-

нейно независимые характеристики уравнения (A) $((B))$, *рассматриваемого на области* $\tilde{o}$ $(\tilde{j})$.

Теорема 3.8. *Пусть* $\Psi_1(u), \ldots, \Psi_h(u)$ *и* $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_h(z)$ $h = min\ (m, n)$ *линейно независимые характеристики из соответствующих множеств характеристик.*

Существует простое преобразования H, $H_{\text{п}}$ *такие, что* $H\Psi_i = \Phi_i$, $H_{\text{п}}\Phi_i = \Psi_i$, $i = 1, 2, \ldots, h$.

(*Если* $h = m = n$, *то опять* $K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1}$, $H_{\text{п}} = H_{\text{л}} = H^{-1}$, $m\bar{B} = mB$ *и* $m\tilde{A} = mA$ (*см.* [1])).

4. Преобразование первых интегралов

Обозначим mv, $m\bar{v}$, $m\tilde{v}(mw$, $m\bar{w}$, $m\tilde{w})$ множество первых интегралов уравнения (A) $((B))$, рассматриваемого на соответствующей области $o, \bar{o}, \tilde{o}$ $(j, \bar{j}, \tilde{j})$.

Далее обозначим $mf = \{f(z, X')\}$ множество функций, определенных на области $\bar{o}$.

Определение 4.1. На множестве функций mf определяем преобразование P в множество функций, определенных в $(m + 1)$ — размерной области

$$(u, y_1, \ldots, y_n)$$

равенством

$$Pf(z, X') = w(u, Y') = f(r^{-1}(u),/K(r^{-1}(u))\,Y/'), \quad u \in j_1. \tag{P}$$

Теорема 4.1. *Пусть преобразование* P *определено функцией* $u = r(z)$ *и матрицей* $K(z)$ *ранга* $h < m, n$.

Тогда P *преобразует множество* $m\bar{v}$ *в множество* $mw \cup mc$, *где* mc — *множество действительных чисел.*

Теорема 4.2. *Пусть преобразование* P *определено функцией* $u = r(z)$ *и матрицей* $K(z)$ *ранга* $h = n \leqq m$.

Тогда P *преобразует*

1) $m\bar{v}$ *в множество* mw,

2) mv *просто на множество* $m\tilde{w}$ *и обратное преобразование* $P_{\text{п}}$ *к преобразованию* P *дано равенством*

$$P_{\text{п}}w(u, Y') = w(r(z),/K_{\text{п}}(r(z))\,X/'), \quad z \in o_1 \tag{$P_{\text{п}}$}$$

(*для* $h = m = n$ $K_{\text{п}} = K^{-1}$ *и* $P_{\text{п}} = P^{-1}$ *см.* [1]).

Доказательство. Матрицы K и $K_{\text{п}}$ выберем так, чтобы $K(z)K_{\text{п}}(r(z)) = E_m$ (см. демму 2.1). Этими матрицами и функцией $u = r(z)$ определены преобразования B, $B_{\text{п}}$, H и $H_{\text{п}}$.

1. Пусть $v^1(z, X') \in m\bar{v}$ и определим, какие свойства имеет функция $w^1(u, Y') = v^1(r^{-1}(u),/K(r^{-1}(u))\,Y/') = v^1(Bu,/BY/')$.

Пусть $(u, Y') \in j$. Согласно теореме 2.3 $B(u, Y') \in \bar{o}$, и поэтому $w(u, Y')$ определена на области j.

По той же теореме $B(j) = \bar{o}$ и поэтому, если $v^1(z, X') \neq \text{const}$ на области $\bar{o}$, тогда $w^1(u, Y') \neq \text{const}$ на области j.

Пусть $\Psi(u) \in mB$, тогда согласно теореме 3.2 $H\Psi(u) = \Phi(z) = K(z)\Psi(r(z)) \in m\bar{A}$ и поэтому $w^1(u, Y'(u)) = v^1(r^{-1},/K(r^{-1})\ \Psi(u)/') = v^1(z, \Phi'(z)) = const$.

