Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček; Jitka Kojecká

Einige Bemerkungen über die Nullstellen im zweidimensionalen Raum stetiger Funktionen

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol. 12 (1972), No. 1, 45--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120015

1972 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 37

*Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci*
*Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Miroslav Laitoch, CSc.*

# EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE NULLSTELLEN IM ZWEIDIMENSIONALEN RAUM STETIGER FUNKTIONEN

STANISLAV TRÁVNÍČEK, JITKA KOJECKÁ-HODINÁŘOVÁ

*(Eingelangt am 22. 12. 1970.)*

*Gewidmet Herrn Prof. Dr. Miroslav Laitoch zum 50. Geburstag*

Infolge der Bedeutung, welche die Nullstellenseparation jeder zwei linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen $y'' = Q(x)y$ in der Dispersionstheorie (Borůvka (1953)) einnimmt, studieren wir nun diese Frage auch in zweidimensionalen Räumen stetiger Funktionen, die von K. Stach untersucht wurden (Stach (1966, 1967, 1968, 1969)).

Unser besonderer Dank gilt Herrn RNDr. K. Stach, CSc., von der Montanistischen Hochschule in Ostrava, für seine wertvolle Ratschläge betreffend dieser Arbeit.

$S$ sei ein regulärer linearer zweidimensionaler Raum stetiger Funktionen mit dem Definitionsintervall $i$. $S$ sei dabei ein Raum vom bestimmten Typus.

*Lemma 1.* Jeder Punkt $t_0 \in i$ ist eine Nullstelle einer bestimmten Funktion $y \in S$.

Beweis: $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$; bezeichnen wir $u(t_0) = k_1$, $v(t_0) = k_2$. Für die Funktion $y(t) = k_2u(t) - k_1v(t)$ gilt dann $y \in S$, $y(t_0) = 0$.

*Lemma 2.* $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$ und $h(t)$ seine Charakteristik, $t_1, t_2 \in i$, $t_1 \neq t_2$. Die Funktion $h(t)$ nimmt dann in den Punkten $t_1, t_2$ denselben Wert an oder ist gleichzeitig in den Punkten $t_1, t_2$ nicht definiert, und dies genau dann, wenn $t_1, t_2$ konjugierte Punkte sind.

Beweis: Sei $h(t_1) = h(t_2) = k$. Für die durch die Beziehung $y(t) = u(t) - kv(t)$ definierte Funktion $y \in S$ gilt dann $y(t_1) = y(t_2) = 0$, so daß $t_1, t_2$ konjugierte Punkte sind. Ist $h(t)$ in den Punkten $t_1, t_2$, nicht definiert, so ist $v(t_1) = v(t_2) = 0$, d. h. $t_1, t_2$ sind wiederum konjugierte Punkte.

Seien umgekehrt $t_1, t_2$ konjugierte Punkte; dann existiert eine Funktion $y \in S$, $y(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$, für die $y(t_1) = y(t_2) = 0$ ist, wobei mindestens eine der Zahlen $c_1, c_2$ von Null verschieden sein muß. Es sei zunächst $c_1 \neq 0$; dann $u(t_j) = -(c_2/c_1)\, v(t_j)$ $(j = 1, 2)$; da $t_j$ reguläre Punkte sind, ist $v(t_j) \neq 0$ und daraus $h(t_j) = u(t_j)/v(t_j) = -c_2/c_1$. Ist $c_1 = 0$, so ist $v(t_j) = 0$, d. h. $h(t_j)$ ist nicht definiert.

*Satz 1.* $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$, $t_1, t_2 \in i$, $t_1 < t_2$ und $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Die Funktion $v(t)$ habe im Intervall $(t_1, t_2)$ genau eine Nullstelle $t_0$ und sei dabei in $t_0$ monoton. Dann besitzt jede Funktion $y \in S$ im Intervall $\langle t_1, t_2)$ wenigstens eine Nullstelle.

