František Machala

O množině středů křivek konstantní křivosti rozšířené hyperbolické roviny, které procházejí daným bodem hyperbolické roviny a dotýkají se dané křivky konstantní křivosti

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 10 (1969), No. 1, 15--23

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119912`

1969 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS — TOM 30
FACULTAS RERUM NATURALIUM

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: doc. RNDr. Josef Šimek

O MNOŽINĚ STŘEDŮ KŘIVEK KONSTANTNÍ KŘIVOSTI ROZŠÍŘENÉ HYPERBOLICKÉ ROVINY, KTERÉ PROCHÁZEJÍ DANÝM BODEM HYPERBOLICKÉ ROVINY A DOTÝKAJÍ SE DANÉ KŘIVKY KONSTANTNÍ KŘIVOSTI

FRANTIŠEK MACHALA

(Postoupeno dne 14. července 1968)

I.

V reálné rozšířené eukleidovské rovině E_r je dán Beltrami-Kleinův model hyperbolické roviny absolutní kružnicí k o středu O. Vnitřní body absolutní kružnice k budeme nazývat H-body, množinu všech H-bodů H-rovinou. Vnější body absolutní kružnice k budeme nazývat ideální H-body a body absolutní kružnice k absolutní H-body. Rovina E_r je obrazem hyperbolické roviny, rozšířené o nevlastní a ideální body.

Definice 1. Je dán bod $S \in E_r$ a jeho polára s vzhledem k absolutní kružnici k. Křivka Φ, odpovídající absolutní kružnici k v perspektivní kolineaci φ o středu S a ose s a obsahující aspoň jeden H-bod, se nazývá křivka konstantní křivosti H-roviny. Jestliže je bod S H-bod, resp. ideální H-bod resp. absolutní H-bod, nazývá se křivka Φ H-kružnice resp. H-ekvidistanta resp. H-horocykl. Bod S se nazývá H-střed křivky Φ.

Z definice 1 ihned plyne: Je-li dán bod S a H-bod A, pak existuje jediná křivka Φ o H-středu S, procházející H-bodem A. Tuto křivku označíme $\Phi(S, A)$. Jestliže je $A \neq S$ a $A \notin s$, pak je kolineace φ regulární a křivka Φ se pak nazývá regulární. Jestliže je $A \equiv S$, pak je křivka $\Phi(S, A)$ dvojnásobným bodem S. Jestliže $A \in s$, pak je křivka $\Phi(S, A)$ dvojnásobnou úsečkou.

Věta 1. Nechť se křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ dotýkají v bodě T. Pak bod T leží na přímce S_1S_2. Obráceně: Jestliže mají křivky $\Phi(S_1, A_1)$, $\Phi(S_2, A_2)$ společný bod T takový, že leží na přímce S_1S_2, pak se v tomto bodě dotýkají.

Důkaz plyne snadno z definice 1.

Poznámka 1. Předpokládejme, že na křivec $\Phi(S, A)$ existuje absolutní H-bod X. Přímka SX je tečnou absolutní kružnice k. Zvolme bod $S_1 \in SX$. Pak každá křivka Φ o H-středu S_1 se dotýká křivky $\Phi(S, A)$ v bodě X.

Definice 2. Každá kuželosečka k_1 roviny E_r, kromě absolutní kružnice k, je H-kuželosečka. Jestliže je kuželosečka k_1 regulární, pak je i H-kuželosečka k_1 regulární.

Klasifikaci H-kuželoseček provádíme podle jejich polohy vzhledem k absolutní kružnici k. Uvedeme jen ty druhy H-kuželoseček, které budeme v dalším potřebovat. Předpokládáme, že všechny uvažované H-kuželosečky jsou regulární. Úplná klasifikace H-kuželoseček je provedena např. v lit. [2].

1. H-kuželosečka k_1 se nazývá ideální, jestliže neobsahuje žádný H-bod.

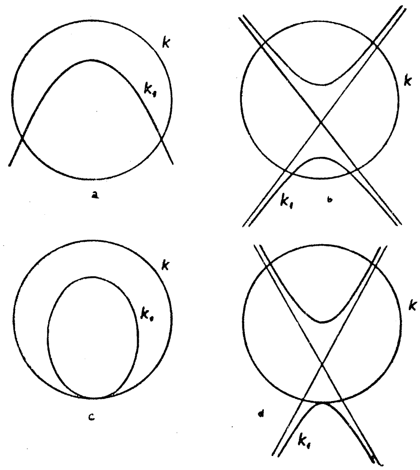
2. H-kuželosečka k_1 se nazývá elipsa, jestliže všechny její body jsou H-body.

