Jindřich Palát

Über die Menge erster Integrale gewisser partieller Differetialgleichungen erster Ordnung

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 13 (1973), No. 1, 71--81

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120027`

1973 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 41

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch CSc.

ÜBER DIE MENGE ERSTER INTEGRALE GEWISSER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

JINDŘICH PALÁT

(Eingegangen am 9. Juni 1972)

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Mengeneigenschaften der Menge erster Integrale der Gleichungen vom Typus (1) zu zeigen. Dabei geht man von einer bestimmten Transformation der Mengen erster Integrale zweier Gleichungen vom Typus (1) aufeinander aus. Die Transformationen dieser Art habe ich in der Arbeit [4] näher erörtert. Sowohl diese als auch die Arbeit [4] resultieren aus dem Bestreben gewisse Ergebnisse von Akademik O. Borůvka (siehe [1]) über die Transformationstheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die Differentialgleichungen vom Typus (1) zu überführen.

In dieser Arbeit setzen wir voraus, daß die Matrizen vom Typus (n/n) $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik}), \dots$ in ihrem Definitionsintervall stetig und regulär sind, d. h. $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0, \dots$ in jedem Punkt des Definitionsintervalls. Wir bezeichnen die Nullmatrix vom Typus (n/k) mit $O(n/k)$, die Einheitsmatrix vom Typus (n/n) mit E, die transponierte Matrix A mit A', die inverse Matrix A mit A^{-1} und

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad z_X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad u_Y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Ferner setzen wir voraus, daß alle betrachteten Funktionen mehrerer Veränderlichen in ihrem Definitionsgebiet stetige partielle Ableitungen erster Ordnung je nach den einzelnen Veränderlichen besitzen. Den Punkt des $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raums $(z, x_1, \dots, x_n)$, $(u, y_1, \dots, y_n), \dots$ bezeichnen wir kurz mit (z, X'), $(u, Y'), \dots$ und die Funktionen der $(n + 1)$ Veränderlichen mit $v(z, X')$, $w(u, Y')$.

Die quasilineare Gleichung

$$X'A'(z)\, z_X = 1, \qquad z \in o_1, \tag{1}$$

betrachten wir immer im Gebiete $o_{n+1} = \{z \in o_1, X' \in o_n\}$, $n \geqq 2$, wo o_1 ein beliebiges Intervall ist und o_n ein n-dimesionaler euklidischer Raum ohne Koordinatenursprung darstellt. Da verschiedene Gebiete vom Typus o_{n+1} sich voneinander nur durch Intervalle o_1 unterscheiden, charakterisieren wir diese Gebiete kurz mit Intervall o_1 (siehe (1)).

Es sei noch bemerkt, daß jede Gleichung

$$X'A'(z)\, z_X = a(z), \qquad z \in o_1,$$

wo $a(z) \neq 0$ eine im Intervall o_1 stetige Funktion darstellt, sich in die Form (1) überführen läßt.

Wie bekannt, der Gleichung (1) entspricht ein charakteristisches System, welches in einer Matrixgestalt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= A(z)\, X \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= 1, \end{aligned}\right\}$$

nach äquivalenter Umformung

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z} = A(z)\, X \tag{2}$$

geschrieben werden kann.

Die Gleichung (2) genügt im Gebiete o_{n+1} den Bedingungen des Satzes über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen (siehe [3]), nach dem durch jeden Punkt $(z_0, X_0) \in o_{n+1}$ genau eine Lösung $\Phi'(z) = (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z))$ der Gleichung (2), vom Rand zu Rand des Gebietes o_{n+1}, durchläuft. Wie vereinbart, nennen wir diese Lösung die Charakteristik der Gleichung (2) ((1)).

Definition 1. *Die Funktion der* $(n + 1)$-*Veränderlichen* $f(z, X')$, *die in ihrem Definitionsgebiet* o_{n+1} *nicht identisch Null ist, nennen wir das erste Integral der Gleichung* (2) ((1)), *wenn sie längs jeder Charakteristik* $\Phi'(z)$ *der Gleichung* (2) *konstant ist, d. h. wenn* $f(z, \Phi'(z)) = \text{konst.}$ *für* $z \in o_1$.