Beweis: Betrachten wir eine beliebige Funktion $y \in S$, $y(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$. Die Behauptung gilt offensichtlich für $c_1 = 0$ oder $c_2 = 0$. Es sei ferner $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. In Anbetracht dessen, daß $t_0$ die einzige Nullstelle der

Funktion $v(t)$ im Intervall $\langle t_1, t_2\rangle$ ist und wegen der Monotonie der Funktion $v(t)$ in $t_0$ gilt sgn $v(t_1) = -$sgn $v(t_2)$. Folglich sgn $y(t_1) =$ sgn $c_2$ sgn $v(t_1) = -$sgn $c_2$ sgn $v(t_2) = -$ sgn $y(t_2)$, woraus sich behelfs des 2. Weierstraßschen Satzes bereits die Behauptung ergibt.

*Lemma 3.* $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$, $t_1 < t_2$ seien konjugierte Punkte des Intervalls $i$, wobei für die Funktion $\bar{y} \in S$ gelte: $\bar{y}(t_1) = \bar{y}(t_2) = 0$. Ist $h(t)$ monoton in $(t_1, t_2)$, so sind die Funktionen $\bar{y}(t)$, $v(t)$ linear abhängig.

Beweis: Wegen der Monotonie der Funktion $h(t)$ ist nach Lemma 2 die Funktion $h(t)$ in keinem der Punkte $t_1$, $t_2$ definiert, woraus $v(t_1) = v(t_2) = 0$ folgt. Da der Raum $S$ regulär ist, sind die Funktionen $\bar{y}(t)$, $v(t)$ linear abhängig.

*Lemma 4.* $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$, $t_1 < t_2$ seien konjugierte Punkte des Intervalls $i$ und die Charakteristik $h(t)$ sei in $(t_1, t_2)$ monoton. Dann sind $t_1$, $t_2$ benachbarte konjugierte Punkte.

Beweis: Es existiere ein Punkt $t_0 \in (t_1, t_2)$, konjugiert mit $t_1$, $t_2$. Dann nach Lemma 3 ist $v(t_0) = 0$, so daß $h(t)$ im Punkte $t_0$ nicht definiert ist. Nach Satz 2, 3 (Stach (1966)) sind $\lim_{t \to t_0-} h(t)$, $\lim_{t \to t_0+} h(t)$ unendlich. Dies wiederspricht jedoch der vorausgesetzten Monotonie der Funktion $h(t)$ in $(t_1, t_2)$.

*Satz 2.* $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$, $t_1 < t_2$ seien konjugierte Punkte des Intervalls $i$ und die Charakteristik $h(t)$ des Raumes $S$ in $(t_1, t_2)$ sei monoton. Dann besitzt jede Funktion $y \in S$ im Intervall $\langle t_1, t_2)$ genau eine Nullstelle.

Beweis: Nach Lemma 3 ist $v(t_1) = v(t_2) = 0$, nach Lemma 4 sind $t_1$, $t_2$ benachbarte Nullstellen der Funktion $v(t)$, so daß $h(t)$ in $(t_1, t_2)$ stetig ist. Nach Satz 2,3 (Stach (1966)) sind $\lim_{t \to t_1+} h(t)$ und $\lim_{t \to t_2-} h(t)$ unendlich und hiermit wegen der Monotonie der Funktion $h(t)$ ist notwendig $\lim_{t \to t_1+} h(t) = -\lim_{t \to t_2-} h(t)$. Folglich bildet die Funktion $h(t)$ das Intervall $(t_1, t_2)$ schlicht auf das Intervall $(-\infty, +\infty)$ ab. $y \in S$ sei eine beliebig gegebene Funktion, d. h. für geeignete Konstanten $c_1$, $c_2$ gilt $y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$. Für $c_1 = 0$ ist die Behauptung des Satzes offenbar erfüllt. Für $c_1 \neq 0$ besitzt nach Satz 2,1 (Stach (1966)) die Funktion $y(t)$ eine Nullstelle genau in dem Punkte $t_0$, wo $h(t_0) = -c_2/c_1$. Diesen Wert nimmt aber die Funktion $h(t)$ genau in einem Punkte $t_0 \in (t_1, t_2)$ an, d. h. $y(t)$ besitzt in diesem Intervall genau eine Nullstelle.

