

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Pavel Chmela

Geometrisch-optische Berechnung der Synchronisationsrichtungen der ersten und zweiten harmonischen Frequenz in nichtlinearen anisotropen Kristallen

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 11 (1971), No. 1, 253--287

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119944>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Laboratoř optiky přirodovědecké fakulty
Vedoucí laboratoře: prof. RNDr. et DrSc. Bedřich Havelka*

**GEOMETRISCH-OPTISCHE BERECHNUNG
DER SYNCHRONISATIONSRICHTUNGEN DER ERSTEN
UND ZWEITEN HARMONISCHEN FREQUENZ
IN NICHTLINEAREN ANISOTROPEN KRISTALLEN**

PAVEL CHMELA
(Eingelangt am 4. 3. 1970)

I. EINLEITUNG

Beim Durchgang von intensiver Laser-Strahlung durch optische Kristalle, die kein Inversionszentrum besitzen, entsteht die zweite harmonische Frequenz, d. h., eine durch das nichtlineare Medium laufende elektromagnetische Welle der Frequenz ω bringt die elektromagnetische Welle mit der Frequenz 2ω hervor. Diesen Effekt entdeckte zum erstenmal im Jahre 1961 P. A. Franken [2], der die Entstehung der ultravioletten Strahlung $\lambda = 3\,470 \text{ \AA}$ beim Durchgang der Strahlung des Rubinlasers $\lambda = 6\,943 \text{ \AA}$ durch Quarz beobachtet hatte.

Die Entstehung der zweiten harmonischen Frequenz ist ein spezieller Fall der Entstehung der Summe- oder Differenzfrequenz $\omega_1 + \omega_2$ oder $\omega_1 - \omega_2$ bei der Wechselwirkung zweier Wellen mit Frequenzen ω_1 und ω_2 .

In diesem Artikel beschränken wir uns auf das Studium der Synchronisation der Phasen bei der Entstehung der zweiten harmonischen Frequenz, d. h. auf den Fall, wenn zwei Wellen der Grundfrequenz ω eine Welle mit der zweiten harmonischen Frequenz 2ω hervorbringen.

Die Wechselwirkung zweier Wellen mit der Grundfrequenz ω und einer Welle mit der zweiten harmonischen Frequenz 2ω beschreiben vier Differentialgleichungen [5, 7, 8]:

$$\frac{d\varrho_1}{d\zeta} = -\sigma_1 \varrho_2 \varrho_3 \sin \Theta, \quad (1)$$

$$\frac{d\varrho_2}{d\zeta} = -\sigma_2 \varrho_1 \varrho_3 \sin \Theta, \quad (2)$$

$$\frac{d\varrho_3}{d\zeta} = \sigma_3 \varrho_1 \varrho_2 \sin \Theta, \quad (3)$$

$$\frac{d\Theta}{d\zeta} = \Delta k + \left(\sigma_3 \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_3} - \sigma_2 \frac{\varrho_1 \varrho_3}{\varrho_2} - \sigma_1 \frac{\varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1} \right) \cos \Theta. \quad (4)$$

Dabei gilt der Energiesatz

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_1^2}{\sigma_1} + \frac{\varrho_2^2}{\sigma_2} \right) + \frac{\varrho_3^2}{\sigma_3} = \text{konst.} \quad (5)$$

Hier haben wir nachstehende Bezeichnungen verwandt: μ_0 ist die magnetische Permeabilität des Vakuums im SI-System,

$$A_1(\zeta) = \varrho_1(\zeta) e^{i\varphi_1(\zeta)},$$

$$A_2(\zeta) = \varrho_2(\zeta) e^{i\varphi_2(\zeta)},$$

sind die komplexen Amplituden beider Grundfrequenzwellen und

$$A_3(\zeta) = \varrho_3(\zeta) e^{i\varphi_3(\zeta)},$$

ist die komplexe Amplitude der zweiten harmonischen Frequenzwelle;

$$\sigma_1 = \frac{\omega^2 \mu_0 K}{|k_1| \cos \delta_1 \cos \beta'_1}, \quad \sigma_2 = \frac{\omega^2 \mu_0 K}{|k_2| \cos \delta_2 \cos \beta'_2}$$

$$\sigma_3 = \frac{4\omega^2 \mu_0 K}{|k_3| \cos \delta_3 \cos \beta'_3},$$

wo

$$K = \frac{1}{2} \sum_{ijk} e_{1i} \chi_{ijk}(\omega = 2\omega - \omega) e_{3j} e_{2k} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kji} e_{2k} \chi_{kji}(\omega = 2\omega - \omega) e_{3j} e_{1i} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{jik} e_{3j} \chi_{jik}(2\omega = \omega + \omega) e_{1i} e_{2k}$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$j = 1, 2, 3,$$

$$k = 1, 2, 3,$$

ist, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sind die Schwingungseinheitsvektoren der Grundfrequenzwellen, \mathbf{e}_3 ist der Schwingungseinheitsvektor der zweiten harmonischen Frequenzwelle und $\chi(2\omega = \omega + \omega), \chi(\omega = 2\omega - \omega)$ sind die Tensoren der nichtlinearen Suszeptibilität der zweiten Ordnung,

$$\Theta = \Delta k \zeta + \varphi_3(\zeta) - \varphi_2(\zeta) - \varphi_1(\zeta).$$

Mit $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ haben wir die Winkel zwischen den Wellenvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ und den entsprechenden Richtungen des Poyntingschen Vektors $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ und mit $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ die Brechungswinkel der Strahlenrichtungen bezeichnet.

Die Wellenvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ sind wie folgt gegeben:

$$\mathbf{k}_1(\omega) = \frac{\omega}{c} n_1(\omega, \mathbf{s}_1) \mathbf{s}_1,$$

$$\mathbf{k}_2(\omega) = \frac{\omega}{c} n_j(\omega, \mathbf{s}_2) \mathbf{s}_2, \quad (6)$$

$$\mathbf{k}_3(2\omega) = \frac{2\omega}{c} n_k(2\omega, \mathbf{s}_3) \mathbf{s}_3,$$

$$i = \text{I, II},$$

$$j = \text{I, II},$$

$$k = \text{I, II},$$

wo mit $n_i(\omega, \mathbf{s}_1)$, $n_j(\omega, \mathbf{s}_2)$, $n_k(2\omega, \mathbf{s}_3)$ die Brechungsindizes des anisotropen Mediums in den Normalenrichtungen \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 , \mathbf{s}_3 bezeichnet sind.

Das Hauptkoordinatensystem ξ, η, ζ ist so orientiert, daß die ζ -Koordinate die Normale an der Grenzfläche zwischen dem linearen und nichtlinearen Medium bildet.

Für die Komponenten der Wellenvektoren gilt im Hinblick auf Bedingungen der Stetigkeit an der Grenze [7, 8]

$$\begin{aligned} k_{1\xi}(\omega) + k_{2\xi}(\omega) &= k_{3\xi}(2\omega), \\ k_{1\eta}(\omega) + k_{2\eta}(\omega) &= k_{3\eta}(2\omega), \\ \Delta k &= k_{3\xi}(2\omega) - k_{2\xi}(\omega) - k_{1\xi}(\omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1-4) ist durch das elliptische Integral

$$\zeta = \pm \frac{1}{2(M\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^{\frac{1}{2}}} \int_{w^2(0)}^{w^2(\zeta)} \frac{d(w^2)}{\left[w^2(w^4 - 2w^2 + a) - \left(2\Gamma - \frac{\Delta s}{2} w^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

gegeben, wo

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varrho_3}{(M\sigma_3)^{\frac{1}{2}}}, \\ M &= \frac{1}{2} \left[\frac{\varrho_1^2(0)}{\sigma_1} + \frac{\varrho_2^2(0)}{\sigma_2} \right] + \frac{\varrho_3^2(0)}{\sigma_3}, \\ \Gamma &= \frac{\varrho_3(0)}{2M^{\frac{1}{2}}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \varrho_1(0)\varrho_2(0) \cos [\varphi_3(0) - \varphi_2(0) - \varphi_1(0)] + \frac{1}{2} \frac{\varrho_3(0)}{\sigma_3} \Delta k \right\}, \\ a &= \frac{\varrho_1^2(0)\varrho_2^2(0)}{M^2\sigma_1\sigma_2}, \\ \Delta s &= \frac{\Delta k}{(M\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

bezeichnet ist.

Man kann zeigen, daß es zum systematischen nichtperiodischen Energiewechsel zwischen der ersten und zweiten harmonischen Frequenz nur unter folgenden Voraus-

setzungen kommen kann:

$$\Delta k = 0, \\ \varrho_1(0) = \varrho_2(0) = \varrho_0, \quad \varrho_3(0) = 0.$$

Wenn also alle drei Wellen räumlich unbegrenzt sind, kommt es unter diesen Bedingungen zum systematischen Energiewechsel und die Veränderung aller drei Amplituden in der Abhängigkeit von der Normalenentfernung von der Grenze ζ beschreiben folgende Funktionen:

$$\varrho_1(\zeta) = \frac{B_1 \varrho_0}{\cosh C \varrho_0 \zeta}, \quad (9)$$

$$\varrho_2(\zeta) = \frac{B_2 \varrho_0}{\cosh C \varrho_0 \zeta}, \quad (10)$$

$$\varrho_3(\zeta) = B_3 \varrho_0 \operatorname{tgh} C \varrho_0 \zeta \quad (11)$$

wo wir

$$C = \left[\frac{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \right]^{1/2}, \\ B_1 = \left[\frac{\sigma_1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \right]^{1/2}, \\ B_2 = \left[\frac{\sigma_2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \right]^{1/2}, \\ B_3 = \left[\frac{\sigma_3}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \right]^{1/2}.$$

bezeichnet haben.

In dieser Arbeit werden wir uns mit der Bestimmung der Synchronisationsrichtungen beschäftigen, d. h. der Richtungen, für die

$$\Delta k = 0,$$

oder

$$n_i(\omega, \mathbf{s}_1) \mathbf{s}_1 + n_j(\omega, \mathbf{s}_2) \mathbf{s}_2 = 2n_k(2\omega, \mathbf{s}_3) \mathbf{s}_3, \quad (12)$$

$$i = \text{I, II,}$$

$$j = \text{I, II,}$$

$$k = \text{I, II,}$$

ist. Weiter beschäftigen wir uns mit der genauen Berechnung der zur Synchronisationsrichtung zugehörigen Strahlenrichtungen und Schwingungsrichtungen. Am Ende des Artikels nehmen wir die Aperturereffekte in Betracht, die in konkreten Experimenten vorkommen.