Bekanntlich, die Funktion $f(z, X')$, definiert im Gebiete o_{n+1}, ist das erste Integral der Gleichung (2) ((1)) dann und nur dann, wenn sie im Gebiete o_{n+1} der Identität

$$\frac{\partial f}{\partial z} + X'A'(z)\, f_X \equiv 0 \tag{3}$$

genügt.

Ferner betrachten wir die Gleichung

$$Y'B'(u)\, u_Y = 1, \qquad u \in j_1, \tag{4}$$

wo $(u, Y') \in j_{n+1} = \{u \in j_1, Y' \in o_n\}$ (j_1 ist ein beliebiges Intervall) und die dazugehörige charakteristische Gleichung

$$\frac{dY}{du} = B(u)\,Y, \qquad u \in j_1. \tag{5}$$

Vereinbaren wir ein für allemal mit $u = r(z)$ die Funktion zu bezeichnen, welche im Intervall o_1 definiert ist, daselbst eine stetige, von Null verschiedene Ableitung besitzt, die das Intervall o_1 auf das Intervall j_1 und den Punkt $z_0 \in o_1$ auf den Punkt $u_0 \in j_1$ abbildet. Die inverse Funktion zu $u = r(z)$ bezeichnen wir mit $r^{-1}(u)$.

Nach Lemma 1 [5] existiert für die beliebige reelle numerische Matrix K_0 vom Typus (n/n) und für die erwählte Funktion $u = r(z)$ eine einzige Lösung $K(z)$ der Gleichung

$$\frac{dK}{dz} = A(z)\,K - KB(r(z))\frac{dr(z)}{dz}, \qquad z \in j_1, \tag{K}$$

definiert im Intervall o_1 und die Anfangsbedingung $K(z_0) = K_0$ erfüllend. Laut Bemerkung *2* [5] ist die Lösung regulär, wenn $|\,K_0\,| \neq 0$ und umgekehrt ist sie singulär, wenn $|\,K_0\,| = 0$. Ist $K(z)$ die reguläre Lösung der Gleichung (K) im Intervall o_1, dann genügt die inverse Matrix $K^{-1}(z)$, $z = r^{-1}(u)$, $u \in j_1$ der Gleichung

$$\frac{dK^{-1}}{du} = B(u)\,K^{-1} - K^{-1}A(r^{-1}(u))\frac{dr^{-1}(u)}{du}, \qquad u \in j_1. \tag{K^{-1}}$$

Betrachten wir einen Sonderfall der Gleichung (1)

$$X'(1/z)\,Ez_X = 1, \qquad z \in (0, 1), \tag{6}$$

die ihr entsprechende charakteristische Gleichung

$$\frac{dX}{dz} = (1/z)\,EX, \qquad z \in (0, 1) \tag{7}$$

und die dazugehörige Menge erster Integrale mv. Jedes erste Integral $v \in mv$, genügt der Identität

$$\frac{\partial v}{\partial z} + X'(1/z)\,Ev_X \equiv 0, \qquad z \in (0, 1)$$

und ist daher, wie bekant, im Gebiete o_{n+1} ($o_1 = (0, 1)$) eine homogene Funktion nulter Ordnung.

Satz 1. Es sei $K(z)$ im Intervall o_1 eine reguläre Lösung der Gleichung (K), wo $A(z) = (1/z)\,E$ ist, bestimmt durch die Anfangsbedingung K_0 und Funktion $u = r(z)$.

Ist $w(u, Y')$ das erste Integral der Gleichung (4), dann

$$v(z, X') = w(r(z), /K^{-1}(z) X/') \tag{8}$$

ist das erste Integral der Gleichung (6).