*Satz 3.* $(u, v)$ sei eine Basis des Raumes $S$ und $h(t)$ seine Charakteristik; es sei weiter $(\alpha, \beta) \subset i$. Die Funktion $h(t)$ ist in $(\alpha, \beta)$ monoton genau dann, wenn sie in $(\alpha, \beta)$ stetig ist und wenn jede Funktion $y \in S$ in $(\alpha, \beta)$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

Beweis: $h(t)$ sei stetig in $(\alpha, \beta)$ und jede Funktion $y \in S$ habe in $(\alpha, \beta)$ höchstens eine Nullstelle. Alsdann besitzt die Funktion $v(t)$ im Intervall $(\alpha, \beta)$ keine Nullstelle. Die Funktion $h(t)$ bildet das Intervall $(\alpha, \beta)$ auf ein bestimmtes Intervall $(A, B)$ ab. Es sei $k \in (A, B)$; nun zeigen wir, daß $h(t)$ den Wert $k$ gerade in einem Punkte $t_0 \in (\alpha, \beta)$ annimmt. Die Existenz des Punktes $t_0$ ist evident; $t_0$ ist dabei die Nullstelle der Funktion $y(t) = u(t) - kv(t)$. Laut Voraussetzung besitzt diese Funktion in $(\alpha, \beta)$ höchstens eine Nullstelle, so daß die Funktion $h(t)$ den Wert $k$ genau in einem Punkte $t_0$ annimmt. Hiernach ist die Funktion $h(t)$ in $(\alpha, \beta)$ stetig und schlicht und hiemit monoton.

Es sei nun umgekehrt $h(t)$ monoton in $(\alpha, \beta)$. Ersichtlich besitzt dann die Funktion $v(t)$ keine Nullstelle in $(\alpha, \beta)$ und $h(t)$ ist stetig in $(\alpha, \beta)$. Die Funktion $h(t)$ bildet das Intervall $(\alpha, \beta)$ schlicht auf ein bestimmtes Intervall $(A, B)$. Wählen wir eine beliebige Funktion $y \in S$, d. h. es sei für geeignete Konstanten

$c_1, c_2$ $y(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$. Ist $c_1 = 0$, so ist die Behauptung des Satzes erfüllt. Es sei $c_1 \neq 0$; hierauf können zwei folgende Fälle vorkommen:

*a)* $(-c_2/c_1) \in (A, B)$, dann besitzt die Funktion $y(t)$ in $(\alpha, \beta)$ genau eine Nullstelle.

*b)* $(-c_2/c_1) \notin (A, B)$, dann besitzt die Funktion $y(t)$ im Intervall $(\alpha, \beta)$ keine Nullstelle.

*Definition:* Ein System $\{t_k\} : \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ der Punkte des Intervalls $i$ wird *vollständiges System von konjugierten Punkten* genannt genau dann, wenn eine Funktion $y \in S$ so beschaffen besteht, daß $y(t_k) = 0$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots)$, wobei $y(t) \neq 0$ für sämtliche $t \in (i - \bigcup_k \{t_k\})$ ist. Dabei kann im System $\{t_k\}$ eine endliche oder abzählbare Menge von Punkten, die $< t_0$ $(> t_0)$ sind, vorkommen, je nach dem Typus des Raumes $S$.

*Bemerkung 1.* Gemäß Lemma 1 und in bezug darauf, daß $S$ vom bestimmten Typus ist, besteht zu jedem $t_0 \in i$ ein vollständiges System von konjugierten Punkten.

*Satz 4.* $\{t_k\}$ sei ein vollständiges System von konjugierten Punkten eines Definitionsbereichs $i$ des Raumes $S$ und die Charakteristik $h(t)$ des Raumes $S$ sei in jedem Intervall $(t_{k-1}, t_k)$ zunehmend oder in jedem von ihnen abnehmend. Wenn in $\{t_k\}$ eine kleinste Zahl $t^\star$ oder eine größte Zahl $t^{\star\star}$ besteht und wenn $i = (a, b)$ ist, so mögen die gleichen Voraussetzungen über $h(t)$ auch in den Intervallen $(a, t^\star)$, $(t^{\star\star}, b)$ gelten. $y_1(t), y_2(t)$ mögen nun zwei linear unabhängige Funktionen des Raumes $S$ sein. Dann liegt zwischen jeden zwei benachbarten Nullstellen von $y_1(y_2)$ immer genau eine Nullstelle von $y_2(y_1)$ (die Nullstellen von $y_1$ und $y_2$ separieren sich).