3. H-kuželosečka k_1 se nazývá polohyperbola, jestliže obsahuje právě dva různé absolutní H-body (obr. 1a).

4. H-kuželosečka k_1 se nazývá vypuklá hyperbola, jestliže obsahuje čtyři různé absolutní H-body a jestliže neexistuje společná tečna kuželoseček k, k_1. (Obr. 1b.)

5. H-kuželosečka k_1 se nazývá eliptická parabola, jestliže obsahuje jediný absolutní H-bod a ostatní její body jsou H-body. (Obr. 1c.)

6. H-kuželosečka k_1 se nazývá vypuklá hyperbolická parabola, jestliže obsahuje tři různé absolutní H-body a jestliže existuje právě jedna společná tečna kuželoseček k, k_1. (Obr. 1d.)



Obr. 1

Úmluva 1. Pro čtveřici bodů M, N, N_1, N_2 budeme používat znaku $[MNN_1N_2]$ v těchto případech:

1. Body M, N jsou různé H-body, platí $(MNN_1N_2) = -1$, a body N_1, N_2 jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kružnici k.

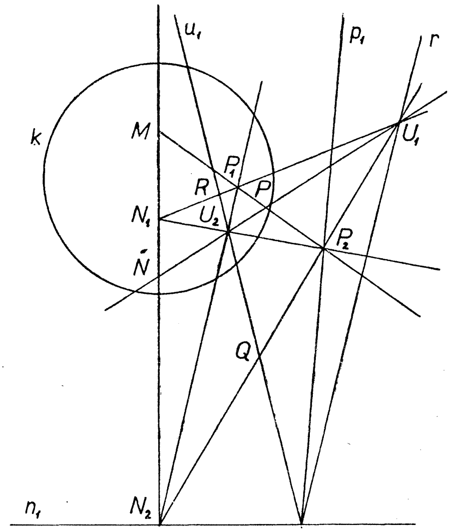
2. Body M, N jsou splývající H-body, platí $M \equiv N_1$ a bod N_2 je libovolný bod poláry m bodu M vzhledem k absolutní kružnici k.

3. Bod M je H-bod, bod N je absolutní H-bod a $N \equiv N_1 \equiv N_2$.

Věta 2. Mějme dány tři různé H-body M, N, P. Sestrojme body N_1, N_2 resp. P_1, P_2, pro které platí $[MNN_1N_2]$, $[MPP_1P_2]$. Přímky N_1P_1, N_2P_2 resp. N_1P_2, N_2P_1 se protínají v bodě U_1 resp. U_2 přímky NP. Platí $[NPU_1U_2]$.

Důkaz: Uvažujme úplný čtyřroh $N_1N_2P_1P_2$. (Obr. 2.) Jeho diagonální body jsou M, U_1, U_2. Z vlastností úplného čtyřrohu plyne $(U_1M, U_1U_2, U_1U_1, U_1N_2) = -1$. Ze vztahů $(MNN_1N_2) = (MPP_1P_2) = -1$ dále plyne $(U_1M, U_1N, U_1N_1, U_1N_2) = (U_1M, U_1P, U_1P_1, U_1P_2) = (U_1M, U_1P, U_1N_1, U_1N_2) =$

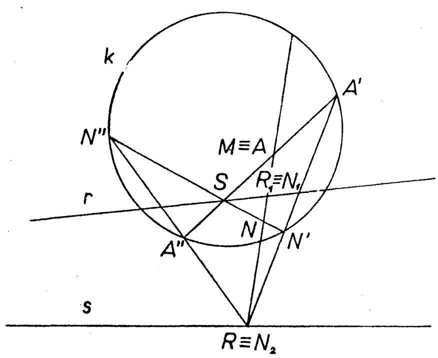
$= -1$. To znamená, že je $U_1U_2 = U_1N = U_1P$. Z vlastností úplného čtyřrohu vyplývá, že $(NPU_1U_2) = -1$.



