Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Josef Hošek

Eine Bemerkung zur sich selbst begleitenden Differentialgleichung

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 16 (1977), No. 1, 81--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120055

1977 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 53

Katedra matematické analýzy a numerické matematiky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.

EINE BEMERKUNG ZUR SICH SELBST BEGLEITENDEN DIFFERENTIALGLEICHUNG

JOSEF HOŠEK

(*Eingegangen am 31. März 1976*)

Es gebe eine Differentialgleichung (im weiteren DGl.) zweiter Ordnung Jacobischer Form

$$y'' = Q(t)\,y, \tag{1}$$

mit in offenem Intervall definierten Funktion Q und mit einer Ableitung zweiter Ordnung in j. Also $Q \in C^{(2)}$.

Vereinbarung: Wenn u eine Lösung (ein Integral) der DGl. (1) ist, schreiben wir abkurzend $u \in (1)$. Die Menge aller reellen Zahlen bezeichnen wir mit R.

In [1] wird der Begriff einer begleitenden Gleichung von (1) mit der Basis $[\alpha, \beta]$ eingeführt und wird als DGl.

$$y'' = Q_1(t)\,y$$

bezeichnet. Hierbei

$$Q_1 = Q + \frac{\alpha\beta Q'}{\alpha^2 - \beta^2 Q} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 Q}}\right)'',$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0, \alpha, \beta \in \mathrm{R}, \qquad Q(t) < 0$$

für $t \in j$. In [2] wird dieser Begriff gewissermaßen verallgemeinert, denn es wird vorausgesetzt, daß für $t \in j$ $\alpha^2 - \beta^2 Q(t) \neq 0$ gilt. Der Träger Q_1 der DGl. (2) wird durch die Beziehung

$$Q_1 = Q + \frac{\alpha\beta Q'}{\alpha^2 - \beta^2 Q} + \sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2 Q|}}\right)'', \qquad \alpha^2 + \beta^2 > 0,\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}$$

definiert. In (3) definiert man die sogenannte erste begleitende Gleichung von (1) mit der Basis $[\alpha, \beta]$, α, β sind reelle Funktionen von Argument t, für die

$$\alpha, \beta \in C^{(3)}, \tag{3}$$

$$\alpha^2(t) + \alpha(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t) - \beta^2(t)\,Q(t) \neq 0, \qquad \text{für } t \in j \text{ gilt.} \tag{4}$$

Es wird gezeigt, daß der Träger Q_1 der ersten begleitenden Gleichung (2) im vorliegendem Fall in der Form

$$Q_1 = Q + \\ + \frac{\alpha\alpha'' + 2\alpha\beta'Q + \alpha\beta\,Q' + \alpha''\beta' + 2\beta'^2Q + \beta\beta'Q' - 2\alpha'\beta Q - 2\alpha'^2 - \alpha'\beta'' - \beta\beta''Q}{\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q} + \\ + \sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}}\right)'' \tag{5}$$

geschrieben werden kann. In [3] wird ebenfalls bewiesen: Wenn $Q \in C^{(2)}$ in j, $u \in (1)$ und die Funktionen α, β die Bedingungen von (3) und (4) befriedigen, so ist die Funktion z, für die

$$z(t) = \frac{\alpha(t)\,u(t) + \beta(t)\,u'(t)}{\sqrt{|\alpha^2(t) + \alpha(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t) - \beta^2(t)\,Q(t)|}}$$

gilt, eine Lösung der DGl. (2) und der Träger ist der Form von (5).