Obr. 1. Doc. PhDr. Bohumil Hacar

(Foto dr. Jan Kunzfeld)

II. ALLGEMEINE LÖSUNG DES PROBLEMS DER SYNCHRONISATION

In einem anisotropen Medium entsprechen im allgemeinen Falle jeder Normalenrichtung \mathbf{s} zwei Brechungsindizes $n_I(\mathbf{s})$, $n_{II}(\mathbf{s})$.

Wir Bezeichnen mit n_1 , n_2 , n_3 die Hauptbrechungsindizes des Kristalls. Die Brechungsindizes $n_I(\mathbf{s})$, $n_{II}(\mathbf{s})$ können wir im Hauptkoordinatensystem des Kristalls x , y , z entweder explizit ausdrücken [1]

$$\frac{1}{n_{I,II}^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2} \right) \cos^2 \alpha_x + \left(\frac{1}{n_3^2} + \frac{1}{n_1^2} \right) \cos^2 \alpha_y + \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) \cos^2 \alpha_z \pm (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - 2G_1G_2 - 2G_1G_3 - 2G_2G_3)^{1/2} \right] \quad (13)$$

(das Zeichen + entspricht dem Index I, das Zeichen - entspricht dem Index II), wo wir $\cos \alpha_x$, $\cos \alpha_y$, $\cos \alpha_z$ die Richtungskosinusse der Normalenrichtung \mathbf{s} und

$$G_1 = \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2} \right) \cos^2 \alpha_x,$$

$$G_2 = \left(\frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \cos^2 \alpha_y,$$

$$G_3 = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \cos^2 \alpha_z,$$

bezeichnet haben, oder wir können den Brechungsindex mit der Fläche vierten Grades [1]

$$F(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{x^2}{n_2^2 n_3^2} + \frac{y^2}{n_3^2 n_1^2} + \frac{z^2}{n_1^2 n_2^2} \right) - \left(\frac{1}{n_3^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) x^2 - \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_3^2} \right) y^2 - \left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_1^2} \right) z^2 + 1 = 0. \quad (14)$$

definieren. Beide Definitionen sind äquivalent.

Wegen Vereinfachung treffen wir für weitere Anwendung folgende Bezeichnungen:

Die Hauptbrechungsindizes der Grundfrequenz ω bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben:

$$n_1(\omega) \equiv n_1,$$

$$n_2(\omega) \equiv n_2,$$

$$n_3(\omega) \equiv n_3,$$

und ähnlich die Brechungsindizes der Grundfrequenz ω in der Normalenrichtung \mathbf{s} :

$$n_I(\omega, \mathbf{s}) \equiv n_I(\mathbf{s}),$$

$$n_{II}(\omega, \mathbf{s}) \equiv n_{II}(\mathbf{s}).$$

Die Hauptbrechungsindizes der zweiten harmonischen Frequenz 2ω bezeichnen wir mit großen Buchstaben:

$$\begin{aligned}n_1(2\omega) &\equiv N_1, \\n_2(2\omega) &\equiv N_2, \\n_3(2\omega) &\equiv N_3,\end{aligned}$$

und ähnlich die Brechungsindizes der zweiten harmonischen Frequenz in der Normalenrichtung \mathbf{s} :

$$\begin{aligned}n_1(2\omega, \mathbf{s}) &\equiv N_1(\mathbf{s}), \\n_{11}(2\omega, \mathbf{s}) &\equiv N_{11}(\mathbf{s}).\end{aligned}$$

Das Hauptkoordinatensystem x, y, z orientieren wir so, daß es gilt:

$$\begin{aligned}n_3 &> n_2 > n_1, \\N_3 &> N_2 > N_1.\end{aligned}$$

Wenn wir die Richtungen bestimmen wollen, in denen es zur Synchronisation der Phasen kommt, ist es nötig, solche Kombinationen der Wellenvektoren $\mathbf{k}_1(\omega)$, $\mathbf{k}_2(\omega)$, $\mathbf{k}_3(2\omega)$ festzustellen, für die die Synchronisationsbedingung (12), d. h.

$$\begin{aligned}n_j(\mathbf{s}_1) \mathbf{s}_1 + n_j(\mathbf{s}_2) \mathbf{s}_2 &= 2N_k(\mathbf{s}_3) \mathbf{s}_3 & (15) \\i &= \text{I, II}, \\j &= \text{I, II}, \\k &= \text{I, II},\end{aligned}$$

erfüllt ist.

Wir nehmen an, daß die Dispersion normal ist und für das ganze Frequenzgebiet, das wir betrachten, gelten die Drudeschen Dispersionsformeln. Für die Hauptbrechungsindizes gilt also:

$$\begin{aligned}N_i(\mathbf{s}) &> n_i(\mathbf{s}) \\i &= \text{I, II},\end{aligned} \tag{16}$$

und für die Brechungsindizes im Hinblick auf (13):

$$\begin{aligned}n_{11}(\mathbf{s}) &\geq n_1(\mathbf{s}), \\N_{11}(\mathbf{s}) &\geq N_1(\mathbf{s}).\end{aligned} \tag{17}$$

Auf Grund der Relationen (16) und (17) stellen wir dann durch ein einfaches Verfahren fest, daß die Synchronisationsbedingung (15) nur in zwei Fällen erfüllt werden kann, und zwar für

$$n_{11}(\mathbf{s}_1) \mathbf{s}_1 + n_{11}(\mathbf{s}_2) \mathbf{s}_2 = 2N_1(\mathbf{s}_3) \mathbf{s}_3, \tag{18}$$

und

$$n_1(\mathbf{s}_1) \mathbf{s}_1 + n_{11}(\mathbf{s}_2) \mathbf{s}_2 = 2N_1(\mathbf{s}_3) \mathbf{s}_3, \tag{19}$$

(s. Abb. 1. und Abb. 2.).

Die genaue explizite Bestimmung der Richtungen $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, die irgendeine der Synchronisationsbedingungen (18) und (19) erfüllen, können wir leider nicht durchführen. Es ist bloß möglich, die allgemeinen Bedingungen festzustellen, die die Synchronisationsrichtungen erfüllen müssen. Auf Grund dieser Bedingungen wäre es möglich, die Synchronisationsrichtungen mit Hilfe der approximativen Methoden auf der Rechenmaschine zu bestimmen.

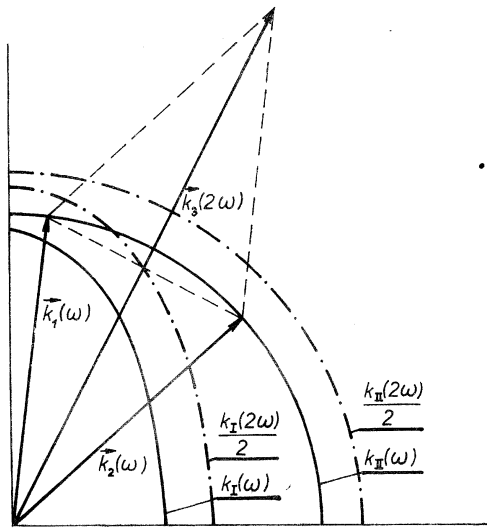


Abb. 1. Synchronisation der Phasen bei der Bedingung
 $n_1(\mathbf{s}_1)\mathbf{s}_1 + n_1(\mathbf{s}_2)\mathbf{s}_2 = 2N_1(\mathbf{s}_3)\mathbf{s}_3$.

An dem inneren Teil der Indexfläche $N_1(2\omega)$ wählen wir einen Punkt $A(x_0, y_0, z_0)$, für dessen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= N_1(\mathbf{s}_3) \cos \alpha_{3x}, \\ y_0 &= N_1(\mathbf{s}_3) \cos \alpha_{3y}, \\ z_0 &= N_1(\mathbf{s}_3) \cos \alpha_{3z}. \end{aligned} \quad (20)$$

Wir betrachten einen Büchsel der durch den Punkt A gehenden Abszissen mit den Endpunkten $B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ so, daß gilt

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + r \cos \gamma_x, & x_2 &= x_0 - r \cos \gamma_x, \\
 y_1 &= y_0 + r \cos \gamma_y, & y_2 &= y_0 - r \cos \gamma_y, \\
 z_1 &= z_0 + r \cos \gamma_z, & z_2 &= z_0 - r \cos \gamma_z.
 \end{aligned}$$

Die Endpunkte B und C dieser Abszissen liegen auf der Indexfläche $n(\omega)$ (14) damals, wenn

$$F(\omega, x_1, y_1, z_1) \equiv F_1(\omega, r, \cos \gamma_x, \cos \gamma_y, \cos \gamma_z) = 0, \quad (21)$$

und

$$F(\omega, x_2, y_2, z_2) \equiv F_2(\omega, r, \cos \gamma_x, \cos \gamma_y, \cos \gamma_z) = 0, \quad (22)$$

gilt.

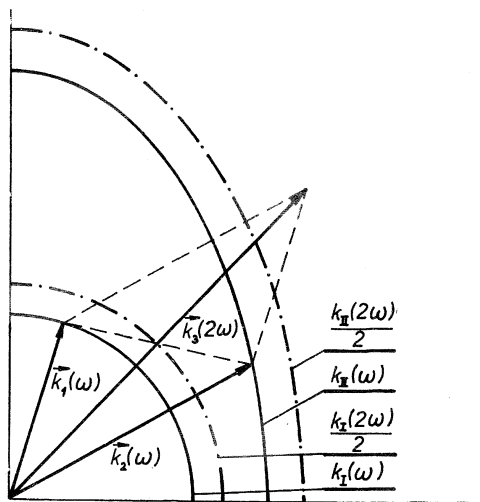


Abb. 2. Synchronisation der Phasen bei der Bedingung $n_1(s_1) s_1 + n_1(s_2) s_2 = 2N_1(s_3) s_3$.

Die Richtungskosinusse $\cos \gamma_x, \cos \gamma_y, \cos \gamma_z$ erfüllen die Bedingung

$$\cos^2 \gamma_x + \cos^2 \gamma_y + \cos^2 \gamma_z = 1. \quad (23)$$

So haben wir drei Gleichungen für vier Parameter $r, \cos \gamma_x, \cos \gamma_y, \cos \gamma_z$.

Wenn es uns also gelingt, solche Parameter $r, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ zu finden, die gleichzeitig die Gleichungen (21), (22), (23) erfüllen, dann gibt es zwei durch die Endpunkte

$B(x_1, y_1, z_1)$, $C(x_2, y_2, z_2)$ bestimmte Normalenrichtungen der Grundfrequenz ω $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ und eine durch den Punkt $A(x_0, y_0, z_0)$ bestimmte Normalenrichtung der zweiten harmonischen Frequenz 2ω \mathbf{s}_3 , wobei diese Richtungen irgendeine von den Synchronisationsbedingungen (18) und (19) erfüllen.