Beweis: *a.* Betrachten wir zunächst die Funktionen $y_1(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$, $y_2(t) = cv(t)$, wo $(u, v)$ eine Basis von $S$ und $c_1 \neq 0$ ist. Nach Lemma 3 gilt $v(t_k) = 0$, d. h. $y_2(t_k) = 0$ für alle $t_k \in \{t_k\}$. Nach Satz 2 besitzt die Funktion $y_1(t)$ in jedem Intervall $(t_k, t_{k+1})$ genau eine Nullstelle $t'_k$, wobei offenbar $t'_k \in (t_k, t_{k+1})$. Es gilt somit $\ldots < t_k < t'_k < t_{k+1} < t'_{k+1} < \ldots$ für alle zulässigen Werte von $k$.

*b.* Es liegen nun zwei linear unabhängige Funktionen $y_j(t) = c_{j1}u(t) + c_{j2}v(t)$, $j = 1, 2$, vor, wo $c_{j1} \neq 0$ und wohl

$$\det c_{jl} \neq 0 . \tag{1}$$

Nach Satz 2 besitzt die Funktion $y_1(t)$ in $(t_k, t_{k+1})$ eine Nullstelle $t'_k$, worin die Charakteristik die Werte $h(t'_k) = -c_{12}/c_{11}$ annimmt und entsprechend besitzt die Funktion $y_2(t)$ in $(t_k, t_{k+1})$ eine Nullstelle $t''_k$, worin die Charakteristik die Werte $h(t''_k) = -c_{22}/c_{21}$ annimmt. In bezug auf (1) ist $h(t'_k) \neq h(t''_k)$.

Wenn $h(t)$ zunehmend und $-c_{12}/c_{11} < -c_{22}/c_{21}$ oder $h(t)$ abnehmend und $-c_{12}/c_{11} > -c_{22}/c_{21}$ ist, so ist $t'_k < t''_k$ und für alle zulässigen $k$ gilt $\ldots < t_k < t'_k < t''_k < t_{k+1} < t'_{k+1} < t''_{k+1} < \ldots$

Wenn $h(t)$ zunehmend und $-c_{12}/c_{11} > -c_{22}/c_{21}$ oder $h(t)$ abnehmend und $-c_{12}/c_{11} < -c_{22}/c_{21}$ ist, so ist $t''_k < t'_k$ und für alle zulässigen $k$ gilt $\ldots < t_k < t''_k < t'_k < t_{k+1} < t''_{k+1} < t'_{k+1} < \ldots$

In beiden Fällen werden sich also die Nullstellen der Funktionen $y_1(t), y_2(t)$ separieren.

Besteht eine kleinste Nullstelle $t^\star$ oder eine größte Nullstelle $t^{\star\star}$ des Systems $\{t_k\}$, so ist es möglich mittels Satz 3 eine analoge Betrachtung für die Intervalle $(a, t^\star)$ bzw. $(t^{\star\star}, b)$ herleiten.

*Satz 5.* $\{t_k\}$ bilde ein vollständiges System von konjugierten Punkten, welche die Nullstellen der Funktion $v(t)$ einer Basis $(u, v)$ des Raumes $S$ darstellen und die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S$ mögen sich separieren. Dann ist die Charakteristik $h(t)$ in jedem Intervall $(t_k, t_{k+1})$ (bzw. $(a, t^\star)$ bzw. $(t^{\star\star}, b)$, wo $t^\star$, $t^{\star\star}$ im Satz 4 definierte Zahlen sind) zunehmend oder in jedem von diesen Intervallen abnehmend.