Obr. 2

Dokážeme dále, že body U_1U_2 jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní kružnici k. Sestrojme poláru u_1 bodu U_1 vzhledem k absolutní kružnici k.

1. Předpokládejme, že některý z bodů N_1, N_2, P_1, P_2, např. bod N_1 leží na přímce u_1. (Obr. 3.) Označme A pól přímky $a \equiv U_1N_1$. Pak přímka $n_1 \equiv U_1A$ je polára bodu N_1. Z konstrukce bodu U_1 plyne, že $N_2 \in n_1$, $P_1 \in a$. Protože jsou body P_1, P_2 polárně sdruženy vzhledem k absolutní kružnici k, platí $A \equiv P_2$, čili $u_1 \equiv N_1P_2$. Z toho plyne $U_2 \in u_1$ a body U_1, U_2 jsou polárně sdruženy vzhledem k absolutní kružnici k.



Obr. 3

2. Předpokládejme, že žádný z bodů N_1, P_1 neleží na přímce u_1 a uvažujme perspektivní kolineaci φ o středu U_1 a ose u_1, ve které $N_1 \to P_1$. (Obr. 2.) Dvojpoměr $(U_1RN_1P_1)$, kde R je průsečík přímek U_1N_1, u_1, je charakteristickým dvojpoměrem této kolineace. Označme r, n_1, p_1 poláry bodů R, N_1, P_1. Pak platí $(U_1RN_1P_1) = (u_1, r, n_1, p_1) = (QU_1N_2P_2) = (U_1QP_2N_2)$, kde Q je průsečík přímek u_1, U_1N_2. To znamená, že $P_2 \to N_2$ v kolineaci φ. Pak $N_1P_2 \to P_1N_2$. Průsečík U_2 přímek N_1P_2, P_1N_2 leží proto na ose u_1 kolineace φ. Body U_1, U_2 jsou pak polárně sdruženy vzhledem k absolutní kružnici k.

II.

Budiž dána regulární křivka Φ o H-středu S a H-bod M. Jeden z průsečíků přímky SM s křivkou Φ označme A a průsečíky této přímky s absolutní kružnicí k označme A', A''. (Obr. 4.)

Zvolme dále libovolný bod $N \in \Phi$ a sestrojme body N_1, N_2, pro které platí $[MNN_1N_2]$. Označení bodů budeme volit podle následující úmluvy.

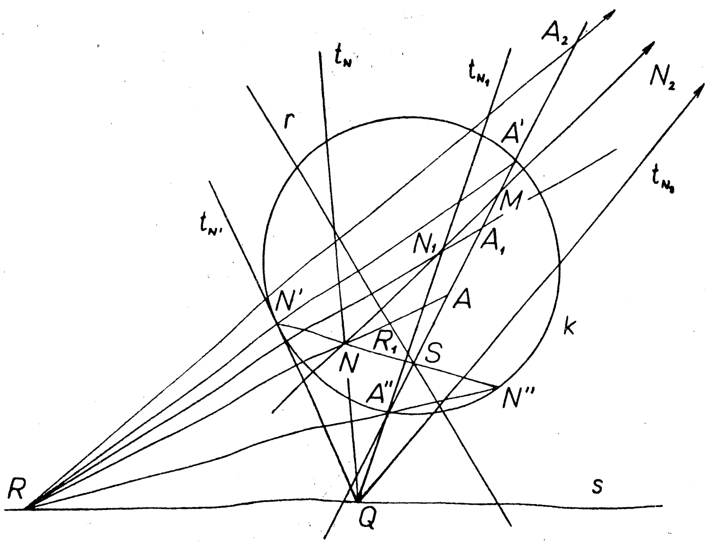
Úmluva 2. 1. Je-li křivka Φ H-ekvidistanta a body A, N leží v opačných polorovinách, určených přímkou s, pak N_1 je ideální H-bod.

2. Ve všech ostatních případech je N_1 H-bod nebo absolutní H-bod.

Sestrojme body A_1, A_2, pro které platí $[MAA_1A_2]$ a označme je podle úmluvy 2.