Entsprechende Strahlenrichtungen und Schwingungsrichtungen kann man auf Grund der Formeln feststellen, die wir in IV. Kapitel dieser Arbeit anführen.

Eine besondere Bedeutung haben solche Fälle, wenn alle drei Normalenrichtungen $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$, für die die Synchronisationsbedingung erfüllt ist, übereinstimmen, d. h.

$$\mathbf{s}_1(\omega) \equiv \mathbf{s}_2(\omega) \equiv \mathbf{s}_3(2\omega) \equiv \mathbf{s}. \quad (24)$$

Für einen solchen Fall erhalten die Synchronisationsbedingungen (18) und (19) die Form

$$n_{II}(\mathbf{s}) = N_I(\mathbf{s}), \quad (25)$$

und

$$n_I(\mathbf{s}) + n_{II}(\mathbf{s}) = 2N_I(\mathbf{s}). \quad (26)$$

Der erste Fall (25) entspricht der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle und hat für praktische Anwendung besonders große Bedeutung.

Mit beiden Fällen der Synchronisation (25) und (26) werden wir uns im folgenden Kapitel ausführlich beschäftigen.

III. SYNCHRONISATION BEI DER ÜBEREINSTIMMUNG DER NORMALENRICHTUNGEN

Wir nehmen an, daß die Normalenrichtungen aller drei Wellen übereinstimmen.

Jetzt suchen wir in einem anisotropen Kristall solche Normalenrichtung \mathbf{s} , für die eine von den Synchronisationsbedingungen (25), (26) erfüllt ist.

Für die Bestimmung der Synchronisationsrichtungen in zweiachsigen Kristallen ist es vorteilhaft, die Polarkoordinaten ε und φ einzuführen (s. Abb. 3.):

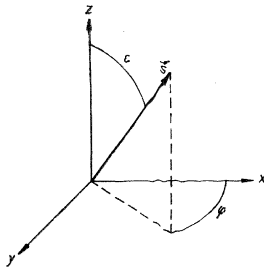


Abb. 3. Zur Einführung der Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} \cos \alpha_x &= \sin \varepsilon \cos \varphi \\ \cos \alpha_y &= \sin \varepsilon \sin \varphi \\ \cos \alpha_z &= \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (27)$$

Weiter bezeichnen wir folgende Größen:

$$A_1 = \frac{1}{n_1^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{n_2^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{n_3^2} - \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2},$$

$$B_1 = \frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2},$$

$$M_1 = \frac{1}{n_1^4} \cos^4 \varphi + \frac{1}{n_2^4} \sin^4 \varphi + \frac{1}{n_3^4} + \frac{2}{n_1^2 n_2^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \\ - \frac{2}{n_2^2 n_3^2} \sin^2 \varphi - \frac{2}{n_1^2 n_3^2} \cos^2 \varphi,$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^2,$$

$$Q_1 = \frac{1}{n_1^4} \cos^2 \varphi + \frac{1}{n_2^4} \sin^2 \varphi - \frac{1}{n_1^2 n_2^2} - \frac{1}{n_3^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

$$A_2 = \frac{1}{N_1^2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{N_2^2} \cos^2 \varphi + \frac{1}{N_3^2} - \frac{1}{N_2^2} - \frac{1}{N_1^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{N_1^2} + \frac{1}{N_2^2},$$

$$M_2 = \frac{1}{N_1^4} \cos^4 \varphi + \frac{1}{N_2^4} \sin^4 \varphi + \frac{1}{N_3^4} + \frac{2}{N_1^2 N_2^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \\ - \frac{2}{N_2^2 N_3^2} \sin^2 \varphi - \frac{2}{N_1^2 N_3^2} \cos^2 \varphi,$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{N_1^2} - \frac{1}{N_2^2} \right)^2,$$

$$Q_2 = \frac{1}{N_1^4} \cos^2 \varphi + \frac{1}{N_2^4} \sin^2 \varphi - \frac{1}{N_1^2 N_2^2} - \frac{1}{N_3^2} \left(\frac{1}{N_1^2} - \frac{1}{N_2^2} \right) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Beide Brechungsindizes der Grundfrequenz $n_1(\omega)$, $n_1(\omega)$ in der Normalenrichtung $s(e, \varphi)$ können wir jetzt durch einfache Formeln

$$n_{1, \Pi}(\omega) = \sqrt{2} [A_1 \sin^2 \varepsilon + B_1 \pm (M_1 \sin^4 \varepsilon - 2Q_1 \sin^3 \varepsilon + P_1)^{1/2}]^{-1/2} \quad (28)$$

und den Brechungsindex der zweiten harmonischen Frequenz $N_1(2\omega)$ in derselben Normalenrichtung durch die Formel

$$N_1(2\omega) = \sqrt{2} [A_2 \sin^2 \varepsilon + B_2 + (M_2 \sin^4 \varepsilon - 2Q_2 \sin^2 \varepsilon + P_2)^{1/2}]^{-1/2} \quad (29)$$

ausdrücken.

Mit Hilfe der Formeln (28), (29) werden wir jetzt die Synchronisationsbedingungen (25) und (26) studieren.

A. Synchronisation der Phasen bei der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle

Die Synchronisationsbedingung (25) entspricht der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle. Wenn wir den Einfluß der Dispersion auf die Veränderung der Schwingungsrichtungen vernachlässigen, handelt es sich in solchem Falle um Wechselwirkung zweier Wellen mit Frequenz ω und 2ω , deren Schwingungsrichtungen senkrecht sind.

Die Synchronisationsrichtungen, die durch die Bedingung (25) bestimmt sind, bilden die Synchronisationskurve, die als Schnittkurve der Indexfläche $n(\omega)$ und $N(2\omega)$ bestimmt ist.

Für zweiachsige Kristalle führt die Bedingung (25) zu einer Gleichung dritten Grades

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (30)$$

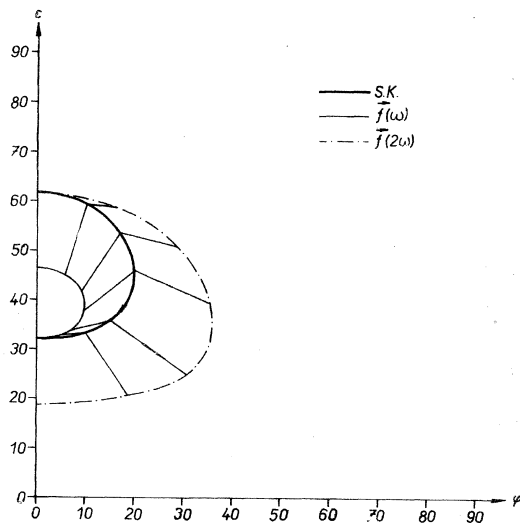


Abb. 4. $N_3 : n_3 : N_2 : n_2 : N_1 : n_1 = 1,6 : 1,47 : 1,35 : 1,26 : 1,17 : 1,1$.

wobei folgende Bezeichnungen gelten:

$$\varepsilon = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$a = 4[(A_1 - A_2)^2 - M_1 - M_2] [(A_1 - A_2)(B_1 - B_2) + Q_1 + Q_2] + 8M_1Q_2 + 8M_2Q_1,$$

$$b = 4[(A_1 - A_2)(B_1 - B_2) + Q_1 + Q_2]^2 + 2[(A_1 - A_2)^2 - M_1 - M_2] [(B_1 - B_2)^2 - P_1 - P_2] - 4M_1P_2 - 4M_2P_1 - 16Q_1Q_2,$$

$$c = 4[(A_1 - A_2)(B_1 - B_2) + Q_1 + Q_2] [(B_1 - B_2)^2 - P_1 - P_2] + 8Q_1P_2 + 8Q_2P_1,$$

$$d = [(B_1 - B_2)^2 - P_1 - P_2]^2 - 4P_1P_2.$$

Die Gleichung (30) hat nur dann eine reelle Lösung, wenn

$$n_3 \geq N_1,$$

(31)

ist.

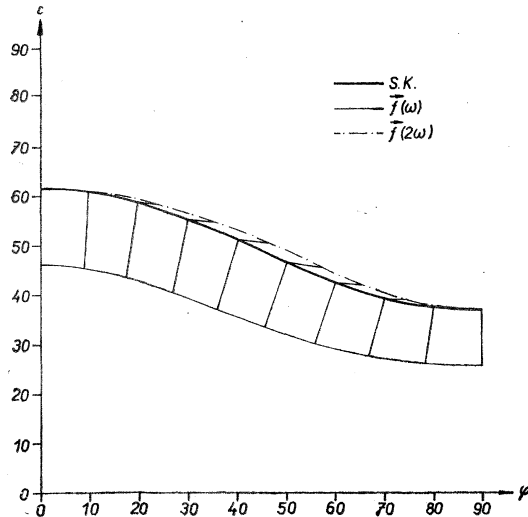


Abb. 5. $N_3 : n_3 : N_2 : N_1 : n_2 : n_1 = 1,76 : 1,47 : 1,35 : 1,26 : 1,17 : 1,1$.

Eine praktische Berechnung der Gleichung (30) kann man mit Hilfe der Rechenmaschine durchführen. Wir haben hier als Beispiele vier wesentliche Fälle berechnet:

$$1. N_3 > n_3 > N_2 > n_2 > N_1 > n_1.$$

Den Verlauf der Synchronisationsrichtungen in Abhängigkeit von ε und φ im Intervalle $(0^\circ, 90^\circ)$ zeigt die fette Linie S. K. in der Abb. 4.

Die Winkel $\varepsilon_{xz}^{(1)}$ und $\varepsilon_{xz}^{(2)}$ die die Synchronisationsrichtungen in der x, z -Koordinatenebene ($\varphi = 0$) bestimmen, sind durch die Formeln

$$\varepsilon_{xz}^{(1)} = \arcsin \frac{n_3}{N_2} \sqrt{\frac{N_2^2 - n_1^2}{n_3^2 - n_1^2}}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{xz}^{(2)} = \arcsin \frac{N_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_2^2 - N_1^2}{N_3^2 - N_1^2}}, \quad (33)$$

gegeben.

$$2. N_3 > n_3 > N_2 > N_1 > n_2 > n_1.$$

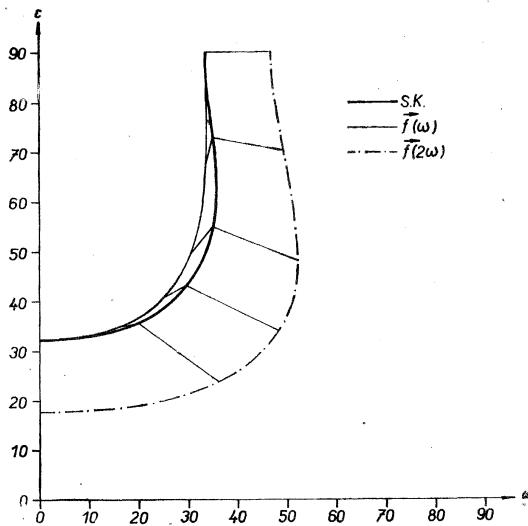


Abb. 6. $N_3 : n_3 : n_2 : N_1 : n_1 = 1,76 : 1,6 : 1,47 : 1,35 : 1,26 : 1,1$.