Beweis. Wählen wir eine beliebige Charakteristik $\Phi(z)$ der Gleichung (7). Wir zeigen, daß $\Psi(u) = K^{-1}(r^{-1}(u)) \Phi(r^{-1}(u))$ die Charakteristik der Gleichung (5) ist. In der Tat, wenn wir in Betracht ziehen, daß für $u \in j_1$ die Matrix $K^{-1}(r^{-1}(u))$ der Gleichung (K^{-1}), wo $A(z) = (1/z) E$ ist und $\Phi(z)$ für $z \in (0, 1)$ der Gleichung (7) genügt, dann

$$\frac{dK^{-1}(r^{-1}(u))\Phi(r^{-1}(u))}{du} = \frac{dK^{-1}}{du}\Phi(r^{-1}(u)) + K^{-1}\frac{d\Phi(r^{-1}(u))}{du} =$$

$$= \left(B(u) K^{-1} - K^{-1}(1/z) E \frac{dr^{-1}(u)}{du}\right)\Phi(r^{-1}(u)) + K^{-1}(1/z) E \times$$

$$. \Phi(r^{-1}(u)) \frac{dr^{-1}(u)}{du} = B(u) K^{-1}(r^{-1}(u))\Phi(r^{-1}(u)) = B(u) \Psi(u),$$

was eben beweist, daß $\Psi(u) = K^{-1}(r^{-1}(u)) \Phi(r^{-1}(u))$ die Charakteristik der Gleichung (5) darstellt. Durch Einsetzen der Charakteristik $\Phi(z)$ in die Funktion (8) ergibt sich $v(z, \Phi'(z)) = w(r(z), [K^{-1}(z) \Phi(z)]') = w(u, \Psi(u)) =$ konst, womit der Beweis des Satzes beendet ist.

Wird in der Gleichheit (8) $z = r^{-1}(u)$, $X = K(r^{-1}(u)) Y$ gesetzt, so ist

$$w(u, Y') = v(r^{-1}(u), [K(r^{-1}(u)) Y]'). \tag{9}$$

Hieraus folgt, daß in der Menge mw_B erster Integrale der Gleichung (4) eine Untermenge existiert, welche sich in der Form (9) erklären läßt. Den Satz, nach dem jedes erste Integral $v(z, X') \in mv$ gemäß (9) auf ein gewisses erstes Integral der Gleichung (4) transformiert wird, wollen wir hier nicht beweisen, denn der Beweis verläuft genauso wie im Satze 1. Aus disen zwei Sätzen folgt eine wichtige Erkenntnis, daß die allgemeine Form des ersten Integrals der Gleichung (4) durch (9) gegeben ist, wo v eine beliebige homogene Funktion nullter Ordnung in bezug auf die Veränderlichen (z, X'), $z = r^{-1}(u)$, $X = K(r^{-1}(u)) Y$ darstellt.

Definition 2. *Zwei Gleichungen vom Typus* (4) *gelten dann als gleich, wenn man sie in demselben Gebiete betrachtet und die Matrizen B(u) in jedem Punkt des Definitionsintervalls dieselben Funktionswerte besitzen.*

Definition 3. *Zwei Funktionen der* (n + 1)*-Veränderlichen gelten dann als gleich, wenn man sie in demselben Gebiete betrachtet und in jedem Punkt des Definitiosgebietes dieselben Funktionswerte besitzen.*

Definition 4. *Führen wir an der Menge* mp *erster Integrale aller Gleichungen vom Typus* (4) *eine Zerlegung* $\mathfrak{P}$ *durch, derart, daß die zwei beliebigen ersten Integrale, fals* *wir sie in demselben Gebiete betrachten, in dasselbe Element der Zerlegung $\bar{\mathfrak{P}}$ eingereiht werden.*

In unseren weiteren Betrachtungen befassen wir uns mit der Menge erster Integrale, die in einem Element der Zerlegung $\bar{\mathfrak{P}}$ enthalten sind. Die Eigenschaften einer solcher Menge lassen sich an einer konkreten Menge erster Integrale demonstrieren ohne Einschränkung der Allgemeinheit unserer Betrachtungen. Der Einfachheit halber wählen wir das Element $\bar{p}_1$, welches alle ersten Integrale der im Intervall $(0, 1)$ betrachteten Gleichungen (4) enthält. Für alle diesen Gleichungen können wir dieselbe Funktion $u = r(z)$ wählen und dies einfachheitshalber in der Form $u = z$.