Beispiel: Es gelte im Spezialfall für den Träger Q_1 der ersten begleitenden Gleichung (5) vom (1) mit der Basis $[\alpha, \beta]$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}}\right)'' = 0, \qquad \beta(t) \neq 0 \text{ für } t \in j.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q = \frac{\varepsilon}{C^2(t + D)^2}$$

mit $C, D \in \mathrm{R}$, $C \neq 0$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q) = \pm 1$, $t \neq -D$, so daß

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2(t)}\left[\alpha^2(t) + \alpha(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t) - \frac{\varepsilon}{C^2(t + D)^2}\right]$$

und die DGl. (1) im vorliegenden Fall wird in der Form

$$y'' = \frac{1}{\beta^2(t)}\left\{\alpha^2(t) + \alpha(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t) - \frac{\varepsilon}{C^2(t + D)^2}\right\} y \tag{1a}$$

geschrieben. Ohne Mühe wird weiter nachgewiesen, daß die erste begleitende Gleichung von (1a) mit der Basis $[\alpha, \beta]$ durch die Beziehung

$$y'' = \left\{ \frac{1}{\beta^2(t)} \left[\alpha(t)(\alpha(t) + \beta'(t)) - \frac{\varepsilon}{C^2(t+D)^2} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\beta(t)} \left[\alpha'(t) + \beta''(t) + \frac{2(\alpha(t) + \beta'(t))}{t+D} \right] \right\} y \tag{5a}$$

gegeben ist. Nun bestimmen wir noch die zweite begleitende Gleichung von (1a) mit der Basis $[\alpha, \beta]$ (siehe [1]). Wird der Träger Q_1 durch (5a) definiert, dann ist seine Ableitung

$$Q_1' = \frac{1}{\beta^3} \left[-2\alpha^2\beta' - 2\alpha\beta'^2 + \frac{2\varepsilon\beta'}{C^2(t+D)^2} \right] +$$
$$+ \frac{1}{\beta^2} \left[2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \beta'\beta'' + \frac{2\varepsilon}{C^2(t+D)^3} - \frac{2\beta'(\alpha+\beta')}{t+D} \right] +$$
$$+ \frac{1}{\beta} \left[\alpha'' + \beta''' + \frac{2(\alpha' + \beta'')}{t+D} - \frac{2(\alpha+\beta')}{(t+D)^2} \right].$$

Weiter gilt:

$$\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q_1 = \frac{\varepsilon - C^2\beta(t+D)[2(\alpha+\beta') + (2\alpha' + \beta')(t+D)]}{C^2(t+D)^2},$$

$$\alpha\alpha'' + 2\alpha\beta' Q_1 + \alpha\beta Q_1 + \alpha''\beta' + 2\beta'^2 Q_1 + \beta\beta' Q_1 - 2\alpha'\beta Q_1 - 2\alpha'^2 - \alpha'\beta'' - \beta\beta'' Q_1 =$$
$$= 2\alpha\alpha'' + \alpha\beta''' - 4\alpha'\beta'' - 4\alpha'^2 + 2\alpha''\beta' + \beta\beta''' - \beta''^2 + \frac{1}{C^2\beta(t+D)^3} \times$$
$$\times [(2\alpha\alpha'\beta' + 2\alpha'\beta'^2 + 2\alpha\beta'\beta'')\, C^2(t+D)^3 +$$
$$+ 2\beta'(\alpha+\beta')^2\, C^2(t+D)^2 + \varepsilon(2\alpha' + \beta'')(t+D) + 2\varepsilon(\alpha+\beta')] -$$
$$-2\,\frac{\alpha+\beta'}{(t+D)^2}[\alpha'(t+D) + \alpha + \beta'].$$

Daraus können wir leicht folgern, daß die zweite gebleitende Gleichung von (1a) mit der Basis $[\alpha, \beta]$ lautet:

$$y'' = \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left[\alpha(\alpha+\beta') - \frac{\varepsilon}{C^2(t+D)^2} \right] + \frac{1}{\beta} \left[\alpha' + \beta'' + \frac{2(\alpha+\beta')}{t+D} \right] + \right.$$
$$+ \frac{C^2(t+D)^2 [2\alpha\alpha'' + \alpha\beta''' - 4\alpha'^2 + 2\alpha''\beta' + \beta'\beta''' - \beta''^2]}{\varepsilon - C^2\beta(t+D)[2(\alpha+\beta') + (2\alpha' + \beta')(t+D)]} +$$
$$+ \frac{C^2(t+D)^3 [2\alpha\alpha'\beta' + 2\alpha'\beta'^2 + 2\alpha\beta'\beta'' + \beta'^2\beta'']}{\beta(t+D)\{\varepsilon - C^2\beta(t+D)[2(\alpha+\beta') + (2\alpha' + \beta')(t+D)]\}} +$$
$$+ \frac{2\beta' C^2(t+D)^2(\alpha+\beta')^2 + \varepsilon(t+D)(2\alpha' + \beta'') + 2\varepsilon(\alpha+\beta')}{\beta(t+D)\{\varepsilon - \beta C^2(t+D)[2(\alpha+\beta') + (2\alpha' + \beta')(t+D)]\}} -$$
$$\left. - \frac{2C^2(\alpha+\beta')[\alpha'(t+D) + \alpha + \beta']}{\varepsilon - \beta C^2(t+D)[2(\alpha+\beta') + (2\alpha' + \beta')(t+D)} \right\} y. \tag{5b}$$

Bemerkung: Wenn α, $\beta \in \mathrm{R}$, $\beta \neq 0$, $\varepsilon \gtrless 1$, erhalten wir aus (1a), (5a), (5b) sukzessiv

$$y'' = \left\{\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 C^2 (t + D)^2}\right\} y,$$

$$y'' = \left\{\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 C^2 (t + D)^2} + \frac{2\alpha}{\beta(t + D)}\right\} y \quad \text{(siehe [3])},$$

$$y'' = \left\{\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2 C^2 (t + D)^2} + \frac{2\alpha}{\beta(t + D)} + \frac{2\alpha[1 - \alpha\beta C^2 (t + D)}{\beta(t + D)[1 - 2\alpha\beta C^2 (t + D)]}\right\} y.$$

Im weiteren befassen wir uns mit dem Problem eine DGl. (1) zu finden, die zu sich selbst begleitend mit der Basis $[\alpha, \beta]$ ist, wo α, β reellen Funktionen vom Argument t darstellen. Wir suchen also geeignete Träger Q der DGl. (1) damit bei gegebener Basis $[\alpha, \beta]$ in (5) $Q_1(t) \equiv Q(t)$ identisch erfüllt wäre. Die angegebene Identität gilt genau dann, wenn die Funktion Q ein Integral der DGl.

$$\frac{2\alpha'' + 2\alpha\beta' Q + \alpha\beta Q' + \alpha''\beta' + 2\beta'^2 Q + \beta\beta' Q' - 2\alpha'\beta Q - 2\alpha'^2 - \alpha'\beta'' - \beta\beta'' Q}{\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q} +$$

$$+ \sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|} + \left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}}\right)'' = 0$$

darstellt.

Für α, $\beta \in \mathrm{R}$ ist dieses Problem bereits in [2] aufgelöst. Zunächst führen wir einen Trivialfall ein.

Satz 1. *Es gebe Funktionen α, β mit $\alpha(t) \neq 0$, $\beta(t) \equiv 0$, $t \in j$, $\alpha \in C^{(3)}$. Dann ist für jeden* (4) *erfüllenden Träger $Q \in C^{(2)}$ bei der Basis $[\alpha, 0]$ die DGl.* (1) *zu sich selbst begleitend.*

Beweis: Nach (5) läßt sich schreiben

$$Q_1(t) = Q(t) + \frac{\alpha(t)\alpha''(t) - 2\alpha'^2(t)}{\alpha^2(t)} + |\alpha(t)|\left(\frac{1}{|\alpha(t)|}\right)'';$$

woraus $Q_1(t) = Q(t)$ für $t \in j$ folgt.