Den Verlauf der Synchronisationsrichtungen in Abhängigkeit von ε und φ im Interval $(0^\circ, 90^\circ)$ zeigt die fette Linie S. K. in der Abb. 5.

Den Winkel ε_{xz} , der die Synchronisationsrichtung in der x, z -Koordinatenebene ($\varphi = 0$) bestimmt, gibt die Formel (32) und den Winkel ε_{yz} , der die Synchronisationsrichtung in der y, z -Koordinatenebene ($\varphi = 90^\circ$) bestimmt, gibt die Formel

$$\varepsilon_{yz} = \arcsin \frac{n_3}{N_1} \sqrt{\frac{N_1^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2}}. \quad (34)$$

$$3. N_3 > N_2 > n_3 > n_2 > N_1 > n_1.$$

Den Verlauf der Synchronisationsrichtungen in Abhängigkeit von ε und φ im Interval $(0^\circ, 90^\circ)$ zeigt die fette Linie S. K. in der Abb. 6.

Der Winkel ε_{xz} , der die Synchronisationsrichtung in der x, z -Koordinatenebene ($\varphi = 0$) bestimmt, ist durch die Formel (33) und der Winkel φ_{xy} , der die Synchronisationsrichtung in der x, y -Koordinatenebene ($\varepsilon = 90^\circ$) bestimmt, durch die Formel

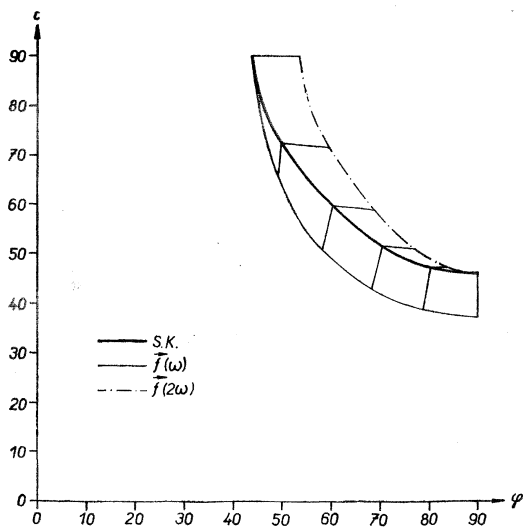


Abb. 7. $N_3 : N_2 : n_3 : N_1 : n_2 : n_1 = 1,95 : 1,6 : 1,47 : 1,35 : 1,26 : 1,1$.

$$\varphi_{xy} = \arcsin \frac{N_1}{n_3} \sqrt{\frac{N_2^2 - n_3^2}{N_2^2 - N_1^2}}, \quad (35)$$

gegeben.

$$4. N_3 > N_2 > n_3 > N_1 > n_2 > n_1.$$

Den Verlauf der Synchronisationsrichtungen in Abhängigkeit von ε und φ im Intervalle $(0^\circ, 90^\circ)$ zeigt die fette Linie S. K. in der Abb. 7.

Den Winkel ε_{yz} , der die Synchronisationsrichtung in der y, z -Koordinatenebene ($\varphi = 90^\circ$) bestimmt, gibt die Formel (34) und den Winkel φ_{xy} , der die Synchronisationsrichtung in der x, y -Koordinatenebene ($\varepsilon = 90^\circ$) bestimmt, gibt die Formel (35).

Für einachsige Kristalle, in denen die Indexfläche ein Rotationsellipsoid und eine Kugelfläche ist, erhalten wir:

Für positive Kristalle, für die

$$n_e = n_3, \quad n_o = n_1 = n_2,$$

$$N_o < n_e$$

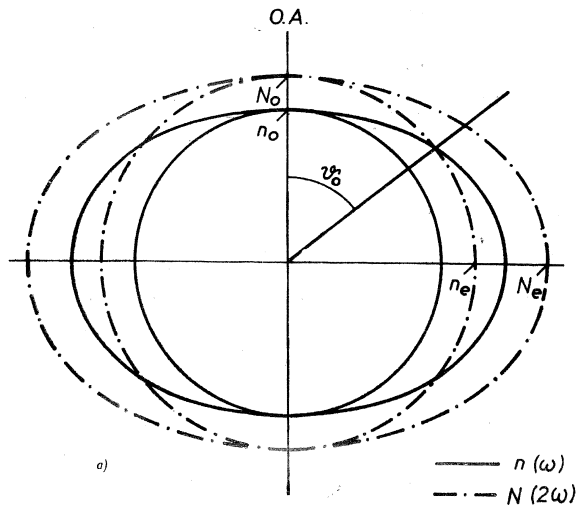


Abb. 8. a) b) Synchronisation in einachsigen a) positiven, b) negativen Kristallen.

$$N_e = N_3, \quad N_0 = N_1 = N_2.$$

ist, folgt aus (30) die Formeln für den Winkel ϑ_0 zwischen der Synchronisationsrichtung und der optischen Achse des Kristalls

$$\vartheta_0 = \arcsin \frac{n_e}{N_0} \sqrt{\frac{N_0^2 - n_o^2}{n_e^2 - n_o^2}}. \quad (36)$$

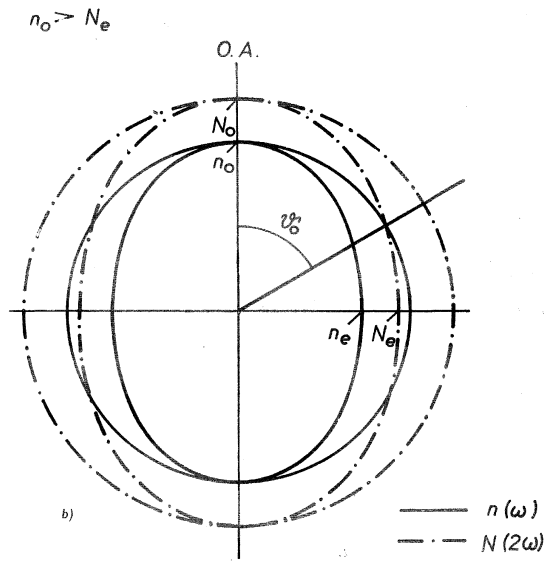
Dabei ist die Existenz der Synchronisationsrichtungen durch die Bedingung

$$N_0 \leq n_e, \quad (37)$$

eingeschränkt, die aus (31) folgt.

Für die negativen Kristalle, für die

$$\begin{aligned} n_e &= n_1, & n_0 &= n_2 = n_3, \\ N_e &= N_1, & N_0 &= N_2 = N_3, \end{aligned}$$



ist, folgt aus (30) die Formel für den Winkel ϑ_0 zwischen der Synchronisationsrichtung und der optischen Achse des Kristalls

$$\vartheta_0 = \arcsin \frac{N_e}{n_o} \sqrt{\frac{n_o^2 - N_o^2}{N_e^2 - N_o^2}}. \quad (38)$$

Dabei ist die Existenz der Synchronisationsrichtungen durch die Bedingung

$$N_e \leq n_o. \quad (39)$$

eingeschränkt, die aus (31) folgt.

B. Synchronisation der Phasen bei der Wechselwirkung Zweier Grundfrequenzwellen mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle

Die Synchronisationsbedingung (26) entspricht der Wechselwirkung zweier aufeinander senkrecht polarisierten Grundfrequenzwellen und einer zweiten harmonischen Frequenzwelle, deren Schwingungsrichtung mit der Schwingungsrichtung einer von den Grundfrequenzwellen fast übereinstimmt.

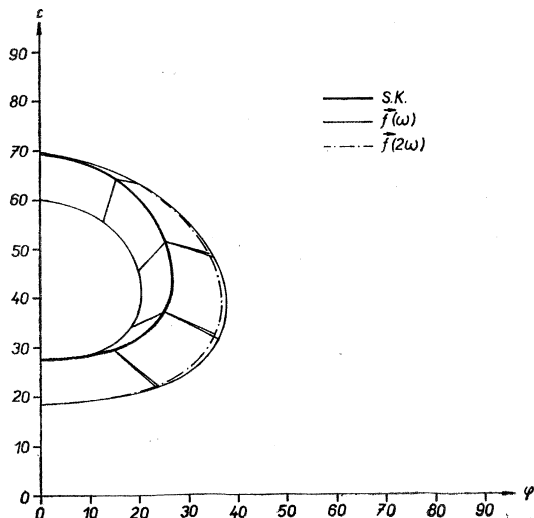


Abb. 9. $N_3 : n_3 : N_2 : n_2 : N_1 : n_1 = 1,65 : 1,6 : 1,5 : 1,45 : 1,35 : 1,3$.

Die Synchronisationskurve kann man leider nicht explizit bestimmen, wie man das im Falle der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle getan hat. Verhältnismäßig gut kann man dies aber mit Hilfe der Rechenmaschine z. B. durch die Halbierungsmethode auf Grund der Formeln (26), (28) und (29) berechnen. In der Abb. 9. und Abb. 10. zeigen die fetten Linien S. K. den Verlauf der Synchronisationskurven in Abhängigkeit von ε und φ in zwei gewählten Beispielen für zweiachsige Kristalle.

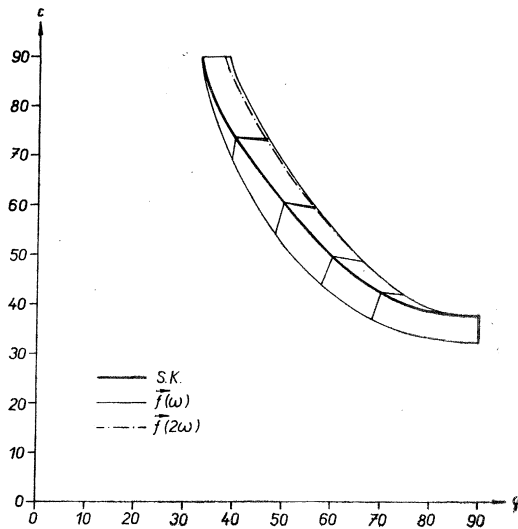


Abb. 10. $N_3 : n_3 : N_2 : n_2 : N_1 : n_1 = 1,7 : 1,6 : 1,55 : 1,45 : 1,4 : 1,3$.

Für die erste Orientierung kann man die allgemeinen Bedingungen bestimmen, unter denen die Synchronisationskurve irgendeine Koordinatenebene des Hauptkoordinatensystems x, y, z durchschneidet.