Betrachten wir nun die Gleichungen

$$Y'B'(u)\,u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1), \tag{10}$$

$$Y'A'(u)\,u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1), \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}u} = K((1/u)\,E - A(u)), \qquad u \in (0, 1) \tag{$\mathrm{K_A}$}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}u} = K((1/u)\,E - B(u)), \qquad u \in (0, 1), \tag{$\mathrm{K_B}$}$$

Wir wollen nun für unsere weiteren Überlegungen vereinbaren, daß ausschließlich reguläre Lösungen der Gleichung vom Typus $(\mathrm{K_A})$ vorkommen, die beispielsweise durch die Anfangsbedingung $K(u_0) = E$ $\big(u_0 \in (0, 1)\big)$ bestimmt werden.

Lemma 1. *Seien K_A, K_B Lösungen der zugehörigen Gleichungen* $(\mathrm{K_A})$, $(\mathrm{K_B})$.
Dann nimmt das erste Integral der Gleichung

$$Y'\left((1/u)\,E - (K_AK_B)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_AK_B}{\mathrm{d}u}\right)' u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1), \tag{12}$$

eine Form von

$$v(u, /K_AK_BY/') \tag{13}$$

an, wo v eine homogene Funktion nullter Ordnung in bezug auf die Veränderlichen (u, X'), $X = K_AK_BY$ darstellt.

Beweis. Da für $u \in (0, 1)$

$$\frac{\mathrm{d}K_AK_B}{\mathrm{d}u} = K_AK_B\left((1/u)\,E - (1/u)\,E + (K_AK_B)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_AK_B}{\mathrm{d}u}\right)$$

gilt, ist es evident, daß die Gleichung vom Typus (K)

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}u} = K\left((1/u)\,E - \left((1/u)\,E - (K_AK_B)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_AK_B}{\mathrm{d}u}\right)\right) \tag{$\mathrm{K_{AB}}$}$$

für den Anfangswert $K(u_0) = E$ gerade $K = K_AK_B$ zur Lösung hat. Wie bereits vorgeführt, ist in diesem Fall die allgemeine Form des ersten Integrals der Gleichung (12) durch die Form (9) gegeben, woraus sich (13) ergibt.

Nach Umformung läßt sich die Gleichung (12) folgendermassen umschreiben:

$$Y'(B + K_A^{-1} A K_B - (1/u) E)' u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1). \tag{12$_1$}$$

Aus $A = (1/u) E \neq B$ $(A \neq (1/u) E = B)$ folgt $K_A = E \neq K_B$ $(K_A \neq E = K_B)$. Demzufolge nimmt die Gleichung $(12)_1$ die Form von (10) ((11)) an, und (13) stellt ihr erstes Integral dar.

Ist $A = (1/u) E = B$, dann $K_A = E = K_B$, die Gleichung $(12)_1$ nimmt die Form

$$Y'(1/u) E u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1) \tag{14}$$

an und (13) ist ihr erstes Integral.

Definition 5. *An der Menge* $\mathrm{m}\bar{p}_1$ *definieren wir für beliebige Elemente* $w^\alpha = v^\alpha(u, Y'K_A) \in \mathrm{m}w_A$, $w^\beta = v^\beta(u, Y'K_B) \in \mathrm{m}w_B$ *die Multiplikation* (π) *laut folgender Vorschrift:*

$$\left.\begin{array}{lr} w^\alpha \,.\, w^\beta = (v^\alpha(u, Y'K_B'K_A'))^i \; (v^\beta(u, Y'K_B'K_A'))^j, & \\ \textit{wo für} & E \neq K_B \; \textit{ist} \; \mathrm{i} = 0, \mathrm{j} = 1, \\ \textit{für} & K_A \neq E = K_B \; \textit{ist} \; \mathrm{i} = 1, \mathrm{j} = 0 \\ \textit{und für} & K_A = E = K_B \; \textit{ist} \; \mathrm{i} = 1, \mathrm{j} = 1. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Aus Lemma 1 folgt, daß das Produkt $\mathrm{w}^\alpha \,.\, \mathrm{w}^\beta$ erster Integrale, wo $\mathrm{w}^\alpha \in \mathrm{m}w_A$, $w^\beta \in \mathrm{m}w_B$ immer erstes Integral der Gleichung (12) $((12_1))$ ist.

Satz 2. *Es sei* $w^\alpha \in \mathrm{m}w_A$, $w^\beta \in \mathrm{m}w_B$.