Im folgenden werden die Funktionen α, β mit den Eigenschaften (3), (4), $\beta(t) \neq 0$ in j und die DGl. (1) zu sich selbst begleitend bei der Basis $[\alpha, \beta]$ vorausgesetzt. Ist nun u eine beliebige Lösung von (1), so ist die Funktion $\dfrac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}}$ notwendig uch eine solche. Daher gibt es eine Abbildung $\boldsymbol{A}$, die jeden $u \in (1)$ ein Integral $\dfrac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}} \in (1)$ zuordnet. Auf diese Weise definierte Abbildung $\boldsymbol{A}$ ist eine lineare Abbildung der Menge aller Lösungen von (1) in sich. Betrachten wir nun eine solche nichttriviale Lösung $u \in (1)$ — soweit es existiert — für die

$$Au \equiv \frac{\alpha u + \beta u'}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}} = su \tag{6}$$

gilt, mit $s \in R$, $s \neq 0$. Die Lösung $u \in (1)$, welche (6) erfült, heißt eine normal Lösung. Wird

$$|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q| = \varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)$$

gesetzt, wo nach (4) $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q) = \pm 1$, so läßt sich aus der Beziehung (6)

$$u'' = u\,\frac{s\sqrt{\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)} - \alpha}{\beta}$$

mit daraus

$$u'' = u\left[\left(\frac{s\sqrt{\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)} - \alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{s\sqrt{\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)} - \alpha}{\beta}\right)'\right]$$

ausdrücken. Da $u \in (1)$, ist $u'' = Q(t)\,u$, erhalten wir durch Einsetzen in den letzten Ausdruck für u''

$$u\left[\left(\frac{s\sqrt{\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)} - \alpha}{\beta}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{s\sqrt{\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)} - \alpha}{\beta}\right)' - Q\right] = 0.$$

Da u nach der Voraussetzung eine nichttriviale Lösung darstellt, gelangen wir nach einer Reihe von Umformungen zu

$$s^2 + s\,\frac{\varepsilon(2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - 2\beta\beta' Q - \beta^2 Q')\beta - 2\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)(2\alpha + \beta')}{2[\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q]^{3/2}} +$$
$$+ \varepsilon = 0. \tag{7}$$

Die Gleichung (7) ist eine charakteristische Gleichung der linearen Abbildung $\boldsymbol{A}$ und ihre reellen Lösungen existieren genau dann, wenn

$$\frac{\varepsilon(2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - 2\beta\beta' Q - \beta^2 Q')\beta - 2\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)(2\alpha + \beta')}{2[\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q]^{3/2}} = c, \tag{8}$$

wo c geeignete reelle Konstante ist.

Bei der Integration von DGl. (8) bezüglich Q betrachten wir zuerst den Spezialfall $\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q \equiv k$, wo $k \operatorname{sgn} k \equiv \left(\frac{2\alpha + \beta'}{c}\right)^2$, $k \neq 0$, $c \neq 0$, k, $c \in R$.

Die Identität $k \operatorname{sgn} k \equiv \left(\frac{2\alpha + \beta'}{c}\right)^2$ wird erfüllt genau dann, wenn für die Funktionen α, β im Intervall j

$$\beta(t) = -2 \int^{t} \alpha(v)\,\mathrm{d}v \pm |c| \sqrt{k \operatorname{sgn} k t + h}, \qquad h \in P$$

gilt.

Lemma 1: *Die Funktion*

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2(t)} \left[\alpha^2(t) + 2(t)\,\beta'(t) - \alpha'(t)\,\beta(t) - k\right] \tag{9}$$

für $k \operatorname{sgn} k \equiv \left(\frac{2\alpha + \beta'}{c}\right)^2$ *ist die Lösung der DGl.* (8) *genau dann, wenn* $c > 0$, $2\alpha(t) + \beta'(t) < 0$ *oder* $c < 0$, $2\alpha(t) + \beta'(t) > 0$ *gilt.*

Beweis: Nach (9) gilt

$$Q' = \frac{1}{\beta^3} \left[(2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta)\,\beta - 2\beta'(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - k)\right]$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke für die Funktionen Q, Q' in die linke Seite von DGl. (8), ergibt sich

$$\frac{\varepsilon\left[2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - \frac{2\beta'}{\beta}(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - k) - (2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta)\right]\beta}{(2\varepsilon k)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{2\beta'\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - k) - 2\varepsilon k(2\alpha + \beta')}{(2\varepsilon k)^{\frac{1}{2}}} = - \frac{|c|(2\alpha + \beta')}{|2\alpha + \beta'|}.$$

Daraus folgt die Satzaussage.