Beweis: Die Funktion $h(t)$ ist in jedem Intervall $(t_k, t_{k+1})$ stetig und dabei besitzt jede von $v(t)$ unabhängige Funktion $y \in S$ hier genau eine Nullstelle (im Intervall $(a, t^\star)$ bzw. $(t^{\star\star}, b)$ höchstens eine Nullstelle). Nach Satz 3 ist also $h(t)$ in jedem Intervall $(t_k, t_{k+1})$ und auch in $(a, t^\star)$ bzw. $(t^{\star\star}, b)$ monoton. Wählen wir nun $k$ und zwei beliebige Punkte $t'_k < t''_k$ im Intervall $(t_k, t_{k+1})$. Gemäß Lemma 1 existieren die Funktionen $y_j(t) = c_{j1}u(t) + c_{j2}v(t)$, $j = 1, 2$, derart, daß $y_1(t'_k) = 0$, $y_2(t''_k) = 0$. Offenbar sind $c_{11} \neq 0$, $c_{21} \neq 0$ und beide Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ sind linear unabhängig. Es gilt $h(t'_k) = -c_{12}/c_{11}$, $h(t''_k) = -c_{22}/c_{21}$.

Wenn $-c_{12}/c_{11} < -c_{22}/c_{21}$ ist, so ist die Funktion $h(t)$ zunehmend in $(t_k, t_{k+1})$. Wäre die Funktion $h(t)$ im Intervall $(t_{k+1}, t_{k+2})$ abnehmend, dann würde wegen der Ungleichheit zwischen den Funktionswerten $t''_{k+1} < t'_{k+1}$ gelten; dann würde zwischen den Nullstellen $t''_k$, $t''_{k+1}$ der Funktion $y_2(t)$ keine Nullstelle der Funktion $y_1(t)$ bestehen, was zu einem Widerspruch führt. Folglich ist $h(t)$ auch im Intervall $(t_{k+1}, t_{k+2})$ zunehmend. Durch ähnliche Überlegung ergibt sich, daß $h(t)$ zunehmend auch in $(t_{k-1}, t_k)$ ist, also in $(t_k, t_{k+1})$ für alle zulässigen $k$. Diese Überlegung läßt sich auch auf Intervalle $(a, t^\star)$, $(t^{\star\star}, b)$ anwenden.

Wenn $-c_{12}/c_{11} > -c_{22}/c_{21}$ ist, so kann man ähnlich beweisen, daß $h(t)$ in jedem obbetrachteten Intervalle eine abnehmende Funktion ist.

*Satz 6.* Die Funktion $v(t)$ habe im Intervall $i = (a, b)$ genau $m$ Nullstellen $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ und es gelte eine von den Behauptungen:

(*a*) die Charakteristik $h(t)$ ist in jedem der Intervalle $(a, t_1)$, $(t_1, t_2)$, $\ldots$, $(t_{m-1}, t_m)$, $(t_m, b)$ zunehmend oder in jedem von ihnen abnehmend.

(*b*) Die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S$ separieren sich.

Dann gilt auch die zweite Behauptung und der Raum $S$ ist vom Typus $m$ oder $m + 1$.

Beweis: Nach Satz 4 und Satz 5 sind die Behauptungen (*a*), (*b*) gleichbedeutend. Jede Funktion $y \in S$ besitzt im Intervall $\langle t_1, t_m\rangle$ gerade $m - 1$ Nullstellen. In jedem der Intervalle $(a, t_1)$, $\langle t_m, b)$ kann die Funktion $y(t)$ gemäß Satz 3 höchstens je eine Nullstelle besitzen, d. h. sie kann höchstens $m + 1$ Nullstellen haben. Da die Funktion $v(t)$ genau $m$ Nullstellen besitzt, kann der Raum $S$ nur vom Typus $m$ oder $m + 1$ sein.

*Lemma 5.* $\{t_k\}$ bilde ein vollständiges System von konjugierten Punkten, welche die Nullstellen der Funktion $v(t)$ der Basis $(u, v)$ des Raumes $S$ darstellen. Dann ist die Charakteristik $h(t)$ in jedem Intervall $(t_k, t_{k+1})$ (und ebenso in $(a, t^\star)$ bzw. $(t^{\star\star}, b)$) zunehmend [abnehmend] genau dann, wenn jede Phase des Raumes $S$ die zur Basis $(u, v)$ gehört, in $i = (a, b)$ wachsend [abnehmend] ist.

