

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Pavel Chmela

Обоснование употребления принципа Фермата в оптике анизотропных
кристаллов

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
10 (1969), No. 1, 255--276

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119911>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra teoretické fyziky a astronomie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. et DSc. Bedřich Havelka*

ОБОСНОВАНИЕ УПОТРЕБЛЕНИЯ ПРИНЦИПА ФЕРМАТА В ОПТИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ

ПАВЕЛ ХМЕЛА

(в редакцию поступлено 14. 6. 1968)

I. Введение

На естественнонаучном факультете Университета им. Палацкого в Оломоуце была открыта дискуссия насчет обоснования употребления принципа Фермата в области анизотропных сред. Приводились некоторые возражения против применимости принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов и потребовалось приведения доказательства принципа Фермата для оптики анизотропных кристаллов.

Считаем, что требование привести доказательство какого-нибудь принципа является требованием несколько несоразмерным и что можно только на отдельных случаях или на взаимной корреспонденции одного принципа с другим показать применение принципа в определенной области. Сам принцип доказывать нельзя.

В настоящей работе нам хочется познакомить читателя с формулировкой принципа Фермата в области анизотропных сред, с возражениями против его применимости в оптике анизотропных кристаллов, попытаться опровергнуть эти возражения и дальше на некоторых примерах показать действие принципа Фермата в области анизотропной среды.

Так как большинство конструкций и эксплицитных отношений для лучевого направления распространения света исходит в оптике анизотропных кристаллов из принципа Гюйгенса, является вполне естественным, что мы будем исходить из взаимной корреспонденции между принципами Гюйгенса и Фермата, или из результатов, достигнутых при употреблении принципа Гюйгенса.

II. Формулировка принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов

Принцип Фермата — это принцип геометрической оптики, касающийся формы пути луча света между двумя данными точками. Если обозначить скорость света в изотропной среде v , скорость света в вакууме c , и если определить индекс преломления

$$n = \frac{c}{v}, \quad (1)$$

то действительный оптический путь луча света между двумя точками A и B является стационарным, т. е.

$$\delta \int_A^B n \, ds = 0. \quad (2)$$

При исследовании распространения света в анизотропной среде мы встречаемся со следующими двумя скоростями, находящимися в связи с непрерывным распространением света, — со скоростью нормальной v_n , которая выступает в фазе электромагнитных волн в электромагнитной теории Максвелла, и со скоростью лучевой v_r , являющейся скоростью распространения монохроматической электромагнитной волны по направлению вектора Пойнтинга. Электромагнитная волна распространяется не по направлению своей нормали, а по определенному вектором Пойнтинга направлению; этот вектор заключает с нормальным направлением распространения угол δ . Между обеими скоростями существует отношение

$$v_n = v_r \cos \delta, \quad (3)$$

и между соответствующими индексами преломления

$$n_n = \frac{c}{v_n}, \quad n_r = \frac{c}{v_r} \quad (4)$$

отношение

$$n_r = n_n \cos \delta. \quad (5)$$

Энергия света распространяется по направлению вектора Пойнтинга, с этим направлением находится в связи лучевая скорость v_r . Значит, если мы хотим установить вариационный принцип, который описывал бы путь луча света, необходимо учитывать лучевой индекс преломления n_r .

В нашей работе принимаем для распространения света в анизотропной среде вариационную формулировку принципа Фермата (2), где индекс преломления в изотропной среде n заменяем лучевым индексом преломления в анизотропной среде n_r , т. е. для действительного пути луча света будет выполнено вариационное условие

$$\delta \int_A^B n_r \, ds = 0. \quad (6)$$

Индекс преломления в изотропной среде n может быть в общем функцией координат. В анизотропной среде необходимо учитывать еще функциональную зависимость индекса преломления от направления распространения, напр. в системе координат Декарта

$$n_r = n_r \left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) \quad (7a)$$

или

$$n_r = n_r(x, y, z, \vec{f}), \quad (7b)$$

где мы обозначили \vec{f} единичный вектор по направлению смещения ds

В этом существенным образом отличается формулировка принципа Фермата для изотропной среды и для анизотропной среды.

Функциональная зависимость индекса преломления от направления распространения проявляется и при конструкции эйкональных поверхностей, т. е. поверхностей, в которых функция действия

$$S = \int n_r ds \quad (8)$$

константная.

Разумеется, что форма этих поверхностей будет зависеть от граничных условий, т. е. от формы эйкональной поверхности, из которой мы при конструкции исходим.

Предположим, что через точку A проходит какая-то эйкональная поверхность, на которой функция действия константная, т. е. $S_A = \text{конст.}$ (см. рис. 1).