Bemerkung: Sind speziell $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, so ist $k \operatorname{sgn} k = \left(\frac{2\alpha}{c}\right)^2$ und aus (9) ergibt sich

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2} \left[\alpha^2 \mp \left(\frac{2\alpha}{c}\right)^2\right].$$

Wenn wir noch $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ setzen, können wir den Träger Q in der Form

$$Q(t) = \mu^2 \mp \frac{4\mu^2}{c^2}$$

schreiben (vergleiche mit [2]).

Es sie nun $\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q \neq 0$ im Intervall j; setzen wir

$$x(t) = \varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q), \tag{10}$$

so ist $x(t) > 0$ und

$$x'(t) = \varepsilon(2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - 2\beta\beta' Q - \beta^2 Q').$$

Danach läßt sich die DGl. (8) in der Form

$$x' = 2\frac{x}{\beta(t)}[2\alpha(t) + \beta'(t) + cx^{1/2}] \tag{11}$$

schreiben. Mit der Variation der Konstante stellen wir fest, daß diese DGl. eine nichttriviale Lösung

$$x(t) = \frac{\exp 2\int \frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,dt}{\left[\int\left(\frac{c}{\beta(t)}\exp\int\frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,dt\right)dt - K\right]^2} \tag{12}$$

genau dann besitzt, wenn $K \in \mathrm{R}$ derart besteht, wo für $t \in j$

$$\int\left(\frac{c}{\beta(t)}\exp\int\frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,dt\right)dt - K < 0. \tag{13}$$

gilt. Aus (10) und (12) ergibt sich weiter

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2(t)}\times$$
$$\times\left\{\alpha^2(t) + \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) - \varepsilon\frac{\exp 2\int\frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,dt}{\left[\int\left(\frac{c}{\beta(t)}\exp\int\frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,dt\right)dt - K\right]^2}\right\}. \tag{14}$$

Lemma 2: *Die in* (14) *definierte Funktion ist eine Lösung von DGl.* (8) *genau dann, wenn* (13) *gilt.*

Der Beweis wird durch Einsetzen für Q, Q' in die linke Seite von DGl. (8) durchgeführt. Setzen wir der Einfachheit halber $H(t) = \exp\int\frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,dt$, so folgt nach (14)

$$Q'(t) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\left[-\frac{2\alpha^2\beta' + 2\alpha\beta'^2}{\beta} + 2\alpha'\beta' + \frac{2\varepsilon H^2\beta'}{\beta\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \left[2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - \frac{2\varepsilon H^2\left[(2\alpha+\beta')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right) - Hc\right]}{\beta\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)^3}\right]\right\}.$$

Wegen

$$[\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)]^{3/2} = \operatorname{sgn}\left(\int \frac{cH(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t - K\right)\left\{\frac{H(t)}{\int \frac{cH(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t - K}\right\}^3,$$

folgt nach kleiner Umformung

$$\frac{\varepsilon(2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - 2\beta\beta' Q - \beta^2 Q')\beta - 2\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q)(2\alpha + \beta')}{2[\varepsilon(\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q]^{3/2}} =$$

$$= -c \operatorname{sgn}\left(\int \frac{cH(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t - K\right).$$

Durch Vergleich mit der rechten Seite von (8) erhalten wir die geforderte Behauptung.