Beweis: $h(t)$ sei zunächst in jedem der betrachteten Intervalle wachsend; dann folgt unmittelbar aus R 2,1, R 2,2 (Stach (1966)), daß jede Phase $\alpha(t)$ innerhalb dieser Intervalle wächst. Ferner sehen wir, daß im Satz 2,4 (Stach (1966)) der Fall $d$ auftritt, d. h. für $t'_1 \in \langle t_k, t_{k+1})$, $t'_2 \in \langle t_{k+1}, t_{k+2})$ gilt $\alpha(t'_1) < \alpha(t'_2)$, woraus die Behauptung folgt. Für die abnehmenden Charakteristiken erhalten wir den Fall $c$ aus Satz 2,4 (Stach (1966)) und der Beweis ist analog.

Es sei nun umgekehrt die Phase $\alpha(t)$ wachsend. Dann geht das Wachsen der Charakteristik im Innern jeder der betrachteten Intervalle aus R 2,1 (Stach (1966)) hervor. Entsprechendes gilt für die abnehmende Phase.

*Lemma 6.* Es existiere eine Phase $\alpha(t)$ des Raumes $S$, monoton im Intervall $i$. Dann ist jede Phase des Raumes $S$ eine monotone Funktion in $i$.

Beweis: $\alpha(t)$ sei eine beliebige Phase des Raumes $S$. Wenn sie nicht monoton ist, dann kommt im Innern des Intervalls $i$ wenigstens ein Extrempunkt vor, der nach Satz 3,1 (Stach (1966)) auch Extrempunkt für die Phase $\alpha(t)$ ist, was jedoch einen Widerspruch ergibt.

*Satz 7.* Die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S$ separieren sich genau dann, wenn eine im ganzen Intervall $i$ monotone Phase $\alpha(t)$ des Raumes existiert.

Beweis: Die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S$ mögen sich separieren. Nach Satz 5 und Lemma 5 sind dann für die gegebene Basis $(u, v)$ die zugehörigen Phasen monoton. Besteht umgekehrt eine Phase $\alpha(t)$ des Raumes $S$, die monoton ist, dann sind nach Lemma 6 alle Phasen monoton und nach Lemma 5 und Satz 4 separieren sich die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S$.

*Satz 8.* Es bestehe eine Funktion $y \in S$ derart, daß sie genau $m$ Nullstellen besitzt und eine im ganzen Intervall $i$ monotone Phase $\alpha(t)$ des Raumes $S$. Dann ist der Raum $S$ vom Typus $m$ oder $m + 1$.

Beweis geht aus Lemma 6 und aus Sätzen 6 & 7 hervor.

Im folgenden werden wir zwei zweidimensionale Räume stetiger Funktionen $S_1$ mit einem Definitionsbereich $i_1$ und $S_2$ mit einem Definitionsbereich $i_2$ betrachten.

*Satz 9.* Es sei $T(z; x; j_1; j_2), j_1 \subset i_1, j_2 \subset i_2$ eine Transformation des Raumes $S_1$ auf $S_2$ mit einer monotonen Amplitude $x(t)$. Die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S_1$ im Intervall $j_1$ werden sich separieren genau dann, wenn sich die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S_2$ im Intervall $j_2$ separieren.

Beweis: Die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen des Raumes $S_1$ mögen sich separieren. Gemäß Satz 7 existiert eine im ganzen Intervall $j_1$ monotone Phase $\alpha_1(t)$ des Raumes $S_1$. Nach S. 4,9, S. 3,1 (Stach (1966)) sind alle Phasen des Raumes $S_2$ in $j_2$ monoton, folglich gilt die Behauptung des Satzes 7 für den Raum $S_2$. Die Umkehrung dieses Satzes folgt aus der Existenz der inversen Transformation, S. 4,7 (Stach (1966)).