Aus den Formeln (26), (28) und (29) folgt:

Die x, z -Koordinatenebene wird von der Synchronisationskurve in acht Punkten durchgeschnitten, wobei je vier Punkte um beide Koordinatenachsen x, z symmetrisch sind, wenn die Relationen

$$\frac{n_1 + n_2}{2} \geq N_1, \quad (40)$$

$$\frac{n_2 + n_3}{2} \geq N_2,$$

erfüllt sind. Wenn nur eine von den Relationen (40) erfüllt ist, dann schneidet die Synchronisationskurve die x, z -Koordinatenebene bloß in vier Punkten.

Die x, y -Koordinatenebene wird von der Synchronisationskurve in vier um beide Koordinatenachsen x, y symmetrischen Punkten durchgeschnitten, wenn gleichzeitig die Relationen

$$\frac{n_1 + n_3}{2} \geq N_1, \quad (41)$$

$$\frac{n_2 + n_3}{2} \geq N_2,$$

erfüllt sind.

Die y, z -Koordinatenebene wird von der Synchronisationskurve in vier um beide Koordinatenachsen y, z symmetrischen Punkten durchgeschnitten, wenn gleichzeitig die Relationen

$$\frac{n_1 + n_2}{2} \leq N_1, \quad (42)$$

$$\frac{n_1 + n_3}{2} \geq N_1,$$

erfüllt sind.

Falls es in keiner Koordinatenebene des Hauptkoordinatensystems x, y, z Synchronisationsrichtungen gibt, dann gibt es im zweiachsigen Kristall keine Synchronisationsrichtungen überhaupt.

Für einachsige Kristalle erhalten wir:

Für positive Kristalle folgt aus (26), (28) und (29) die Formel für den Winkel ϑ_0 zwischen der Synchronisationsrichtung und der optischen Achse des Kristalls

$$\vartheta_0 = \arcsin \frac{2n_e}{(2N_o - n_o)} \sqrt{\frac{N_o(N_o - n_o)}{n_e^2 - n_o^2}}. \quad (43)$$

Dabei ist die Existenz der Synchronisationsrichtungen durch die Bedingung

$$\frac{n_o + n_e}{2} \geq N_o \quad (44)$$

eingeschränkt.

Für negative Kristalle ist der Winkel ϑ_0 implizit gegeben:

$$n_o + \left(\frac{1}{n_e^2} \cos^2 \vartheta_0 + \frac{1}{n_c^2} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{-1/2} = 2 \left(\frac{1}{N_o^2} \cos^2 \vartheta_0 + \frac{1}{N_c^2} \sin^2 \vartheta_0 \right)^{-1/2} \quad (45)$$

und die Existenz der Synchronisationsrichtungen ist durch die Bedingung

$$\frac{n_o + n_e}{2} \geq N_e \quad (46)$$

eingeschränkt.

VI. BESTIMMUNG DER ZUR SYNCHRONISATIONSRICHTUNG ZUGEHÖRIGEN STRAHLENRICHTUNGEN UND SCHWINGUNGSRICHTUNGEN

In einem anisotropen Medium stimmt die Normalenrichtung \mathbf{s} mit der Strahlenrichtung \mathbf{f} (der Richtung des Poyntingschen Vektors) nicht überein [1].

Die Formel (13) bestimmt zu jeder Normalenrichtung $\mathbf{s}(\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z)$ zwei Brechungsindizes $n_i(\mathbf{s})$, $n_{ii}(\mathbf{s})$, die den zwei aufeinander senkrecht polarisierten elektromagnetischen Wellen entsprechen. Beide diese Wellen breiten sich mit den Phasengeschwindigkeiten

$$v_i = \frac{c}{n_i}, \quad v_{ii} = \frac{c}{n_{ii}}$$

aus.

Die zur Normalenrichtung \mathbf{s} zugehörigen Strahlenrichtungen $\mathbf{f}_i(\mathbf{s})$, $\mathbf{f}_{ii}(\mathbf{s})$ konstruieren wir so, dass wir in den Punkten der Indexfläche $n_i(\mathbf{s})$, $n_{ii}(\mathbf{s})$ die Tangentialebenen führen. Die Fußpunkte, in denen die vom Mittelpunkt des Hauptkoordinatensystems geführten Senkrechten beide Tangentialebenen schneiden, bestimmen dann die Strahlenrichtungen $\mathbf{f}_i(\mathbf{s})$, $\mathbf{f}_{ii}(\mathbf{s})$ und die Entfernungen der Fußpunkte vom Mittelpunkt des Hauptkoordinatensystems bestimmen die Strahlenindizes.

Für die Bestimmung der Strahlenrichtungen $\mathbf{f}_i(\cos \beta_{ix}, \cos \beta_{iy}, \cos \beta_{iz})$, $\mathbf{f}_{ii}(\cos \beta_{iix}, \cos \beta_{iiy}, \cos \beta_{iiz})$ in der Abhängigkeit von den Komponenten der Normalenrichtung $\mathbf{s}(\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z)$ im Hauptkoordinatensystem wurden vom G. Szivessy [1] folgende Formeln abgeleitet:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{ix}(\omega) &= n_i(\omega) \left[1 - \frac{\frac{n_i^2(\omega) P_i^2(\omega)}{1} - \frac{1}{n_i^2(\omega)}}{\frac{n_i^2(\omega)}{1} - \frac{1}{n_i^2(\omega)}} \right] \frac{\cos \alpha_x}{n_i(\omega)}, \\ \cos \beta_{iy}(\omega) &= n_i(\omega) \left[1 - \frac{\frac{n_i^2(\omega) P_i^2(\omega)}{1} - \frac{1}{n_i^2(\omega)}}{\frac{n_i^2(\omega)}{1} - \frac{1}{n_i^2(\omega)}} \right] \frac{\cos \alpha_y}{n_i(\omega)}, \\ \cos \beta_{iz}(\omega) &= n_i(\omega) \left[1 - \frac{\frac{n_i^2(\omega) P_i^2(\omega)}{1} - \frac{1}{n_i^2(\omega)}}{\frac{n_i^2(\omega)}{1} - \frac{1}{n_i^2(\omega)}} \right] \frac{\cos \alpha_z}{n_i(\omega)}, \end{aligned} \quad (47)$$

$i = \text{I, II.}$

wo mit $n_{r1}(\omega)$, $n_{r11}(\omega)$ die Strahlenindizes

$$\frac{1}{n_{r1}^2(\omega)} = \frac{1}{n_1^2(\omega)} + n_1^2(\omega) P_1^2(\omega), \quad (48)$$

$$\frac{1}{n_{r11}^2(\omega)} = \frac{1}{n_{11}^2(\omega)} + n_{11}^2(\omega) P_{11}^2(\omega),$$

und

$$P_1^2(\omega) = \frac{\left[\frac{1}{n_1^2(\omega)} - \frac{1}{n_1^2(\omega)} \right] \left[\frac{1}{n_2^2(\omega)} - \frac{1}{n_1^2(\omega)} \right] \left[\frac{1}{n_3^2(\omega)} - \frac{1}{n_1^2(\omega)} \right]}{\frac{1}{n_1^2(\omega)} - \frac{1}{n_{11}^2(\omega)}},$$

$$P_{11}^2(\omega) = \frac{\left[\frac{1}{n_1^2(\omega)} - \frac{1}{n_{11}^2(\omega)} \right] \left[\frac{1}{n_2^2(\omega)} - \frac{1}{n_{11}^2(\omega)} \right] \left[\frac{1}{n_3^2(\omega)} - \frac{1}{n_{11}^2(\omega)} \right]}{\frac{1}{n_{11}^2(\omega)} - \frac{1}{n_1^2(\omega)}}.$$

bezeichnet sind.

Die Ergebnisse der Berechnung der zur Synchronisationsrichtung zugehörigen Strahlenrichtungen für die hier angeführten Beispiele zeigen in der Abhängigkeit von den Polarkoordinaten ε und φ die Abb. 4–7 und Abb. 9–10.

Die Winkel $\delta_1(\omega)$, $\delta_{11}(\omega)$ und $\delta_1(2\omega)$, die die einzelnen Strahlenrichtungen $\mathbf{f}_1(\omega)$, $\mathbf{f}_{11}(\omega)$ und $\mathbf{f}_{11}(2\omega)$ mit der Synchronisationsrichtung \mathbf{s} einschließen, kann man im Hauptkoordinatensystem nach der Formel

$$\cos \delta_i(\omega) = \cos \alpha_x \cos \beta_{ix}(\omega) + \cos \alpha_y \cos \beta_{iy}(\omega) + \cos \alpha_z \cos \beta_{iz}(\omega) \quad (49)$$

bestimmen.

Die Schwingungsrichtungen $\mathbf{e}_1(\omega)$, $\mathbf{e}_{11}(\omega)$, $\mathbf{e}_1(2\omega)$, die den Polarisationszustand einzelner Wellen bestimmen, können wir nach der Formel

$$\mathbf{e}_i(\omega) = \frac{\mathbf{f}_i(\omega) - \mathbf{s}}{|\mathbf{f}_i(\omega) - \mathbf{s}|}, \quad i = \text{I, II}, \quad (50a)$$

oder in Komponenten nach den Formeln

$$e_{ix}(\omega) = \frac{\cos \beta_{ix}(\omega) - \cos \alpha_x}{\sqrt{2 - 2[\cos \beta_{ix}(\omega) \cos \alpha_x + \cos \beta_{iy}(\omega) \cos \alpha_y + \cos \beta_{iz}(\omega) \cos \alpha_z]}}$$

$$e_{iy}(\omega) = \frac{\cos \beta_{iy}(\omega) - \cos \alpha_y}{\sqrt{2 - 2[\cos \beta_{ix}(\omega) \cos \alpha_x + \cos \beta_{iy}(\omega) \cos \alpha_y + \cos \beta_{iz}(\omega) \cos \alpha_z]}}$$

$$e_{iz}(\omega) = \frac{\cos \beta_{iz}(\omega) - \cos \alpha_z}{\sqrt{2 - 2[\cos \beta_{ix}(\omega) \cos \alpha_x + \cos \beta_{iy}(\omega) \cos \alpha_y + \cos \beta_{iz}(\omega) \cos \alpha_z]}} \quad (50b)$$

berechnen.

Für den Ausdruck der Schwingungsrichtungen in Polarkoordinaten ε und φ kann man die Transformation (27) benutzen.

Wie aus der allgemeinen kristalloptischen Theorie und auch aus Abb. 4-7 und Abb. 9-10 folgt, gibt es im allgemeinen Falle weder in zweiachsigen, noch in einachsigen Kristallen Synchronisationsrichtungen, in denen alle drei entsprechenden Strahlenrichtungen übereinstimmen. Diese Tatsache ist von großer Bedeutung, weil in konkreten Experimenten nicht räumlich unbegrenzte Wellen, sondern räumlich abgegrenzte Wellen zusammenwirken.