Satz 2: *Es gebe im Intervall j die Funktionen $\alpha, \beta \in C^{(3)}$, $\beta(t) \neq 0$ und die Konstanten $0 \neq k$, $h \in \mathrm{R}$ derart, daß $2\int^t \alpha(v)\,\mathrm{d}v + \beta(t) = kt + h$. Danach ist die DGl. (1) mit dem Träger*

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2(t)}[\alpha^2(t) + \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) - k] \tag{15}$$

zu sich selbst begleitend bei der Basis $[\alpha, \beta]$.

Beweis: Vor allem aus (15) folgt

$$\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|} = \sqrt{|k|},$$

sodaß

$$\sqrt{|k|}\left(\frac{1}{\sqrt{|k|}}\right)'' = 0$$

und

$$Q'(t) = \frac{1}{\beta^3}[(2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta)\beta - (\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - k)2\beta'].$$

Einsetzen für die Funktionen Q, Q' in (5) liefert

$$Q_1 = Q + \frac{1}{k}\left\{\alpha\alpha' + \frac{1}{\beta^2}[2\alpha^3\beta' + 2\alpha^2\beta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - 2\alpha\beta' k] + \right.$$

$$+ \frac{1}{\beta^2}[2\alpha^2\alpha'\beta + \alpha^2\beta\beta'' - \alpha\alpha''\beta^2 - 2\alpha^3\beta' - 2\alpha^2\beta'^2 + 2\alpha\alpha'\beta\beta' + 2\alpha\beta' k] +$$

$$+ \alpha''\beta' + \frac{1}{\beta^2}[2\alpha^2\beta'^2 + 2\alpha\beta'^3 - 2\alpha'\beta\beta'^2 - 2\beta'^2 k] +$$

$$+ \frac{1}{\beta^2}[2\alpha\alpha'\beta\beta' + \alpha\beta\beta'\beta'' - \alpha''\beta^2\beta' - 2\alpha^2\beta'^2 - 2\alpha\beta'^3 + 2\alpha'\beta\beta'^2 + 2\beta'^2 k] +$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\left[-2\alpha^2\alpha' - 2\alpha\alpha'\beta\beta' + 2\alpha'^2\beta^2 + 2\alpha'\beta k\right] - 2\alpha'^2 - \alpha'\beta'' +$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\left[-\alpha^2\beta\beta'' - \alpha\beta\beta'\beta'' + \alpha'\beta^2\beta'' + \beta\beta''k\right]\Bigg\};$$

woraus nach einer Umformung $Q_1 = Q + \dfrac{2\alpha' + \beta''}{\beta}$ resultiert. Wegen der Voraussetzung $\beta'' = -2\alpha'$ gilt $Q_1(t) = Q(t)$ für $t \in j$.

Satz 3: *Es seien im Intervall j die Funktionen $\alpha, \beta \in C^{(3)}$, $\beta(t) \neq 0$* und *reelle Konstanten c, K derart gegeben, daß*

$$\int\left(\frac{c}{\beta(t)}\exp\int\frac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t - K \neq 0.$$

Hiernach ist die DGl. (1) *mit dem Träger*

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2(t)}\times$$

$$\times\left\{\alpha^2(t) + \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) - \varepsilon\frac{\exp 2\int\dfrac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t}{\left[\int\left(\dfrac{c}{\beta(t)}\exp\int\dfrac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t - K\right]^2}\right\}_{\varepsilon=\pm 1} \tag{16}$$

zu sich selbst begleitend bei der Basis $[\alpha, \beta]$.

Der Beweis wird wieder durch Einsetzen für Q, Q' in (5) durchgeführt. Wird $H(t) = \exp\int\dfrac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}\,\mathrm{d}t$ gesetzt, so folgt $H'(t) = \dfrac{2\alpha(t)+\beta'(t)}{\beta(t)}H(t)$. Demgemäß folgern wir leicht aus (16)

$$Q'(t) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\left[-\frac{2\alpha^2\beta' + 2\alpha\beta'^2}{\beta} + 2\alpha'\beta' + \varepsilon\frac{2H^2\beta'}{\beta\left(\int\dfrac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)^2}\right] +\right.$$