*Satz 10.* Es bestehe eine vollständige Transformation $T(z, x)$ des Raumes $S_1$ auf den Raum $S_2$. Die Nullstellen jeder zwei linear unabhängigen Funktionen aus $S_1$ werden sich separieren genau dann, wenn das gleiche in Raume $S_2$ gilt.

Beweis geht aus Satz 9 und D. 3,1 (Stach (1967)) hervor. (Vergleiche S. 3,4 (Stach (1969)).

## LITERATURVERZEICHNIS

[1] *O. Borůvka:* O kolebljuščichsja intergralach differencialnych linejnych uravnenij 2-ogo porjadka. „Čech. mat. ž." t. 3 (78) 1953, 199—251.
[2] *K. Stach:* Die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. „Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně" (Brno) No 478, 1966, 389—410.
[3] *K. Stach:* Die vollständigen Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen. „Archivum Math." (Brno) t. 3, Fasc. 3, 1967, 117—138.
[4] *K. Stach:* Die Kummerschen Transformationen in Räumen mit abgeschlossenen Phasen. Teil A: Allgemeine Eigenschaften. „Spisy přírodov. fak. Univ. J. E. Purkyně v Brně" t. 4, 1968, 141—156.
[5] *K. Stach:* Die Kummerschen Transformationen in Räumen mit abgeschlossenen Phasen. Teil B: Transformationen in Räumen der gegebenen Klasse. „Spisy přírodov. fak. Univ. J. E. Purkyně v Brně" t. 5, 1969, 61—73.

SHRNUTÍ

# POZNÁMKY O NULOVÝCH BODECH V DVOJROZMĚRNÉM PROSTORU SPOJITÝCH FUNKCÍ

STANISLAV TRÁVNÍČEK, JITKA KOJECKÁ-HODINÁŘOVÁ

Vzhledem k tomu, jaký význam má oddělování nulových bodů každých dvou lineárně nezávislých řešení diferenciální rovnice $y'' = Q(x)y$ pro teorii dispersí (Borůvka (1953)), zabývali jsme se touto otázkou i u dvojrozměrných prostorů spojitých funkcí studovaných K. Stachem (Stach (1966, 1967, 1968, 1969)).

Nechť $S$ je regulární lineární dvojrozměrný prostor spojitých funkcí s definičním oborem $i$, přičemž $S$ je prostorem určitého typu. Nechť $h(t)$ je charakteristika a $\alpha(t)$ fáze prostoru $S$ příslušná k bázi $(u, v)$. Nejprve se studuje vztah mezi oddělováním nulových bodů a průběhem charakteristiky (věty 1, 2, 3, 4, 5) a souvislost s typem prostoru $S$ (věta 6). Pro fáze pak plynou tyto závěry:

*Věta 7.* Nulové body každých dvou lineárně nezávislých funkcí prostoru $S$ se oddělují, právě když existuje fáze $\alpha(t)$ prostoru $S$ monotonní v celém intervalu $i$.

*Věta 8.* Nechť existuje funkce $y \in S$ tak, že má právě $m$ nulových bodů a nechť existuje fáze $\alpha(t)$ prostoru $S$ monotonní v celém intervalu $i$. Pak prostor $S$ je typu $m$ nebo $m + 1$.

Další věty pojednávají a oddělování nulových bodů při transformacích prostoru $S_1$ s definičním intervalem $i_1$ na prostor $S_2$ s definičním intervalem $i_2$.

*Věta 9.* Nechť $T(z; x; j_1; j_2;)$, $j_1 \subset i_1$, $j_2 \subset i_2$ je transformace prostoru $S_1$ na $S_2$ s monotonní amplitudou $x(t)$. Nulové body každých dvou lineárně nezávislých funkcí prostoru $S_1$ se na $j_1$ oddělují, právě když se oddělují nulové body každých dvou lineárně nezávislých funkcí prostoru $S_2$ na $j_2$.

*Věta 10.* Nechť existuje úplná transformace $T(z; x)$ prostoru $S_1$ na prostor $S_2$. Nulové body každých dvou lineárně nezávislých funkcí prostoru $S_1$ se oddělují, právě když platí totéž o prostoru $S_2$.