Die Strahlenrichtungen bestimmen die Richtung der Ausbreitung der geometrischen Strahlen und demnach ist Folge der Divergenz einzelner Strahlenrichtungen die Divergenz einzelner Strahlenbündel.

Alle drei Strahlenrichtungen können nur in einigen speziellen Fällen übereinstimmen und zwar:

Bei der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle stimmen die Strahlenrichtungen $\mathbf{f}_1(\omega)$ und $\mathbf{f}_1(2\omega)$ mit der Synchronisationsnormalenrichtung \mathbf{s} dann überein, wenn in einem zweiachsigen Kristall eine von den Bedingungen

$$n_3 = N_2,$$

$$n_3 = N_1,$$

$$n_2 = N_1,$$

sowie in einem einachsigen positiven Kristall die Bedingung

$$n_e = N_0,$$

und endlich in einem einachsigen negativen Kristall die Bedingung

$$n_o = N_e,$$

erfüllt ist.

Bei der Wechselwirkung zweier Grundfrequenzwellen mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle stimmen die Strahlenrichtungen $\mathbf{f}_1(\omega)$, $\mathbf{f}_1(\omega)$ und $\mathbf{f}_1(2\omega)$ mit der Synchronisationsnormalenrichtung \mathbf{s} dann überein, wenn in einem zweiachsigen Kristall eine von den Bedingungen

$$\frac{n_2 + n_3}{2} = N_2,$$

$$\frac{n_1 + n_2}{2} = N_1,$$

$$\frac{n_1 + n_3}{2} = N_3,$$

sowie in einem einachsigen positiven Kristall die Bedingung

$$\frac{n_o + n_e}{2} = N_o,$$

und endlich in einem einachsigen negativen Kristall die Bedingung

$$\frac{n_o + n_e}{2} = N_e,$$

erfüllt ist.

Für alle diese speziellen Fälle stimmt die Synchronisationsrichtung mit einer Koordinatenachse überein.

V. EINFLUSS DER APERTUREFFEKTE

Die Differentialgleichungen (1–4), die die Wechselwirkung zweier Grundfrequenzwellen mit der zweiten harmonischen Welle beschreiben, setzen voraus, daß es zur Wechselwirkung unter den räumlich unbegrenzten Wellen kommt.

In der Tatsache stehen immer in Wechselwirkung die von der Blendöffnung beschränkte Wellen, bei denen noch dazu eine bestimmte Intensitätsverteilung in der Aperturebene betrachtet werden muß.

Beim Studium der Wechselwirkung zweier abgegrenzten Grundfrequenzwellen mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle muß man von einem allgemeinen System der Differentialgleichungen für komplexe Amplituden $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, $A_3(2\omega)$ ausgehen [5. 7, 8, 10]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{f}_1)(\mathbf{f}_1 \cdot \text{grad } A_1) &= i \frac{\mu_0 \omega^2 K}{2 |k_1|} A_2^* A_3 e^{-iA_1 k z}, \\ (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{f}_2)(\mathbf{f}_2 \cdot \text{grad } A_2) &= i \frac{\mu_0 \omega^2 K}{2 |k_2|} A_1^* A_3 e^{-iA_2 k z}, \\ (\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{f}_3)(\mathbf{f}_3 \cdot \text{grad } A_3) &= i \frac{4\mu_0 \omega^2 K}{2 |k_3|} A_1 A_2 e^{iA_3 k z}, \end{aligned}$$

wobei einige Grenzbedingungen für komplexe Amplituden $A_1(\xi, \eta, 0)$, $A_2(\xi, \eta, 0)$, $A_3(\xi, \eta, 0)$ gelten.

Im allgemeinen Falle wurden diese Gleichungen noch nicht gelöst.

Einen speziellen Fall der Wechselwirkung einer ordentlichen Grundfrequenzwelle mit einer außerordentlichen zweiten harmonischen Frequenzwelle in einem einachsigen negativen Kristall beim Normaleneinfallen in der Synchronisationsrichtung hat V. V. Kaner u. a. [10] gelöst.

Wenn wir in (1–4)

$$\begin{aligned} \varrho_1(\omega) = \varrho_2(\omega) &= \frac{\varrho_0(\omega)}{\sqrt{2}}, \\ \varrho_3(2\omega) &= \varrho_e(2\omega), \end{aligned}$$

legen und voraussetzen, daß die Abweichung $\delta_e(2\omega)$ der Strahlenrichtung von der Normalenrichtung des außerordentlichen Strahls klein ist, dann beschreiben die Wechselwirkung einer ordentlichen Grundfrequenzwelle mit einer außerordentlichen

zweiten harmonischen Frequenzwelle beim Normaleneinfallen in der Synchronisationsrichtung mit Rücksicht auf Apertureffekte zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varrho_0(\omega)}{\partial \zeta} &= -\sigma \varrho_0(\omega) \varrho_s(2\omega), \\ \frac{\partial \varrho_s(2\omega)}{\partial \zeta} + \beta \frac{\partial \varrho_s(2\omega)}{\partial \eta} &= \sigma \varrho_0^2(\omega),\end{aligned}\quad (51)$$

wo wir

$$\sigma = \frac{\mu_0 c \omega^2 K}{n}, \quad \beta = \operatorname{tg} \delta_s(2\omega)$$

bezeichnet haben. Das Koordinatensystem ξ, η, ζ haben wir so orientiert, daß die ζ - Koordinatenachse die Normale an der Grenzfläche bildet und der außerordentliche Strahl in der ξ, η - Koordinatenebene liegt.

Kaner [10] hat die Grenzbedingungen in der Form

$$\begin{aligned}\varrho_s(\xi, \eta, 0) &= 0, \\ \varrho_s(\xi, \eta, 0) &= \frac{A_0}{1 + \alpha^2 \eta^2},\end{aligned}$$

vorausgesetzt.

Für diese Grenzbedingungen haben die Gleichungen (51) folgende Lösung:

$$\begin{aligned}\varrho_0(\omega) &= \frac{A_0}{(1 + \alpha^2 \eta^2)^{1/2} [1 + \alpha^2 (\eta - \beta \zeta)^2]^{1/2} \left[\cos h v + \frac{\alpha^2 \eta \beta}{(\sigma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{1/2}} \sin h v \right]}, \\ \varrho_s(2\omega) &= \frac{\alpha^2 \beta^2 \zeta^2 \cos h v + \left[(\sigma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{1/2} - \frac{\alpha^4 \beta^2 \eta (\eta - \beta \zeta)}{(\sigma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{1/2}} \right] \sin h v}{\sigma [1 + \alpha^2 (\eta - \beta \zeta)^2] \left[\cos h v + \frac{\alpha^2 \beta \eta}{(\sigma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)^{1/2}} \sin h v \right]},\end{aligned}\quad (52)$$

wo

$$v = \frac{(\sigma^2 A_0^2 - \alpha^2 \beta^2)}{\alpha \beta} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha \eta - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha (\eta - \beta \zeta)]$$

bezeichnet ist.

Die Gleichungen (52) beschreiben die Veränderung der Amplituden beider Frequenzen $\varrho_0(\omega)$, $\varrho_s(2\omega)$ in der Abhängigkeit von Koordinatenachsen η, ζ , d. h. für jede Normalenentfernung ζ bestimmen sie die entsprechende Verteilung $\varrho_0(\omega)$, $\varrho_s(2\omega)$ in der η - Koordinate.

Bei genauer Diskussion der Ausdrücke (52) kann man zeigen, daß die Verteilung der Amplituden $\varrho_0(\omega)$, $\varrho_s(2\omega)$ in der η - Koordinate von der Größe

$$r = \left(\frac{\sigma A_0}{\alpha \beta} \right)^2$$

abhängt. Wenn wir den Koeffizienten der Umwandlung der Leistung der Grundfrequenz in die Leistung der zweiten harmonischen Frequenz definieren

$$\mu = \frac{\int e_0^2(2\omega) d\eta}{\int e_0^2(\omega) d\eta}, \quad (53)$$

erhalten wir die Abhängigkeit des Koeffizienten μ von der reduzierten Länge $\tilde{\zeta} = \zeta(\sigma A_0 + \alpha\beta)$ für verschiedene Werte r , wie in Abb. 11. gezeigt.

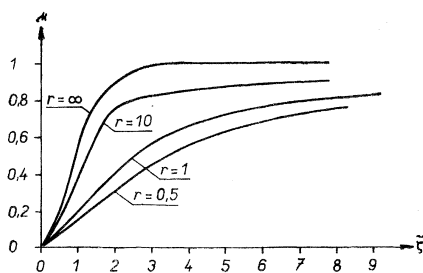


Abb. 11. Verlauf des Koeffizienten μ in der Abhängigkeit von der reduzierten Länge $\tilde{\zeta} = \zeta(\sigma A_0 + \alpha\beta)$ für verschiedene Werte r .

Aus der Abb. 11. ist es klar, daß für große Werte r der Koeffizient μ sich dem idealen Fall der Wechselwirkung zweier räumlich unbegrenzten Wellen nähert. Für kleine Werte r verläuft der Energiewechsel zwischen der ersten und zweiten harmonischen Frequenz hinsichtlich der Normalenentfernung von der Grenze ζ wesentlich langsamer, als im Falle der unbegrenzten Wellen.

Vom geometrisch — optischen Standpunkt kann man nur den Koeffizienten α beeinflussen und zwar so, dass man die Blendöffnung des optischen Systems vergrößert. Die Möglichkeiten der Beeinflussung des Koeffizienten α sind jedoch sehr gering.

Den Koeffizienten β kann man bei den einachsigen Kristallen überhaupt nicht beeinflussen, denn die Abweichung δ_* der Strahlenrichtung von der Normalenrichtung des außerordentlichen Strahls vollkommen festgelegt ist. Die Beeinflussung des Koeffizienten β wäre im Falle der zweiachsigen Kristalle möglich, aber nicht viel mehr als um 10 %.

Aus Abb. 11. ist es weiter klar, daß es auch, wenn für verschiedene Werte r der Koeffizient μ verschieden ist, bei der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle, die von Apertur eingeschränkt sind, zum systematischen, nichtperiodischen Energiewechsel kommen kann (s. Abb. 12a., 12b.).

Wesentlich andere Ergebnisse erhalten wir aber beim Studium der Wechselwirkung

zweier Grundfrequenzwellen mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle, die von Apertur eingeschränkt sind.

Eine genaue mathematische Lösung dieses Problems wurde für diesen Fall nicht gemacht. Auf den ersten Blick ist es aber klar, daß der Raum der Wechselwirkung vom Winkel der Divergenz beider Grundfrequenzstrahlenbündel eingeschränkt ist (s. Abb. 12c).