Этим доказано первая часть теоремы.

2. Пусть $v^1(z, X') \in mv$ и $w^1(u, Y') = Pv^1(z, X') = v^1(Bu,/Bu/')$. Пусть $(u, Y') \in \tilde{j}$, тогда, согласно теореме 2.3 $(Bu,/BY/') \in o$ и поэтому $w^1(u, Y')$ определена на области $\tilde{j}$.

Так же, как и выше можно доказать, что $w^1(u, Y')$ не меняет своего значения вдоль любой характеристики уравнения (B), рассматриваемого на области $\tilde{j}$. Поэтому $w^1(u, Y')$ есть первый интеграл уравнения (B).

Покажем, что P преобразует mv на $m\tilde{w}$. Действительно. Рассмотрим любой первый интеграл $w^1(u, Y') \in m\tilde{w}$ и пусть $v^1(z, X') = w^1(r(z)),/K_{\text{п}}(r(z))\ X/') = w^1(B_{\text{п}}z, /B_{\text{п}}X/')$.

Пусть $(u, Y') \in o$, тогда согласно теореме 2.2 $(B_{\text{п}}z,/B_{\text{п}}X/') \in \tilde{j}$ и это означает, что функция $v^1(z, X') = w^1(B_{\text{п}}z,/B_{\text{п}}X/')$ определена на области o.

Согдасно той же теореме $B_{\text{п}}(o) = \tilde{j}$ и поэтому, если $w^1(u, Y') \neq c$ на области j, то $v^1(z, X') \neq c$ на области o.

Пусть $\Phi(z) \in mv$. Тогла согласно теореме 3.2 будет $K_{\text{п}}(u)\ \Phi(r^{-1}(u)) = \Psi(u)$ характеристикой уравнения (B), рассматриваемого на области $\tilde{j}$. Следовательно, $v^1(z, \Phi'(z)) = v^1(r(z),/K_{\text{п}}(u)\ \Phi(r^{-1}(u))/') = w^1(u, \Psi'(u)) = \text{const}$. Этим доказано, что $v^1(z, X') = w^1(B_{\text{п}}u,/B_{\text{п}}Y/')$ есть первый интеграл уравнения (A). Надо доказать, что преобразование P отобразит его на первый интеграл w^1: $Pv^1(z, X') = Pw^1(r,/K_{\text{п}}(r)X/') = w^1(r(r^{-1}(u)),/K_{\text{п}}(u)\ K(z)\ Y/') = w^1(u, Y')$.

Наконец покажем, что преобразование P простое. Действительно. Пусть $v^1(z, X') \neq v^2(z, X')$ есть два первые интегралы уравнения (A). Так как значения преобразованного первого интеграла $w^{\mathrm{i}}(u, Y') = v^{\mathrm{i}}(r^{-1}(u),/K(r^{-1}(u))\ Y/')$, $\mathrm{i} = 1{,}2$ определены так, что к каждой точке $(u, Y') \in \tilde{j}$ они равны значению функции v^{i} в точке (z, X') которая является сопряженной по отношению к преобразованию $B_{\text{п}}$, то видим, что если в точке (z_0, X_0') $v^1 \neq v^2$, тогда в точке $(u_0, Y_0') = B(z_0, X_0')$ тоже $w^1 \neq w^2$. Этим доказана вторая часть теоремы.

3. Наконец, непосредственным подсчетом докажем, что $P_{\text{п}}$ обратное преобразование по отношению к P: $P_{\text{п}}v^1(z, X') = Pv^1(r^{-1}(u),/K(r^{-1}(u))\ Y/') = v^1(r^{-1}(r(z)),/K(z)\ K_{\text{п}}(u)\ X/') = v^1(z, X')$.

Для $\mathrm{h} = \mathrm{m} = \mathrm{n}$ согласно [1] $K_{\text{п}} = K_{\text{л}} = K^{-1}$, $B_{\text{п}} = B_{\text{л}} = B^{-1}$, $\tilde{j} = j$, $m\tilde{w} = mw$ и $P_{\text{п}} = P^{-1}$.