Dann ist die Menge erster Integrale der Gleichung (12) *durch die Menge aller Produkte* $w^\alpha \,.\, w^\beta$ *bestimmt.*

Beweis. Ist $A = (1/u) E \neq B$ oder $A \neq (1/u) E = B$, bleibt nichts zu beweisen. In diesen Fällen ist entweder $K_A = E \neq K_B$ oder $K_A \neq E = K_B$ und das Produkt $w^\alpha \,.\, w^\beta$ gleicht entweder $v^\beta(u, Y'K_B')$ oder $v^\alpha(u, Y'K_A')$, was das erste Integral der Gliechung (10) oder (11) ist.

Sei $A \neq (1/u) E \neq B$ und folglich $K_A \neq E \neq K_B$. In diesem Falle ist das Produkt $w^\alpha \,.\, w^\beta = v^\beta(u, Y'K_B'K_A')$ laut Lemma 1 das erste Integral der Gleichung (12). Sei $v(u, Y'K_B'K_A')$ das erste Integral der Gleichung (12). Setzen wir $w^\alpha = v(u, Y'K_A') \in \mathrm{m}w_A$, $w^\beta = v(u, Y'K_B') \in \mathrm{m}w_B$, dann $w^\alpha \,.\, w^\beta = v(u, Y'K_B'K_A')$.

Sei $A = (1/u) E = B$ und folglich $K_A = E = K_B$. In diesem Falle ist das Produkt $w^\alpha \,.\, w^\beta = v^\alpha(u, Y') \, v^\beta(u, Y')$ das erste Integral der Gleichung (14). Sei $v(u, Y')$ das erste Integral der Gleichung (14). Aus der Defininitition des Gebietes j_{n+1} geht hervor, daß die Gleichung (14) wenigstens ein erstes Integral in der Form u/y_i, $1 \leqq \mathrm{i} \leqq \mathrm{n}$ besitzt. Setzen wir $w^\alpha = u/y_i$, $w^\beta = (y_i/u) \, v(u, Y')$, dann $w^\alpha \,.\, w^\beta = v(u, Y')$.

In den drei vorhergehenden Fällen haben wir vorgeführt, daß es immer gleichzeitig gilt: $\mathrm{m}(w^\alpha . w^\beta) \subset \mathrm{m}w_{A.B}$ und $\mathrm{m}w_{A.B} \subset \mathrm{m}(w^\alpha . w^\beta)$. Infolgendessen $\mathrm{m}(w^\alpha . w^\beta) = \mathrm{m}w_{A.B}$. $\mathrm{m}w_{A.B}$ bedeutet die Menge erster Integrale der Gleichung (17) ((17$_1$).

Betrachten wir eine weitere Gleichung

$$Y'C'(u)\,u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1) \tag{16}$$

und die Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}u} = K((1/u)\,E - C(u)), \qquad u \in (0, 1). \tag{K$_C$}$$

Lemma 2. *Seien K_A, K_B, K_C Lösungen der zugehörigen Gleichungen* ($\mathrm{K_A}$), ($\mathrm{K_B}$), ($\mathrm{K_C}$).

Dann kann das erste Integral der Gleichung

$$Y'\left((1/u)\,E - (K_AK_BK_C)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_AK_BK_C}{\mathrm{d}u}\right)' u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1) \tag{17}$$

allgemein ausgedrückt werden in der Form

$$v(u,\ Y'K_C'K_B'K_A'), \tag{18}$$

wo das Produkt der Matrizen $K_AK_BK_C$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}u} = K\left((1/u)\,E - \left((1/u)\,E - (K_AK_BK_C)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_AK_BK_C}{\mathrm{d}u}\right)\right),$$
$$u \in (0, 1) \tag{K$_{ABC}$}$$

darstellt und v eine homogene Funktion nullter Ordnung in bezug auf die Veränderlichen (u, X'), $X = K_AK_BK_CY$ ist.

Auf Beweis im Lemma 2 als auch im nachfolgenden Satz 3 wollen wir verzichten, da dieser analog wie im Lemma 1 und im Satz 2 verläuft.