Věta 3. Předpokládejme, že H-bod M neleží na křivce Φ. Množinou bodů N_1 resp. N_2, pro které platí $[MNN_1N_2]$, kde $N \in \Phi$, je kuželosečka k_1 resp. k_2, odpovídající křivce Φ v perspektivní kolineaci φ_1 resp. φ_2 o středu M a ose s, ve které $A \to A_1$ resp. $A \to A_2$, krátce φ_1 $(M, s, A \to A_1)$ resp. φ_2 $(M, s, A \to A_2)$.

Důkaz: 1. Předpokládejme, že $N \in k$. Podle úmluvy 1 platí $N \equiv N_1 \equiv N_2$. Bod N leží na ose s kolineací φ_1, φ_2 a proto je bodem kuželoseček k_1, k_2.



Obr. 4

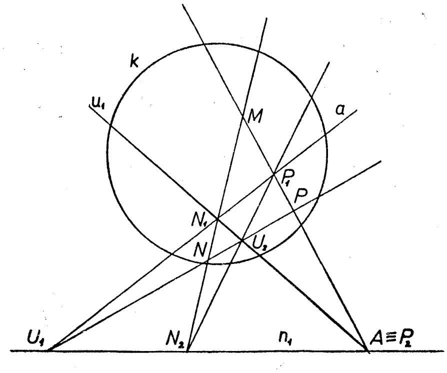
2. Předpokládejme, že $N \notin k$. Průsečíky přímky SN s absolutní kružnicí k označme N', N''. (Obr. 4.) Z definice 1 plyne, že se přímky AN, $A'N'$, $A''N''$ protínají v bodě R na přímce s. Bod R je diagonálním bodem úplného čtyřrohu $A'A''N'N''$vepsaného absolutní kružnici k. Jeho protější diagonálu označme r. Z vlastností úplného čtyřrohu plyne $[ANRR_1]$, kde R_1 je průsečík přímek r, AN. Z věty 2 a úmluvy 2 plyne, že přímky A_1N_1, A_2N_2 procházejí bodem R. To však znamená, že $N \to N_1$ resp. $N \to N_2$ v kolineaci φ_1 resp. φ_2. Body N_1 resp. N_2 vytvářejí kuželosečku k_1 resp. k_2 kolineární s křivkou Φ v kolineaci φ_1 resp. φ_2.

Poznámka 2. Sestrojme tečnu $t_{N'}$ v bodě N' ke kružnici k a její průsečík s přímkou s označme Q. (Obr. 4.) Podle definice 1 je přímka $t_N \equiv QN$ tečna křivky Φ v bodě N a přímky $t_{N_1} \equiv QN_1$, $t_{N_2} \equiv QN_2$ jsou pak tečny ke kuželosečkám k_1, k_2 v bodech N_1, N_2. Bod Q je pólem přímky SN.

Poznámka 3. Označme B druhý průsečík přímky SM s křivkou Φ. Z definice 1 plyne $[BASS_1]$, kde S_1 je průsečík přímek s, MS. Podle předpokladů věty 3 platí $M \notin \Phi$ a $[MAA_1A_2]$. Předpokládejme, že je $A_2 \equiv S_1$ resp. $A_1 \equiv S_1$. Pak ovšem $A_1 \equiv S$ resp. $A_2 \equiv S$ a $M \equiv B$, což je spor. Kolineace φ_1 $(M, s, A \to A_1)$, φ_2 $(M, s, A \to A_2)$ jsou regulární, neboť $A_1 \neq M$, $A_2 \neq M$, $A_1 \notin s$, $A_2 \notin s$. Kuželosečky k_1, k_2 jsou proto regulární.

Věta 4. Předpokládejme, že bod M leží na křivce Φ. Množinou bodů N_1 resp. N_2, pro které platí $[MNN_1N_2]$, kde $N \in \Phi$, je regulární kuželosečka k_1 resp. kuželosečka k_2 složená z přímek s, m, kde m je polára bodu M.

Důkaz: Označení zvolíme tak, aby $M \equiv A$. Zvolme bod $N \neq A$ křivky Φ, sestrojme poláru r průsečíku R přímek NA, N', A', N'', A'', s vzhledem k absolutní kružnici k a její průsečík R_1 s přímkou NA. (Obr. 5.) Protože platí $[ANRR_1]$, $[MNN_1N_2]$, $M \equiv A$, je $R_1 \equiv N_1$, $R \equiv N_2$. Jestliže zvolíme $N \equiv M$, pak podle úmluvy 1 je $N_1 \equiv M$ a každý bod přímky m je bodem N_2. Stejně jako ve větě 3 dokážeme, že množina bodů N_1 je regulární kuželosečka k_1, kolineární s křivkou Φ v kolineaci φ_1 $(M, s, N \to N_1)$. Množinou bodů N_2 jsou přímky s, m.