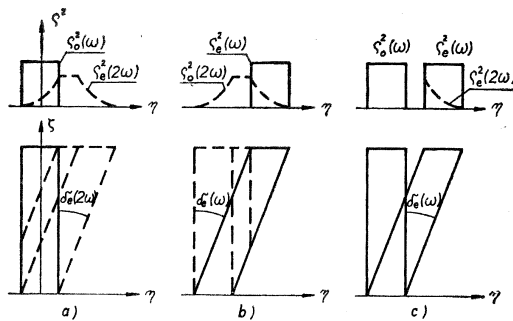


Abb. 12. Zur Entstehung der zweiten harmonischen Frequenz.

- a) Wechselwirkung einer ordentlichen Grundfrequenzwelle mit einer außerordentlichen zweiten harmonischen Frequenzwelle.
- b) Wechselwirkung einer außerordentlichen Grundfrequenzwelle mit einer ordentlichen zweiten harmonischen Frequenzwelle.
-) Wechselwirkung einer ordentlichen und einer außerordentlichen Grundfrequenzwelle mit einer außerordentlichen zweiten harmonischen Frequenzwelle.

Wir gehen von der geometrischen Interpretation aus (Abb. 12c). Die Länge l der Wechselwirkung einer ordentlichen und einer außerordentlichen Grundfrequenzwelle ist durch den Ausdruck

$$l = \frac{a}{\lg \delta_e(\omega)} \quad (54)$$

gegeben, wo a der Durchmesser der Apertur ist. Für $\zeta > l$ kommt es zu keinem Energiewechsel zwischen der ersten und zweiten harmonischen Frequenz mehr.

In der Tatsache ist die Länge der Wechselwirkung im Hinblick auf Diffraktionserscheinungen und Verteilung der Intensität in der Apertur ein wenig von der durch (54) gegebenen Länge verschieden.

In weiterem Kapitel zeigen wir, daß es die Möglichkeit gibt, die Länge der Wechselwirkung zweier Grundfrequenzstrahlenbündel praktisch unbegrenzt so zu verlängern,

daß ähnlich wie bei der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle der Koeffizient μ eine nichtperiodische Funktion von ζ ist, die von der Größe der Apertur und vom Winkel zwischen der Strahlenrichtung der zweiten harmonischen Frequenz und der Strahlenrichtung der Grundfrequenz abhängig ist.

VI. VERLÄNGERUNG DER LÄNGE DER WECHSELWIRKUNG ZWEIER GRUNDFREQUENZSTRAHLENBÜNDEL

Die Länge der Wechselwirkung zweier Grundfrequenzstrahlenbündel kann praktisch ins Unendliche verlängert werden, wenn es uns gelingt, eine solche Synchronisationsweise zu finden, bei der die Strahlenrichtungen beider Grundfrequenzwellen übereinstimmen.

Die Lösung dieses Problems ist für den allgemeinen Fall der zweiachsigen Kristalle sehr kompliziert und wir werden sie hier nicht durchführen. Wir werden hier nur das Prinzip der Lösung andeuten.

Nach den von Szivessy [1] abgeleiteten Formeln kann man die Normalenrichtung \mathbf{s}_i als Funktion der Strahlenrichtung \mathbf{f}_i ausdrücken

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i(\mathbf{f}_i), \quad i = \text{I, II.}$$

Die Forderung, daß die Strahlenrichtungen beider Grundfrequenzwellen identisch wären, kann man durch eine einfache Bedingung

$$\mathbf{f}_1(\omega) \equiv \mathbf{f}_2(\omega) \equiv \mathbf{f},$$

ausdrücken. Die Synchronisationsbedingung (15) wird dann erfüllt, wenn der Endpunkt des Vektors

$$\frac{n_1(\mathbf{f}) \mathbf{s}_1(\mathbf{f}) + n_{II}(\mathbf{f}) \mathbf{s}_{II}(\mathbf{f})}{2},$$

an der Indexfläche (14)

$$F(2\omega, x, y, z) = 0,$$

liegen wird.

Die Grundfrequenzstrahlenbündel, die diese Bedingung erfüllen, kann man in der Praxis durch geeigneten Ausschiffswinkel und geeigneten Einfallswinkel realisieren.

Genauere Berechnung führen wir für einachsige Kristalle an.

In einem einachsigen Kristall stimmt die Normalenrichtung des ordentlichen Strahls \mathbf{s}_o mit der Strahlenrichtung des ordentlichen Strahls \mathbf{f}_o überein. Die Normalenrichtung des außerordentlichen Strahls \mathbf{s}_e schließt aber mit der Strahlenrichtung des außerordentlichen Strahls \mathbf{f}_e einen kleinen Winkel δ (s. Abb. 13.). Es ist also nötig eine solche Strahlenrichtung $\mathbf{f}_o \equiv \mathbf{f}_e$ zu finden, deren entsprechende Normalenrichtungen \mathbf{s}_e und $\mathbf{s}_o \equiv \mathbf{f}_o$ die Synchronisationsbedingung (15) erfüllen. Dieses

Problem lösen wir nur in der Hauptschnittebene des einachsigen Kristalls, in der die Synchronisationsrichtung durch den Winkel φ bestimmt ist, den die mit der optischen Achse des Kristalls einschließt.

Das Hauptkoordinatensystem x, z orientieren wir so, daß die z - Koordinateachse mit der optischen Achse des Kristalls identisch ist.

Der der Grundfrequenz entsprechende Brechungsindex des außerordentlichen Strahls ist durch die Beziehung

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_o^2} \cos^2 \Theta_e + \frac{1}{n_e^2} \sin^2 \Theta_e \quad (55)$$

und der Strahlenindex durch die Beziehung

$$n_r^2 = n_o^2 \cos^2 \varphi_e + n_e^2 \sin^2 \varphi_e, \quad (56)$$

gegeben [1], wo wir mit Θ_e den Winkel zwischen der Normalenrichtung des außerordentlichen Strahls und der optischen Achse und mit φ_e den Winkel zwischen der Strahlenrichtung des außerordentlichen Strahls und der optischen Achse bezeichnet haben.

Die Komponenten der Grundfrequenzwellenvektoren sind im x, z - Koordinatensystem wie folgt gegeben:

$$k_{ox}(\omega) = \frac{\omega}{c} n_o \sin \varphi_o, \quad (57)$$

$$k_{oz}(\omega) = \frac{\omega}{c} n_o \cos \varphi_o,$$

und

$$k_{ex}(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\Theta_e) \sin \Theta_e, \quad (58)$$

$$k_{ez}(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\Theta_e) \cos \Theta_e.$$

Zu jeder Normalenrichtung \mathbf{s}_e kann man nach bekannten Formeln eindeutig eine Strahlenrichtung \mathbf{f}_e feststellen [1], d. h. jedem Winkel Θ_e entspricht ein Winkel φ_e , der die der Normalenrichtung \mathbf{s}_e entsprechende Strahlenrichtung \mathbf{f}_e bestimmt.

Wir drücken jetzt den Winkel Θ_e und den Brechungsindex n als die Funktion des Winkels φ_e aus. Nach [1] gilt:

$$n^2 = n_r^2 \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2n_r^2} (n_o^2 - n_e^2) \sin 2\varphi_e \right]^2 \right\}. \quad (59)$$

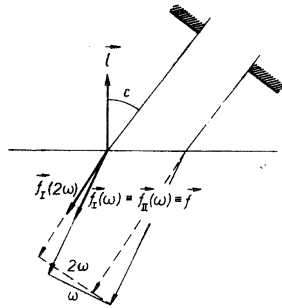


Abb. 13. Strahlenbündel der ersten und zweiten harmonischen Frequenz bei der Übereinstimmung der Strahlenrichtungen beider Grundfrequenzwellen.

Aus (55), (56) und (59) ergibt sich nach der Berechnung:

$$\sin^2 \Theta_e = \frac{n_e^4 \sin^2 \Phi_e}{n_o^4 \cos^2 \Phi_e + n_e^4 \sin^2 \Phi_e}, \quad (60)$$

$$\cos^2 \Theta_e = \frac{n_o^4 \cos^2 \Phi_e}{n_o^4 \cos^2 \Phi_e + n_e^4 \sin^2 \Phi_e}, \quad (61)$$

$$n^2 = \frac{n_o^4 \cos^2 \Phi_e + n_e^4 \sin^2 \Phi_e}{n_o^2 \cos^2 \Phi_e + n_e^2 \sin^2 \Phi_e}. \quad (62)$$

Die Komponenten des Wellenvektors $k_e(\omega)$ kann man jetzt als Funktionen des Winkels φ_e ausdrücken:

$$k_{e,x}(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{n_e^2 \sin \Phi_e}{[n_o^2 \cos^2 \Phi_e + n_e^2 \sin^2 \Phi_e]^{1/2}}, \quad (63)$$

$$k_{e,z}(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{n_o^2 \cos \Phi_e}{[n_o^2 \cos^2 \Phi_e + n_e^2 \sin^2 \Phi_e]^{1/2}}.$$

Die Forderung, daß die Strahlenrichtungen des ordentlichen und außerordentlichen Strahls übereinstimmen, drücken wir einfach so aus, daß wir

$$\Phi = \Phi_o = \Phi_e \quad (64)$$

in die Formeln (57) und (63) legen.

Jetzt definieren wir die Größe

$$x = \frac{c}{2\omega} [k_{o,x}(\omega) + k_{e,x}(\omega)], \quad (65)$$

$$z = \frac{c}{2\omega} [k_{o,z}(\omega) + k_{e,z}(\omega)].$$

Wenn die Synchronisationsbedingung (12) oder (15) erfüllt werden soll, müssen die Größen x, z die Gleichung für den Brechungsindex der zweiten harmonischen Frequenz erfüllen.