Satz 3. Sei $w^\alpha \in \mathrm{m}w_A$, $w^\beta \in \mathrm{m}w_B$, $w^\gamma \in \mathrm{m}w_C$.

Dann wird die Menge erster Integrale der Gleichung (17) *durch die Menge aller Produkte* $(w^\alpha . w^\beta) . w^\gamma$ *oder* $w^\alpha . (w^\beta . w^\gamma)$ *bestimmt.*

Es sei noch bemerkt, daß die Abhängigkeiten von den Matrizen A, B, C der Gleichungen (17), ($\mathrm{K_{ABC}}$) eventuell eine von den entsprechenden Formen vom Typus (10), (12), ($\mathrm{K_A}$), ($\mathrm{K_{AB}}$) annehmen; (18) ist dann das erste Integral der entsprechenden Gleichung. Die Gleichung (17) läßt sich in die Form

$$Y'(C + K_C^{-1}BK_C + K_C^{-1}K_B^{-1}AK_BK_C - (2/u)\,E)'\,u_Y = 1, \tag{17$_1$}$$

umschreiben.

Satz 4. *Die Menge* $\mathrm{m}\bar{p}_1$ *samt der Multiplikation* (π) *ist ein Gruppoid* $\mathfrak{P}$, *dessen Zentrum die Untermenge* $\mathrm{m}v$ *ist.*

Dieser Satz bedarf keines Beweises, denn der Umstand, daß die Menge mv das Zentrum der Menge m$\bar{p}_1$ ist, folgt unmittelbar aus der Definition der Multiplikation (π).

Auf einem Beispiel werden wir vorführen, daß die Multiplikation (π) nicht assoziativ ist.

Betrachten wir erste Integrale $v^\alpha(u, Y'K_A') \in \mathrm{m}w_A$, $v^\beta(u, Y'K_B') \in \mathrm{m}w_B$ und $v^\gamma(u, Y'K_C') \in \mathrm{m}w_C$ wo $K_B K_C^{-1} = E$. Dann $w^\alpha . (w^\beta . w^\gamma) = v^\alpha(u, Y'K_A')$ während $(w^\alpha . w^\beta) . w^\gamma = v^\gamma(u, Y'K_A')$.

Bezeichnen wir mit ms die Menge, deren Elemente die Mengen erster Integrale der einzelnen Gleichungen vom Typus (10) sind. Zwecks Verkürzung wollen wir $\mathrm{e}_1 = \mathrm{m}v$, $\mathrm{a} = \mathrm{m}w_A$, $\mathrm{b} = \mathrm{m}w_B$, $\mathrm{c} = \mathrm{m}w_C, \ldots$ setzen. Bemerken wir, daß ms keine Zerlegung an der Menge m$\bar{p}_1$ darstellt. Eine und dieselbe Funktion kann nämlich zu Mengen erster Integrale zweier verschiedener Gleichungen (10) und (11) gehören.

Definition 6. *An der Menge* ms *definieren wir für beliebige Elemente* $\mathrm{a} \in \mathrm{m}s$, $\mathrm{b} \in \mathrm{m}s$ *die Multiplikation* (π_1) *derart, daß wir unter dem Produkt* a . b *gerade das Element der Menge* ms *verstehen, das alle Produkte* $w^\alpha . w^\beta$, $w^\alpha \in \mathrm{a}$, $w^\beta \in \mathrm{b}$ *enthält.*

Dieser Definition und dem Satz 3 entsprechend ist $\mathrm{a} . \mathrm{b} = \mathrm{m}(w^\alpha . w^\beta) = \mathrm{m}w_{A.B}$, wo

$$A . B = (1/u)\,E - (K_A K_B)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_A K_B}{\mathrm{d}u} = B + K_B^{-1} A K_B - (1/u)\,E.$$

Satz 5. *Die Menge* ms *samt der Multiplikation* (π_1) *ist die Gruppe* $\mathfrak{S}$.