Obr. 5

Poznámka 4. Z konstrukce bodů N_1, N_2 plyne, že průsečíky přímky s s absolutní kružnicí k a jen tyto body jsou absolutními H-body kuželoseček k_1, k_2.

Všimněme si nyní podrobněji kuželoseček k_1, k_2 v jednotlivých případech.

1. Předpokládejme, že křivka Φ je H-kružnice. Kuželosečky k_1, k_2 neobsahují absolutní H-body. Všechny body kuželosečky k_1 resp. k_2 jsou podle úmluvy 1 H-body resp. ideální H-body.

a) Nechť je H-bod M vnějším bodem H-kružnice Φ. Pak můžeme tímto bodem vést dvě různé tečny k H-kružnici Φ. Tyto přímky jsou současně tečnami kuželoseček k_1, k_2, jak plyne z kolineací φ_1, φ_2. Z toho dále vyplývá, že všechny body absolutní kružnice k jsou vnějšími body kuželosečky k_2. Existují proto čtyři různé společné tečny kuželoseček k, k_2.

b) Nechť je H-bod M vnitřním bodem H-kružnice Φ. Bod M je také vnitřním bodem kuželosečky k_2 a všechny body absolutní kružnice k jsou vnitřními body kuželosečky k_2. Neexistují společné tečny kuželoseček k, k_2.

2. Předpokládejme, že křivka Φ je H-ekvidistanta. Nechť $M \notin \Phi$. Kuželosečka k_1 resp. k_2 obsahuje právě dva různé absolutní H-body. Existují právě dvě různé společné tečny kuželoseček k, k_1 resp. k, k_2.

3. Předpokládejme, že křivka Φ je H-horocykl. Kuželosečky k_1, k_2 obsahují jediný absolutní H-bod S. Všechny body kuželosečky k_1, resp. k_2 kromě bodu S jsou H-body resp. ideální H-body. Stejně jako v případě 1. ukážeme:

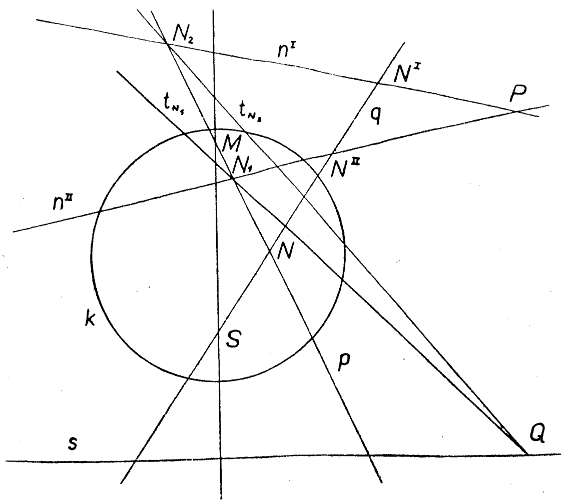
a) Jestliže je H-bod M vnější bod H-horocyklu Φ, leží všechny body absolutní kružnice k, kromě bodu S, vně kuželosečky k_2, existují právě tři společné tečny kuželoseček k, k_2.

b) Jestliže je H-bod M vnitřní bod H-horocyklu Φ, jsou všechny body absolutní kružnice k kromě bodu S vnitřními body kuželosečky k_2. Existuje právě jedna společná tečna s kuželoseček k, k_2.

Jestliže H-bod M leží na křivce Φ, pak pro kuželosečku k_1 platí závěry učiněné v jednotlivých případech, kuželosečka k_2 se skládá vždy z přímek s, m.

III.