Теорема 4.3. *Пусть преобразование P определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}$.

Тогда преобразование P

1) *преобразует множество* $m\tilde{w}$ *просто на множество* mw,

2) *является обратным к преобразованию* $P_{л}$, *определенном равенством*

$$P_{л}w(u, Y') = w(r(z),/K_{л}(r(z))\,Y/'), \qquad z \in o_1, \qquad (P_{л})$$

3) $P_{л}$ *преобразует множество* $m\bar{w}$ *в множество* mw,

4) $P_{л}$ *преобразует множество* mw *просто на множество* $m\tilde{v}$.

Если $\mathrm{h} = \mathrm{m} = \mathrm{n}$, *то* $P_{л} = P_{п} = P^{-1}$, $m\tilde{w} = mw$ *и* $m\tilde{v} = mv$.

Из формул (P), $(P_{п})$ и $(P_{л})$ видно, что первый интеграл $w(u, Y')$, $v(z, X')$ соответствующего уравнения (A), (B), рассматриваемого на соответствующей области $\tilde{j}, j, \tilde{o}, o$ имеет следующие характерные свойства.

1. Области определения функций $w(u, Y')$ и $v(z, X')$ связаны посредством соответствующего преобразования B, $B_{п}$ или $B_{л}$.

2. Значения $w(u, Y')\,((v(z, X'))$ в точке $(u, Y')\,((z, X'))$ из соответствующей области равно значению $v(z, X')\,(w(u, Y'))$ в сопряженной точке $(z, X')\,((u, Y'))$ по отношению к соответствующему преобразованию.

3. Области значения функций $w(u, Y')$ и $v(z, X')$, рассматриваемых на областях связанных между собой соответствующим преобразованием, тождественны.

Теорема 4.4. *Пусть* $v^1(z, X'), \ldots, v^{\mathrm{k}}(z, X')\,(w^1(u, Y'), \ldots\ldots, w^{\mathrm{k}}(u, Y'))$, $1 < \mathrm{k} = \mathrm{h} \leqq min\,(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ *(не)зависимые первые интегралы уравнения* (A) $((B))$, *рассматриваемого на соответствующей области и* $P(P_{п}, P_{л})$ *соответствено простое преобразование* mv *на* $m\tilde{w}$ *или* $m\tilde{v}$ *на* mw *(*$m\tilde{w}$ *на* mv *или* mw *на* $m\tilde{v}$*).*

Тогда $Pv^1, \ldots, Pv^{\mathrm{k}}\,(P_{п}w^1, \ldots, P_{п}w^{\mathrm{k}}, P_{л}w^1, \ldots, P_{л}w^{\mathrm{k}})$ *будут (не) зависимые первые интегралы уравнения* (B) $((A))$, *рассматриваемого на соответствующей области.*

Теорема 4.5. *Пусть* $v(z, X')\,(w(u, Y'))$ *есть главный интеграл уравнения* (A) $((B))$ *и* $P(P_{п}, P_{л})$ *простое преобразование* mv *на* $m\tilde{w}$ *или* $m\tilde{v}$ *на* mw *(*$m\tilde{w}$ *на* mv *или* mw *на* $m\tilde{v}$*).*

Тогда $Pv(z, X')\,(P_{п}w(u, Y'), P_{л}w(u, Y'))$ *будет главным интегралом уравнения* (B) $((A))$, *рассматриваемого на соответствующей области.*

Теорема 4.6. *Пусть* $v^{\mathrm{i}}(z, X')\,(w^{\mathrm{i}}(u, Y'))$ $1 \leqq \mathrm{i} \leqq \mathrm{h} = min(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ *есть главные интегралы уравнения* (A) $((B))$ *и* $P(P_{п}, P_{л})$ *простое преобразование* mv *на* $m\tilde{w}$, $m\tilde{v}$ *на* mw *(*$m\tilde{w}$ *на* mv, mw *на* $m\tilde{v}$*) в зависимости от того, если* $\mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$ *или* $\mathrm{m} \geqq \mathrm{n}$.