A. Für positive Kristalle, für die

$$n_e > n_o,$$

ist, kann unter der Wechselwirkung einer ordentlichen und einer außerordentlichen Grundfrequenzwelle eine dem ordentlichen Strahl entsprechende zweite harmonische Frequenzwelle generiert werden. In der Synchronisationsrichtung müssen also die Größen x, z eine Gleichung des Kreises erfüllen:

$$x^2 + z^2 = N_o^2. \quad (66)$$

B. Für negative Kristalle, für die

$$n_e < n_o,$$

ist, kann unter der Wechselwirkung einer ordentlichen und einer außerordentlichen Grundfrequenzwelle eine dem außerordentlichen Strahl entsprechende zweite harmonische Frequenzwelle generiert werden. In der Synchronisationsrichtung müssen also die Grössen x , z eine Gleichung der Ellipse erfüllen:

$$\frac{x^2}{N_e^2} + \frac{z^2}{N_o^2} = 1. \quad (69)$$

Durch Einsetzen der Werte x , z in (69) und nach der Berechnung erhalten wir eine Gleichung vierten Grades für $\cos^2 \Phi$:

$$a \cos^8 \Phi + b \cos^6 \Phi + c \cos^4 \Phi + d \cos^2 \Phi + e = 0. \quad (70)$$

Die Koeffizienten in der Gleichung (70) sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} a &= [n_o^2(n_o^2 - n_e^2)(N_e^2 - N_o^2)]^2, \\ b &= 2n_o^2(n_o^2 - n_e^2) \{ (N_e^2 - N_o^2) [N_o^2(n_o^4 - 2n_o^2n_e^2 - n_e^4) + \\ &\quad + N_e^2n_o^2(n_o^2 + n_e^2) - 4N_o^2N_e^2(n_o^2 - n_e^2)] - 2(N_e^2n_o^2 - N_e^2n_e^2)^2 \}, \\ c &= [N_o^2(n_o^4 - 2n_o^2n_e^2 - n_e^4) + N_e^2n_o^2(n_o^2 + n_e^2) - 4N_o^2N_e^2(n_o^2 - n_e^2)]^2 + \\ &\quad + 2N_o^2n_o^2n_e^2(n_o^2 - n_e^2)(N_e^2 - N_o^2)(n_o^2 + n_e^2 - 4N_e^2) - \\ &\quad - 4n_o^2n_e^2(N_e^2n_o^2 - N_e^2n_e^2) [N_e^2n_o^2 + N_o^2(2n_o^2 - 3n_e^2)], \\ d &= 2N_o^2n_e^2 \{ (n_o^2 + n_e^2 - 4N_e^2) [N_o^2(n_o^4 - 2n_o^2n_e^2 - n_e^4) + \\ &\quad + N_e^2n_o^2(n_o^2 + n_e^2) - 4N_o^2N_e^2(n_o^2 - n_e^2)] - \\ &\quad - 2n_o^2n_e^2 [N_e^2(N_e^2 + 2N_o^2) - 3N_o^2n_e^2] \}, \\ e &= N_o^4n_e^4 [(n_o^2 - n_e^2)^2 + 8N_e^2(2N_e^2 - n_o^2 - n_e^2)]. \end{aligned}$$

Die Gleichung (70) hat eine reelle Lösung Φ dann, wenn die Bedingung

$$\frac{n_o + n_e}{2} \geq N_e, \quad (71)$$

erfüllt ist.

Für die positiven Kristalle zeigt den Fall der Synchronisation Abb. 14., für die negativen Kristalle Abb. 15.

Die hier beschriebene Weise der Synchronisation kann durch einen geeigneten Ausschliffswinkel ψ und durch einen geeigneten Einfallswinkel ε realisiert werden.

Wir gehen von der Abb. 14. für die positiven Kristalle aus. Mit l bezeichnen wir den Einheitsvektor an der Grenze zwischen dem linearen Medium und dem einachsigen nichtlinearen Kristall. Der Stetigkeitsbedingung entsprechend müssen die Tangentialkomponenten der Wellenvektoren aller Wellen in der Grenzzebene gleich sein.

wo wir mit

$$n_r = [n_o^2 \cos^2 \Phi + n_e^2 \sin^2 \Phi]^{1/2},$$

den Strahlenindex des außerordentlichen Strahls bezeichnet haben.

Der Einfallswinkel ε ist dann durch den Ausdruck

$$\varepsilon = \text{arc sin } [n_o \sin (\psi + \Phi)], \quad (74)$$

gegeben (s. Abb. 14.).

Für die negativen Kristalle erhalten wir sehr ähnliche Formeln:

$$\psi = \text{arc cos } \left\{ \frac{n_o(n_o - n_r) \cos \Phi}{[n_o n_r^2 (n_o - 2n_r) + n_o^4 \cos^2 \Phi + n_e^4 \sin^2 \Phi]^{1/2}} \right\}, \quad (75)$$

$$\varepsilon = \text{arc sin } [n_o \sin (\psi + \Phi)]. \quad (76)$$

VII. ABSCHLUß

Von den in dieser Arbeit beschriebenen Methoden der Synchronisation hat für die Praxis die größte Bedeutung die Synchronisation bei der Wechselwirkung einer Grundfrequenzwelle mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle.

Die Synchronisation bei der Wechselwirkung zweier Grundfrequenzwellen mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle setzt nämlich die Kristalle mit sehr kleiner Frequenzdispersion voraus, damit die Bedingungen (39), (40), (41), bzw. (43) und (45) erfüllt werden könnten. Z. B. bei dem in der nichtlinearen Optik sehr oft angewandten Kristall KDP ist nicht die Bedingung (45) erfüllt, so daß also die Synchronisation bei der Wechselwirkung zweier Grundfrequenzwellen mit einer zweiten harmonischen Frequenzwelle in diesem Kristall nicht möglich ist.

In dieser Arbeit haben wir die Wechselwirkung unter den ebenen elektromagnetischen Wellen vorausgesetzt, wobei wir die Divergenz innerhalb der Strahlenbündel und Struktur der Amplituden und Phasen im Querschnitt des Strahlenbündels vernachlässigt haben. Diese Fragen wurden sehr gründlich von russischen Physikern A. I. Kovrigin, N. K. Podsotskaja und A. P. Suchorukov [11] diskutiert, die die günstigste Fokussierung für das Erreichen der hohen Wirksamkeit der Umwandlung der Grundfrequenzenergie in die Energie der zweiten harmonischen Frequenz studiert haben.

In dieser Zeit nähert sich der Koeffizient der Energieumwandlung $\sim 30\%$, was sehr breite Anwendung der Generierung der zweiten harmonischen Frequenz zum Studium anderer nichtlinearen Vorgänge ermöglicht, wie z. B. der parametrischen Verstärkung, der parametrischen Generierung, der erzwungenen Kombinationsstreuung, u. s. w.

LITERATUR

- [1] Szivessy G.: Kristalloptik, Handbuch der Physik, B. XX. Springer, Berlin (1928).
- [2] Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W., and Weinrich G.: Phys. Rev. Lett. 7 (1961) 118.
- [3] Marker P. D., Terhune R. W., Nisenhoff N., and Savage C. M.: Phys. Rev. Lett. 8 (1962) 21.
- [4] Giordmaine J. A.: Phys. Rev. Lett. 8 (1962) 19.
- [5] Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., and Pershan P. S.: Phys. Rev. 127 (1962) 1918.
- [6] Terhune R. W., Marker P. D., and Savage G. M.: Appl. Phys. Lett. 2 (1963) 54.
- [7] Achmanov S. A., and Chochlov R. V.: Problemy nelinejnoj optiki. Itogi Nauki, Moskva (1964).
- [8] Bloembergen N.: Nonlinear Optics, Benjamin W. A., Inc., New York, Amsterdam (1965).
- [9] Barocchi F.: Pubblicazioni dell'Institute Nazionale di Ottica, No. 482 (1967) 3.
- [10] Kaner V. V., Suchorukov A. P., Cirkin A. S.: Ob aperturnych ograničenijach effektivnosti nelinejnyh optičeskich processov, Nelinejnaja optika, Izd. „Nauka“, Novosibirsk (1968), s. 359.
- [11] Kovrigin A. I., Podsockaja I. K., Suchorukov A. P.: Teoretičeskoje i eksperimentalnoje issledovanie processa generacii optičeskich harmonik v ograničennych pučkach, Nelinejnaja optika, Izd. „Nauka“, Novosibirsk (1968), s. 393.
- [12] Chmela P.: Optik 28 (1969) 346.
- [13] Chmela P.: Optik 29 (1969) 281.
- [14] Chmela P.: Optik 29 (1969) 561.

Shrnutí

GEOMETRICKO-OPTICKÝ VÝPOČET SYNCHRONIZAČNÍCH SMĚRŮ PRVNÍ A DRUHÉ HARMONICKÉ FREKVENCE V NELINEÁRNÍCH ANIZOTROPNÍCH KRÝSTALECH

PAVEL CHMELA

V této práci je studována synchronizace fází první a druhé harmonické frekvence v anizotropních jednoosých a dvojoosých krýstalech, a to jak při vzájemném působení jedné vlny základní frekvence s jednou vlnou druhé harmonické frekvence, tak při vzájemném působení dvou vln základní frekvence s jednou vlnou druhé harmonické frekvence. Je proveden přesný geometricko-optický výpočet synchronizačních směrů, výpočet příslušných paprskových směrů a kmitosměrů. V poslední části práce je ukázán způsob prodloužení délky vzájemného působení dvou vln základní frekvence na příkladu jednoosých krýstalů. Při vhodném úhlu výbrusu a vhodném úhlu dopadu mohou paprskové směry obou vln základní frekvence spolu splývat, při čemž je současně splněna synchronizační podmínka (12).

Резюме

ГЕОМЕТРИЧЕСКО-ОПТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ
НАПРАВЛЕНИЙ СИНХРОНИЗМА ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ
ГАРМОНИКИ В НЕЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ
КРИСТАЛЛАХ

ПАВЕЛ ХМЕЛА

В настоящей работе изучается синхронизация фаз первой и второй гармоники в анизотропных одноосных и двухосных кристаллах как при взаимодействии одной исходной волны и одной волны второй гармоники, так и при взаимодействии двух исходных волн и одной волны второй гармоники. Приводится точное геометрическо-оптическое вычисление направлений синхронизма, вычисление соответствующих лучевых направлений и направлений поляризации волн. В последней части работы показывается способ увеличения длины взаимодействия двух исходных волн на примере одноосных кристаллов. При подходящем угле шлифования и подходящем угле падения лучевые направления обеих исходных волн могут быть идентичными, причем одновременно выполняется синхронизационное условие (12).

Summary

A COMPUTATION OF SYNCHRONIZATION DIRECTIONS
OF THE FIRST AND SECOND - HARMONIC
FREQUENCIES IN NON-LINEAR ANIZOTROPIC CRYSTALS
ACCORDING TO THE GEOMETRICAL OPTICS

PAVEL CHMELA

In this paper we study a phase matching condition for the first and second - harmonic frequencies in anisotropic uniaxial and biaxial crystals under the interaction of the basic-frequency wave with the second - harmonic frequency wave and under the interaction of two basic - frequency waves with the second - harmonic wave. An exact computation of synchronization directions based on geometrical optics is carried out as well as a computation of corresponding directions of beams and vibration directions. At the end a method is shown enabling elongation of the length, of interaction of two basic - frequency waves for uniaxial crystals. For both, suitable angle of cut, and angle of incidence the directions of beams of both basic - frequency waves may coincide at the same time fulfilling the phase matching condition (12).