Sestrojme kuželosečky k^{I}, k^{II} odpovídající kuželosečkám k_1, k_2 v polaritě indukované v rovině E_r absolutní kružnicí k. Naznačíme konstrukci bodů N^{I} resp. N^{II} a tečen n^{I} resp. n^{II} kuželosečky k^{I} resp. k^{II}: Zvolme libovolný bod $N \in \Phi$ a sestrojme body N_1, N_2 kuželoseček k_1, k_2, tzn. body, pro které platí $[MNN_1N_2]$. (Obr. 6.) Poláry n^{I}, n^{II} bodů N_1, N_2 procházejí pólem P přímky $p \equiv MN$. Z konstrukce bodů N_1, N_2 plyne $n^{\mathrm{I}} \equiv PN_2$, $n^{\mathrm{II}} \equiv PN_1$. Přímky n^{I}, n^{II} jsou tečny kuželoseček k^{I}, k^{II}. Sestrojíme dále pól Q přímky $q \equiv SN$. Podle poznámky 1 jsou přímky $t_{N_1} \equiv QN_1$, $t_{N_2} \equiv QN_2$ tečny kuželoseček k_1, k_2 v bodech N_1, N_2. Póly N^{I}, N^{II} přímek t_{N_1}, t_{N_2} jsou průsečíky přímek n^{I}, n^{II} s přímkou q. Tyto body jsou body dotyku tečen n^{I}, n^{II} kuželoseček k^{I}, k^{II}.



Obr. 6

Předpokládejme, že bod O — střed absolutní kružnice k, je vnějším bodem kuželosečky k_1. Bodem O můžeme vést k této kuželosečce dvě různé tečny. Protože bodu O odpovídá v polaritě nevlastní přímka, obsahuje kuželosečka k^{I} dva různé nevlastní body roviny E_r. Kuželosečka k^{I} je hyperbola. Jestliže je bod O vnitřním bodem kuželosečky k_1 resp. leží na kuželosečce k_1, je kuželosečka k^{I} elipsa resp. parabola. Stejnou úvahu můžeme provést pro regulární kuželosečku k^{II}.

Předpokládejme, že kuželosečka k_2 je složená z přímek m, s, jejichž průsečík je U. Každá přímka svazku o středu U může být považována za tečnu kuželosečky k_2. Tečny kuželosečky k^{II} vytvářejí svazky přímek o středech M, S. Bodová kuželosečka k^{II} je dvojnásobnou přímkou MS.

Poznámka 5. Předpokládejme, že přímka s protíná absolutní kružnici k v bodě X. Bodem X procházejí kuželosečky k_1, k_2. Proto je tečna k absolutní kružnici k v bodě X současně tečnou kuželoseček k^{I}, k^{II}. Každá sečna resp. nesečna křivky Φ, procházející jejím H-středem S, je současně sečnou resp. nesečnou kuželoseček k^{I}, k^{II}.

Věta 5. Množinou H-středů křivek konstantní křivosti, které se dotýkají dané regulární křivky Φ a procházejí daným H-bodem M jsou kuželosečky k^{I}, k^{II} a společné tečny křivky Φ a absolutní kružnice k.

Důkaz: 1. Předpokládejme, že $M \notin \Phi$.

a) Veďme H-středem S křivky Φ libovolnou sečnu q této křivky, která protíná křivku Φ a kuželosečky k^{I}, k^{II} postupně v bodech N, R; N^{I}, R^{I}; N^{II}, R^{II}. (Obr. 6, kde je konstrukce provedena jen pro bod N.) Každou křivku konstantní křivosti, která splňuje požadavky věty, označíme $\Phi^\star$. Dokážeme, že body N^{I}, N^{II}, R^{I}, R^{II} jsou H-středy křivek $\Phi^\star$. Podle věty 5 lit [4] jsou přímky n^{I}, n^{II} resp. r^{I}, r^{II} množinou H-středů křivek konstantní křivosti, které procházejí body M, N resp. M, R. Křivky $\Phi(N^{\mathrm{I}}, M)$, $\Phi(N^{\mathrm{II}}, M)$, resp. $\Phi(R^{\mathrm{I}}, M)$, $\Phi(R^{\mathrm{II}}, M)$ jsou křivkami $\Phi^\star$, neboť se podle věty 1 dotýkají křivky Φ v bodě N resp. R. Dokážeme dále, že na přímce q neleží další H-střed křivky $\Phi^\star$: Uvažujme libovolnou křivku $\Phi^\star$, jejíž H-střed leží na přímce q. Tato křivka se dotýká křivky Φ v bodě N nebo R. Protože křivka $\Phi^\star$ prochází také bodem M, musí podle věty 5 lit. [4] její H-střed ležet na jedné z přímek n^{I}, n^{II}, r^{I}, r^{II}. To znamená, že H-střed uvažované křivky $\Phi^\star$ je některým z bodů N^{I}, N^{II}, R^{I}, R^{II}.