Тогда $Pv^{\mathrm{i}}(z, X')$ $(P_{п}w^{\mathrm{i}}(u, Y'), P_{л}w^{\mathrm{i}}(u, Y'))$ *будут главными интегралами уравнения* (B) $((A))$, *рассматриваемого на соответствую*

5. Общий вид первых интегралов и фундаментальные интегралы

Рассмотрим в области o $(o_1 = (\alpha, \beta), \alpha\beta > 0)$ частное уравнение типа

$$x_1 z_{x_1} + \ldots + x_{\mathrm{m}} z_{x_{\mathrm{m}}} = z,$$

уравнение однородных функций первой степени, его матричный вид

$$X'(1/z)\, E_{\mathrm{m}} z_X = 1, \qquad z \in o_1 \tag{1}$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{1}{z}\right) E_{\mathrm{m}} X. \tag{E}$$

Легко проверить, что каждая из функции

$$v^{\mathrm{i}}(z, X') = (1/z)\, x_{\mathrm{i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}, \tag{2}$$

есть главный интеграл уравнения (1). И так как

$$\frac{D(v^1, \ldots, v^{\mathrm{m}})}{D(x_1, \ldots, x_{\mathrm{m}})} = \left(\frac{1}{z}\right)^{\mathrm{m}} \neq 0,$$

то (2) есть фундаментальные интегралы уравнения (1).

Обозначим mv_1 множество первых интегралов уравнения (E) и $m\bar{v}_1$ множество первых интегралов уравнения (E), рассматриваемого в области

$$\{z \in (\alpha, \beta),\ X' \in \bar{\mathrm{e}}_{\mathrm{m}}\}.$$

Теорема 5.1. *Пусть преобразование P определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} < \mathrm{m}, \mathrm{n}$.

Существует h *независимые первые интегралы уравнения* (II) *вида* $w^{\mathrm{i}}(u, Y') = (k_{\mathrm{i}1}(r^{-1}(u))\, y_1 + \ldots + k_{\mathrm{in}}(r^{-1}(u))\, y_{\mathrm{n}})\,(1/r^{-1}(u))$,

$$\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{h}. \tag{3}$$

Теорема 5.2. *Пусть простое преобразование P множества mv ($m\bar{v}$) на множество $m\tilde{w}$ (mw) определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$ ($\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}$).

Тогда существует h *независимые первые интегралы* (*фундаментальная система*) *уравнения* (II) *вида* (3), *где* $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$.

Теорема 5.3. *Пусть простое преобразование P множества mv на множество mw определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}$.

Тогда множество первых интегралов уравнения (II) *можно выразить в виде*

$$mw = mv(r^{-1}(u),/K(r^{-1}(u))\, Y/'),$$

где $v(z, X')$ однородная функция нулевого порядка.

Теорема 5.4. *Пусть простое преобразование $P_{\mathrm{II}}(P_{\mathrm{\cdot I}})$ множества mw на множество mv(mw на $m\bar{v}$) определено функцией $u = r(z)$ и матрицей $K(z)$ ранга* $\mathrm{h} = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$ ($\mathrm{h} = \mathrm{n} \leqq \mathrm{m}$).

Тогда 1) *если* $\mathrm{h} = \mathrm{m} \leqq \mathrm{n}$, *то существует фундаментальная система уравнения* (I) *вида*

$$v^{\mathrm{i}}(z, X') = \left(\frac{1}{z}\right) \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} k_{\mathrm{IIij}}(r(z))\, x_{\mathrm{j}}, \qquad \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}, \tag{4}$$

1) *если* h = n $\leqq$ m *существует* n *независимые первые интегралы уравнения* (I) *вида*

$$v^{i}(z, X') = \left(\frac{1}{z}\right) \sum_{j=1}^{m} k_{\text{Л}ij}(r(z))\, x_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

3) *если* h = m = n, *тогда* (4) *и* (5) *совпадают, так как* $K_{\text{П}} = K_{\text{Л}} = K^{-1}$, $P_{\text{П}} = P_{\text{Л}} = P^{-1}$, $m\tilde{v} = mv$ *и* $m\tilde{w} = mw$, *см.* (1).