Beweis 1. Aus dem Satz 3 folgt unmittelbar, daß die Multiplikation (π_1) assoziativ ist: $(\mathrm{a} . \mathrm{b}) . \mathrm{c} = \mathrm{a} . (\mathrm{b} . \mathrm{c}) = \mathrm{m}w_{A.B.C}$, wo

$$A . B . C = (1/u)\,E - (K_A K_B K_C)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_A K_B K_C}{\mathrm{d}u} =$$

$$= C + K_C^{-1} B K_C + (K_B K_C)^{-1}\,A K_B K_C - (2/u)\,E.$$

2. e_1 ist das Einheitselement der Menge ms. In der Tat. Sei $\mathrm{a} \neq \mathrm{e}_1$. Dann $\mathrm{e}_1 . \mathrm{a} = \mathrm{m}\big(v(u, Y') . v^\alpha(u, Y'K_A')\big) = \mathrm{m}\big(v^\alpha(u, Y'K_A')\big) = \mathrm{m}w_A = \mathrm{a}$, $\mathrm{a} . \mathrm{e}_1 = \mathrm{m}\big(v^\alpha(u, Y'K_A') . v(u, Y')\big) = \mathrm{m}\big(v^\alpha(u, Y'K_A')\big) = \mathrm{m}w_A = \mathrm{a}$; $\mathrm{e}_1 . \mathrm{e}_1 = \mathrm{m}\big(v^\alpha(u, Y') . v^\beta(u, Y')\big) = \mathrm{m}\big(v^\alpha(u, Y')\, v^\beta(u, Y')\big) = \mathrm{m}v = \mathrm{e}_1$.

3. Zu jedem Element $\mathrm{a} \in \mathrm{m}s$ existiert ein inverses Element a^{-1} derart, daß $\mathrm{a} . \mathrm{a}^{-1} = \mathrm{a}^{-1} . \mathrm{a} = \mathrm{e}_1$. Wenn $\mathrm{a} = \mathrm{e}_1$ ist, gibt es nichts zu beweisen. Es sei $\mathrm{a} \neq \mathrm{e}_1$, folglich $K_A \neq E$. Lösen wir die Gleichung $\mathrm{a} . \mathrm{x} = \mathrm{e}_1$, die wir in die Form $\mathrm{m}w_{A.X} = \mathrm{m}v$ umschreiben. Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$(1/u)\,E - (K_A K_X)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_A K_X}{\mathrm{d}u} = (1/u)\,E,$$

woraus

$$(K_A K_X)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}K_A K_X}{\mathrm{d}u} = 0(\mathrm{n}/\mathrm{n}).$$

Aus der Vorasussetzung die wir über Matrizen K von vornherein vereinbart haben geht hervor, daß $(K_A K_X)^{-1} \neq 0\,(n/n)$. Folglich notwendig $K_A K_X = E$, woraus $K_X = K_A^{-1}$. Es bleibt noch übrig die unbekante Matrix X zu bestimmen. Da für $u \in (0, 1)$

$$\frac{dK_A^{-1}}{du} = -K_A^{-1}\frac{dK_A}{du}K_A^{-1} = K_A^{-1}(-(1/u)E + K_A A K_A^{-1}) =$$

$$= K_A^{-1}((1/u)E - (2/u)E - K_A A K_A^{-1}))$$

ist, sehen wir, daß die Gleichung

$$\frac{dK}{du} = K((1/u)E - ((2/u)E - K_A A K_A^{-1})), \qquad u \in (0, 1) \qquad (K_A^{-1})$$

für die Anfangsbedingung $K(u_0) = E$ gerade K_A^{-1} zur Lösung besitzt. Somit haben wir die gesuchte Matrix $X = (2/u)E - K_A A K_A^{-1}$ eindeutig bestimmt. Da das Produkt $K_A K_A^{-1} = K_A^{-1} K_A = E$, gelangen wir zum Schluß, daß $A \,.\, X = X \,.\, A$, und das Element a^{-1}, welches invers zum Element a ist, durch die Menge erster Integrale der Gleichung

$$Y'((2/u)E - K_A A K_A^{-1})'\, u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1)$$

bestimmt wird.

Hiermit ist der Beweis beendet (siehe [2]).

Zum Schluß wollen wir noch zwei Sätze beweisen, die uns ein etwas anderes Vorgehen bei der Konstruktion der ersten Integrale der Gleichung vom Typus (6) ermöglichen.