b) Předpokládejme, že existuje tečna x, vedená ke křivce Φ z jejího H-středu S. Podle poznámky 5 je x tečnou kuželoseček k^{I}, k^{II}. Zvolme libovolný bod $W \in x$. Křivka Φ (W, M) je podle poznámky 1 křivkou $\Phi^\star$.

c) Předpokládejme, že existuje přímka q, procházející bodem S, na které neleží žádný bod křivky Φ. Podle poznámky 5 neleží na přímce q také žádný bod kuželoseček k^{I}, k^{II}. Podle věty 1 se žádná křivka konstantní křivosti, jejíž H-střed leží na přímce q, nedotýká křivky Φ. Proto také neexistuje křivka $\Phi^\star$, jejíž H-střed leží na přímce q.

2. Předpokládejme, že $M \in \Phi$.

a) Veďme bodem S sečnu $q \neq SM$ křivky Φ, která ji protíná v bodech N, R. Podle věty 4 platí $N_2 \in s$, $R_2 \in s$ a proto $S \in n^{\mathrm{II}}$, $S \in r^{\mathrm{II}}$ a $S \equiv N^{\mathrm{II}} \equiv R^{\mathrm{II}}$. Stejně jako v části 1 ukážeme, že body N^{I}, R^{I}, $S \equiv N^{\mathrm{II}} \equiv R^{\mathrm{II}}$ kuželoseček k^{I}, k^{II} a jen tyto body jsou H-středy křivek $\Phi^\star$, ležící na přímce q. Zvolme dále $q \equiv SM$. Zřejmě je každá křivka $\Phi(W, M)$, kde $W \in q$, křivkou $\Phi^\star$. V případě $W \equiv S$ platí $\Phi(W, M) \equiv \Phi(S, M)$. Ve zbývajících případech postupujeme stejně jako v části 1.

Poznámka 6. Doposud jsme předpokládali, že je křivka Φ regulární. Případy singulárních křivek se nemusíme zabývat, protože je řeší věty 5, 6 lit. [4].

Nyní provedeme klasifikaci H-kuželoseček k^{I}, k^{II} v jednotlivých případech. Použijeme k tomu vlastností kuželoseček k_1, k_2, popsaných v závěru části II a vlastností kuželoseček polárně sdružených. Předpokládáme, že křivka Φ je regulární.

1. Nechť je křivka Φ H-kružnice. Všechny tečny kuželosečky k_1 jsou sečnami absolutní kružnice k a proto jsou všechny body kuželosečky k^{I} ideální H-body. H-kuželosečka k^{I} je ideální.

a) Nechť je H-bod M vnějším bodem H-kružnice Φ. Bod O je vnějším bodem kuželosečky k_2 a proto je kuželosečka k^{II} hyperbola. Existují čtyři různé společné tečny kuželoseček k, k_2 a proto existují čtyři různé průsečíky kuželoseček k, k^{II}. Protože kuželosečky k, k_2 neobsahují společný bod, neexistuje společná tečna kuželoseček k, k^{II}. H-kuželosečka k^{II} je vypuklá hyperbola.

b) Nechť je H-bod M vnitřním bodem H-kružnice Φ. Všechny body kuželosečky k^{II} jsou H-body. H-kuželosečka k^{II} je elipsa.

2. Nechť je křivka Φ H-ekvidistanta a nechť $M \notin \Phi$. Existují právě dva různé průsečíky kuželoseček k, k^{I} resp. k, k^{II}. H-kuželosečky k^{I}, k^{II} jsou polohyperboly.