Теорема 5.5. *Пусть простое преобразование* $P_{\text{П}}$ *множества* $m\tilde{w}$ *на множество* mv *определено* $u = r(z)$ *и матрицей* $K(z)$ *ранга* h = m $\leqq$ n.

Тогда множество первых интегралов уравнения (I) *можно выразить в виде*

$$mv(z, X') = mw(r(z), / K_{\text{П}}(r(z))\, X/'),$$

где $w(u, Y')$ *однородная функция нулевого порядка.*

Если h = m = n, *тогда* $K_{\text{П}} = K^{-1}$, $P_{\text{П}} = P^{-1}$ *и* $m\tilde{w} = mw$, *см.* /1/.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Палат, И.:* О преобразованиях первых интегралов двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. „Acta Universitatis Olomucensis" F. R. N., TOM 45, 1974.

Shrnutí

TRANSFORMACE PRVÝCH INTEGRÁLŮ DVOU PARCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU

Jindřich Palát

Tento článek obsahuje přirozené zobecnění práce [1], od které se v podstatě odlišuje tím, že uvažované Eukleidovy prostory mohou mít různé dimense. V důsledku toho mají uvedené věty obecnější charakter než věty v práci [1], přičemž v případě, že uvažované Eukleidovy prostory mají stejnou dimensi, dostáváme tytéž výsledky jako v práci [1].

Protože se důkazy vět v podstatě neodlišují od důkazů vět v práci [1], uvádějí se jen důkazy, které v práci [1] se nevyskytují nebo se po formální stránce více odlišují.

Studují se určité transformace bodů z (m + 1)-rozměrného prostoru do (n + 1)-rozměrného prostoru, charakteristik rovnic (*A*) a (*B*), jakož i vzájemná transformace prvých integrálů rovnic (I) a (II). Všechny tyto transformace se definují pomocí libovolné, ryze monotonní, spojité funkce $u = r(z)$ ($du/dz \neq 0$) a matic K, $K_{\text{П}}$, $K_{\text{Л}}$, které jsou řešením odpovídající rovnice (K_{mn}), (K_{nm}).

V poslední části této práce se uvádí zvláštní tvar prvého integrálu, fundamentálních integrálů a množiny prvých integrálů rovnic (I) a (II).

Zusammenfassung

ÜBER TRANSFORMATIONEN ERSTER INTEGRALE ZWEIER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

Jindřich Palát

In diesem Artikel wird eine natürliche Verallgemeinerung der Arbeit [1] behandelt, von der sie sich im wesentlichen dadurch unterscheidet, daß die betrachteten Euklidischen Räume verschiedene Dimensionen haben können. Infolgedessen tragen die angegebenen Sätze einen etwas allgemeineren Charakter, als die in [1], wobei, falls die betrachteten Euklidischen Räume dieselbe Dimension haben, dieselben Ergebnisse wie in [1] gewonnen werden.

Da sich unsere Satzbeweise von den in [1] im wesentlichen nicht unterscheiden, führen wir nur die in [1] nicht vorkommenden Beweise oder solche an, die sich in formeller Hinsicht mehr unterscheiden.

Es werden gewisse Transformationen von Punkten aus einem (m + 1) dimensionalen Raum in einen (n + 1) dimensionalen Raum, Transformationen der Charakteristiken von Gleichungen (A) und (B), sowie auch eine Wechseltransformation erster Integrale der Gleichungen (I) und (II) untersucht. Diese sämtlichen Transformationen definieren wir durch beliebige, echt monotone, stetige Funktion $u = r(z)$ ($\mathrm{d}u/\mathrm{d}z \neq 0$) und durch die Matrizen K, K_{JI}, K_{JI}, welche die Lösung der entsprechenden Gleichungen (K_{mn}), (K_{nm}) darstellen.

Im abschliessenden Teil werden spezielle Formen des ersten Integrals, der Fundamentalintegrale und einer Menge erster Integrale der Gleichungen (I) und (II) angegeben.