$$\left.+\left[2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - \varepsilon\frac{2H^2\dfrac{2\alpha+\beta'}{\beta}\left(\int\dfrac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right) - \dfrac{2H^3c}{\beta}}{\left(\int\dfrac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)^3}\right]\right\},$$

was nach einer Umformung folgende Form

$$Q'(t) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\left[\frac{2\alpha^2\beta' + 2\alpha\beta'^2}{\beta} + 2\alpha\beta' + \varepsilon\frac{2H^2\beta'}{\beta\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[2\alpha\alpha' + \alpha\beta'' - \alpha''\beta - \varepsilon\frac{2H^2\left[(2\alpha + \beta')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right) - Hc\right]}{\beta\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)^3}\right]\right\} \quad (17)$$

annimmt. Mit Hilfe von (16) und (17) regeln wir die Summanden auf der rechten Seite von (5). Wegen

$$\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|} = \frac{H}{\tau\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)},$$

wo

$$\tau = \operatorname{sgn}\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}}\right)'' =$$

$$= \frac{2\tau(\alpha + \beta')(2\alpha + \beta')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)}{\beta^2 H} -$$

$$-\tau\,\frac{\beta(2\alpha' + \beta'')\ \int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K)\ + 2(\alpha + \beta')cH}{\beta^2 H},$$

ist

$$\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q|}}\right)'' =$$

$$= \frac{2(\alpha + \beta')(2\alpha + \beta')}{\beta^2} - \frac{\beta(2\alpha' + \beta'')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right) + 2(\alpha + \beta')cH}{\beta^2\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)}. \quad (18)$$

Und ferner

$$\frac{\alpha\alpha'' + 2\alpha\beta'Q + \alpha\beta Q' + \alpha''\beta' + 2\beta'^2 Q + \beta\beta'Q' - 2\alpha'\beta Q - 2\alpha'^2 - \alpha'\beta'' - \beta\beta''Q}{\alpha^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \beta^2 Q} =$$

$$= \frac{\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,\mathrm{d}t - K\right)^2}{\varepsilon H^2}\,\frac{1}{\beta^2}\times$$

$$\times\left[\alpha\alpha''\beta^2 - \alpha\alpha''\beta^2 - \varepsilon\frac{2\alpha H^2\left[(2\alpha+\beta')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right) - Hc\right]}{\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)^3} + \right.$$

$$+ \alpha''\beta^2\beta' - \alpha''\beta^2\beta' - \varepsilon\frac{2\beta' H^2\left[(2\alpha+\beta')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right) - Hc\right]}{\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)^3} +$$

$$+ 2\alpha'^2\beta^2 + \varepsilon\frac{2\alpha'\beta H^2}{\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)^2} - 2\alpha'^2\beta^2 -$$

$$\left. - \alpha'\beta^2\beta'' + \alpha'\beta^2\beta'' + \varepsilon\frac{\beta\beta'' H^2}{\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)^2}\right] =$$

$$= \frac{-2(\alpha+\beta')(2\alpha+\beta')}{\beta^2} + \frac{\beta(2\alpha'+\beta'')\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right) + 2(\alpha+\beta')cH}{\beta^2\left(\int\frac{c}{\beta(t)}H(t)\,dt - K\right)}. \quad (19)$$

Nach (5), (16), (18) und (19) gilt für $t \in j$ $Q_1(t) = Q(t)$.

Bemerkung: Wenn $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, so gilt nach (16)

$$Q(t) = \frac{-\varepsilon e^{2K_1}}{[c(e^{K_1}t + K_2) - \beta K]^2}, \qquad K_1, K_2 \in R \text{ beliebig.}$$

Wird noch $K_1 = K_2 = 0$, $c = A$, $-K\beta = B$ gesetzt, so gilt

$$Q(t) = \frac{-\varepsilon}{(At+B)^2}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

(vgl. [2], S. 63).