Betrachten wir die Menge der regulären Matrizen vom Typus (n/n), welche im Intervall (0, 1) definiert sind, und in diesem Intervalle eine stetige, von Null verschiedene Ableitung besitzen. Wählen wir zunächst $u_0 \in (0, 1)$ und normieren wir, d. h. multiplizieren wir jede Matrix $A(u)$ aus dieser Menge mit dem Faktor $A^{-1}(u_0)\,(1/u_0)$. Für die normierte Matrix benützen wir dieselbe Bezeichnung $A(u)$. Die Menge der normierten Matrizen bezeichnen wir mit $\mathrm{m}T$. Es sei noch bemerkt, daß für jede Matrix $A(u) \in \mathrm{m}T\; A(u_0) = (1/u_0)E$ ist.

Satz 5. *Es sei* $A(u) \in \mathrm{m}T$.

Dann $\mathrm{m}v(u, Y'A'(u)\,u)$ ist die Menge erster Integrale der Gleichung

$$Y'\left(\frac{dA^{-1}}{du}A(u)\right)' u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1). \qquad (19)$$

Beweis. Da für $u \in (0, 1)$

$$\frac{d\,Au}{du} = \frac{dA}{du}u + A = Au\left((1/u)E + A^{-1}\frac{dA}{du}\right) = Au\left((1/u)E - \frac{dA^{-1}}{du}A\right)$$

ist, sehen wir, daß die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}u} = K\left((1/u)\,E - \frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}u}A\right), \qquad u \in (0, 1)$$

für die Anfangsbedingung $K(u_0) = E$ gerade Au zur Lösung hat. Wie bereits bekannt, ist in vorliegendem Falle $mv(u, [uYA(u)]')$ die Menge erster Integrale der Gleichung (19).

Satz 6. *Es sei* $A(u)$ *eine stetige, reguläre Matrix definiert im Intervall* $(0, 1)$ *und* $Z(u)$ *eine Matrix vom Typus* (n/n) *als Lösung der Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = A(u)\,Z, \qquad u \in (0, 1), \tag{20}$$

welche die Anfansbedingung $Z(u_0) = (1/u_0)\,E$ *erfüllt.*

Dann ist die Menge erster Integrale der Gleichung (11) $\mathrm{m}v(u, [uYZ^{-1}(u)]')$.

Beweis. Setzen wir in die Gleichung (20) die Lösung $Z(u)$ ein und präzisieren wir daraus die Matrix $A(u)$. Die Gleichung (11) läßt sich dann umschreiben in die Form

$$Y'\left(\frac{\mathrm{d}(Z^{-1})^{-1}}{\mathrm{d}u}Z^{-1}\right)u_Y = 1, \qquad u \in (0, 1).$$

Nach dem Satz 5 ist die Menge erster Integrale dieser Gleichung und darum auch der Gleichung (11) gleich $\mathrm{m}v(u, [uYZ^{-1}(u)]')$.

Natürlicherweise lassen sich die Sätze 5 und 6 um beliebiges Interval (α, β), $\alpha\beta > 0$ erweitern.

LITERATUR

[1] *Борувка О.:* О колеблющихся интегралов линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. „Чехословацкий математический журнал" т. 3 (78) 1953.

[2] *Boruvka O.:* Základy teorie grupoidů a grup. Praha 1962.

[3] *Kamke E.:* Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1952.

[4] *Палат И.:* О преобразованиях первых интегралов двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. „Acta Universitatis Olomucensis" F. R. N. (wurde zur Publikation angenommen).

[5] *С. Травничек:* О преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Olomucensis" F. R. N., TOM 18, 1965.

SHRNUTÍ

O MNOŽINĚ PRVÝCH INTEGRÁLŮ URČITÉ PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

JINDŘICH PALÁT

V této práci se zkoumají vlastnosti množiny prvých integrálů rovnic typu (1). Dále se odvozuje obecný vzorec pro množinu prvých integrálů téže rovnice.

РЕЗЮМЕ

О МНОЖЕСТВЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАДОВ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ИНДРЖИХ ПАЛАТ

В настоящей работе исследуются свойства множества первых интегралов уравнений типа (1).

Далее приводится общее выражение для множества первых интегралов того же уравнения.