3. Nechť je křivka Φ H-horocykl. Všechny body kuželosečky k^{I} až na bod S jsou ideální H-body. H-kuželosečka k^{I} je ideální.

a) Nechť je H-bod M vnější bod H-horocyklu Φ. Kuželosečka k^{II} je hyperbola. Existují právě tři společné body kuželoseček k, k^{II} a jediná společná tečna. H-kuželosečka k^{II} je vypuklá hyperbolická parabola.

b) Nechť je H-bod M vnitřní bod H-horocyklu Φ. Existuje jediný společný bod kuželoseček k, k^{II}. Všechny ostatní body kuželosečky k^{II} jsou H-body. H-kuželosečka k^{II} je eliptická parabola.

Jestliže H-bod M leží na křivce Φ, pak pro H-kuželosečku k^{I} platí závěry učiněné v jednotlivých případech a kuželosečka k^{II} je dvojnásobnou přímkou SM.

Poznámka 7. Body hyperbolické roviny se zobrazují na Beltrami-Kleinově modelu do vnitřních bodů absolutní kružnice k. Body absolutní kružnice jsou obrazy nevlastních bodů hyperbolické roviny. Poznatky, které se týkají vnitřní geometrie hyperbolické roviny můžeme aplikovat na vnitřek absolutní kružnice a naopak.

Proveďme srovnání známých pouček rozšířené eukleidovské roviny s výsledky, ke kterým jsme dospěli v části I. Ukazuje se, že je možno formulovat věty, které platí současně v obou geometriích. Je nutno si však uvědomit, že jednou chápeme pojmy „kružnice“ a „kuželosečka“ ve smyslu geometrie eukleidovské a po druhé ve smyslu geometrie hyperbolické. Platí:

1. Množina středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice a procházejí vnějším bodem M této kružnice je kuželosečka, která má s nevlastním útvarem dané roviny nejvyšší možný počet různých společných bodů. (V rovině eukleidovské hyperbola, v rovině hyperbolické vypuklá hyperbola.)

2. Množina středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice a procházejí vnitřním bodem M této kružnice je kuželosečka, která nemá s nevlastním útvarem dané roviny žádný bod společný. (V rovině eukleidovské i hyperbolické elipsa.)

3. Množina středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice v jejím bodě M je přímka.

LITERATURA

[1] *Kagan V. F.:* Osnovanija geometrii. Část 1. Moskva 1949.
[2] *Kagan V. F.:* Osnovanija geometrii. Část 2. Moskva 1956.
[3] *Hlavatý V.:* Projektivní geometrie 2. Útvary dvojparametrické. Praha 1945.
[4] *Machala F.:* O množině středů křivek konstantní křivosti hyperbolické roviny, které procházejí daným bodem a dotýkají se dané přímky. Acta Univ. Pal. Olomucensis, 1968.

РЕЗЮМЕ

О МНОЖЕСТВЕ ЦЕНТРОВ КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ КРИВЫЗНЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ, КОТОРЫЕ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ И КАСАЮТСЯ ДАННОЙ КРИВОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВЫЗНЫ

ФРАНТИШЕК МАХАЛА

В настоящей работе открыто множество центров кривых постоянной кривызны расширенной гиперболической плоскости, которые проходят через данную точку M и касаются данной кривой Φ постоянной кривызны. Дальше проводятся полная дискуссия данной проблемы для всех типов кривых Φ и для разных взаимных положений точки M по отношению к кривой Φ. Все рассуждения проводятся на модели Бельтрами-Клейна при помощи синтетического метода.

ZUSAMMENFASSUNG

ÜBER DIE MENGE DER MITTELPUNKTE VON KURVEN KONSTANTER KRÜMMUNG DER ERWEITERTEN HYPERBOLISCHEN EBENE, DIE DURCH EINEN GEGEBENEN PUNKT GEHEN UND EINE GEGEBENE KURVE KONSTANTER KRÜMMUNG BERÜHREN

FRANTIŠEK MACHALA

In der vorliegenden Arbeit wird die Menge der Mittelpunkte von Kurven konstanter Krümmung der erweiterten hyperbolischen Ebene gefunden, die durch einen gegebenen Punkt M gehen und eine gegebene Kurve Φ konstanter Krümmung berühren. Weiter wird die volle Diskussion des gegebenen Problems für alle Arten der Kurven Φ und für verschiedene gegenseitige Lagen des Punktes M und der Kurve Φ durchgeführt. Alle Betrachtungen werden synthetisch am Beltrami-Klein-Modell angegeben.