Es seien $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ gegeben. Nach einer einfacher Umformung ergibt sich aus (16)

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2}\left\{\alpha^2 - \frac{\varepsilon}{\left[e^{-\frac{2\alpha}{\beta}t}\left(Ke^{-K_1} - \frac{c}{\beta}K_2\right) - \frac{c}{2\alpha}\right]^2}\right\}$$

für beliebibe K_1, $K_2 \in \mathrm{R}$. Für $K_1 = K_2 = 0$ gilt

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2}\left[\alpha^2 - \frac{4\alpha^2\varepsilon}{(2K\alpha e^{-\frac{2\alpha}{\beta}t} - c)^2}\right].$$

Wird $2K\alpha = \exp\left(-\frac{2\alpha}{\beta}k\right)$, $k \in \mathrm{R}$, $A = -2\frac{\alpha}{\beta}k + \ln 2$, $B = \frac{\beta}{\alpha}c$, gesetzt, so erhalten wir unmittelbar

$$Q(t) = \frac{1}{\beta^2}\left[\alpha^2 - \frac{16\alpha^2\varepsilon}{\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{\beta}t + A\right) - 2\frac{\alpha}{\beta}B\right]^2}\right]$$

und für $\frac{\alpha}{\beta} = \mu$ schließlich

$$Q(t) = \mu^2 - \frac{16\mu^2\varepsilon}{[\exp(-2\mu t + A) - 2\mu B]^2}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

(vgl. [2], S. 63).

Literatur

[1] *Laitoch, M.*: L'équation associée dans la théorie des transformations des équations différentielles du second ordre, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 12, 1963.

[2] *Laitoch, M.*: Homogene lineare zu sich selbst begleitende Differentialgleichung zweiter Ordnung, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, F. R. N., Tom 33, 1971.

[3] *Háčik, M.*: O istých vlastnostiach integrálov s vahovými funkciami $\alpha(t)$, $\beta(t)$ lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu Jacobiho typu, Kandidátská disertačná práca.

[4] *Blaško, R.*: Poznámka o splynutí diferenciálnej rovnice $y'' = q(t)y$ s jej sprievodnou rovnicou vzhľadom na váhové konštanty α, β. Práce a štúdie VŠD v Žiline, séria matematickofyzikálna, 1974, č. 1, str. 33—36.

Shrnutí

POZNÁMKA O DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI PRŮVODNÍ K SOBĚ SAMÉ

Josef Hošek

Jsou dány diferenciální rovnice

$$y'' = Q(t)y, \tag{1}$$

kde $Q \in C^{(2)}$ pro $t \in j$ a reálné funkce α, β definované v intervalu j s těmito vlastnostmi:

$$\alpha, \beta \in C^{(3)}, \qquad \alpha^2(t) + \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) - \beta^2(t)Q(t) \neq 0, \qquad t \in j.$$

V práci se uvažují možnosti, kdy (1) je sama k sobě průvodní při bázi $[\alpha, \beta]$ a v jednotlivých případech se uvádějí explicitní vyjádření nosiče Q této rovnice. V závěru je ukázána souvislost s případy, které byly studovány již v práci [2].

Резюме

ЗАМЕТКА ОБ САМОСОПРОВОЖДАЮЩЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИЮ

Иосиф Гошек

Даны дифференциальное уравнение

$$y'' = Q(t)\, y. \tag{1}$$

где $Q \in C^{(2)}$ для $t \in j$ и вещественные функции α, β, определенные на интервале j с этими свойствами:

$$\alpha, \beta \in C^{(3)}, \ \alpha^2(t) + \alpha(t)\, \beta'(t) - \alpha'(t)\, \beta(t) - \beta^2(t)\, Q(t) \neq 0, \ t \in j.$$

В работе рассматриваются возможности, когда (1) самосопровождающее уравнение в смысле работы [2] при базисе $[\alpha, \beta]$ и в отдельных случаях приводится явное выражение носителя Q этого уравнения. В заключение показывается связь с теми случаями, которые рассматривались в работе [2].