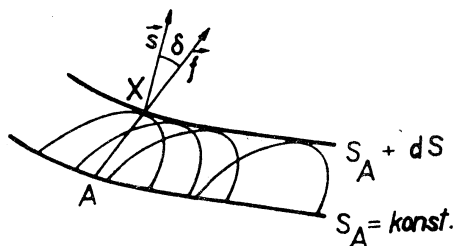


Рис. 1

Нас интересует теперь, какой будет эйкональная поверхность $S_A + dS$, для которой действует

$$\delta(dS) = 0, \quad \text{или} \quad dS = \text{конст.}, \quad (9)$$

и дальше, которая точка X на поверхности $S_A + dS$ будет соответствовать действительному направлению распространения оптического луча из точки A .

Для любой эйкональной поверхности S_A , которая проходит через точку A , будут условие стационарности, имея в виду точку A , выполнять все лежащие на этой поверхности точки, дистанции которых от точки A даются выражением

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dS}{n_r \left(x_A, y_A, z_A, \left(\frac{dx}{ds} \right)_A, \left(\frac{dy}{ds} \right)_A, \left(\frac{dz}{ds} \right)_A \right)} = \\ &= \frac{dS}{c} v_r \left(x_A, y_A, z_A, \left(\frac{dx}{ds} \right)_A, \left(\frac{dy}{ds} \right)_A, \left(\frac{dz}{ds} \right)_A \right), \end{aligned} \quad (10)$$

при этом дифференциал удовлетворяет условию (9).

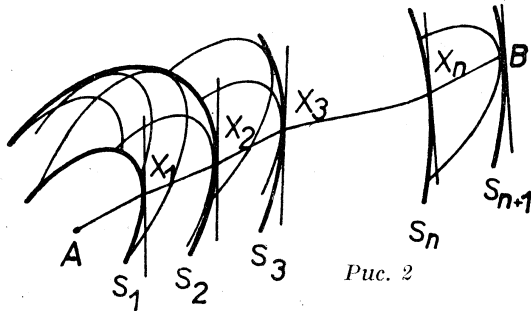
Если обобщить условие стационарности (6) для всех точек эйкональ-

ной поверхности S_A , будет эйкональная поверхность $S_A + dS$ определена как огибающая всех элементарных поверхностей, конструированных во всех точках эйкональной поверхности S_A .

Действительный путь луча света из точки A определяет линия, соединяющая точку A и X . В точке X элементарная поверхность, конструированная в точке A , прикасается к эйкональной поверхности $S_A + dS$.

Имея в виду функциональную зависимость лучевого индекса преломления n_r или лучевой скорости v_r от направления распространения \vec{f} , видно, что лучевое направление \vec{f} не будет параллельным нормали эйкональной поверхности \vec{s} , а будет с последней заключать угол δ подобно, как это вытекает из электромагнитной теории света.

Вернемся теперь еще к первоначальной вариационной формулировке принципа Фермата и попытаемся покрыть пространство между точками A и B системой эйкональных поверхностей, на которых функция действия S константная.



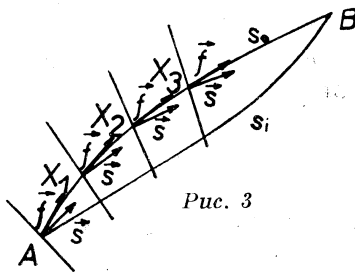
Форма эйкональных поверхностей зависит от взаимного местоположения точек A и B , значит, нельзя примарно установить эйкональную поверхность S_A , которая бы проходила через точку A .

Конструкцию эйкональных поверхностей можно сделать так, что мы примем за исходный пункт точку A , вокруг которой конструируем элементарную эйкональную поверхность S_1 . В каждой точке такой эйкональной поверхности конструируем потом опять элементарные эйкональные поверхности и в качестве огибающей получаем эйкональную поверхность S_2 . Эту конструкцию продолжаем до получения эйкональной поверхности S_{n-1} , на которой находится точка B . Путь луча света s_0 определяем так, что примем за исходный пункт точку B и определим обратно точку X_n , в которой была конструирована элементарная эйкональная поверхность, прикасающаяся в точке B к эйкональной поверхности S_{n+1} . Таким образом определим все точки $B, X_n, X_{n-1}, \dots, X_1, A$, которые определяют путь луча света s_0 из точки A в точку B .

Условию стационарности оптического пути удовлетворяют оптические пути на всех участках между точками X_k и X_{k-1} , и, следовательно, и весь, оптический путь на линии s_0 . Если в точках X_1, X_2, \dots, X_n конструируют, эйкональные поверхности, касательные плоскости

которых сходны с касательной плоскостью эйкональных поверхностей, полученных вышеописанной конструкцией, показывается, что все такие эйкональные поверхности в близком окружении луча s_0 сходны. В крайнем случае можно пространство между точками A и B покрыть системой плоских эйкональных поверхностей, нормали \vec{s} которых однозначно определяются функциональной зависимостью лучевого индекса преломления n_r от лучевого направления распространения \vec{f} . Эти нормали соответствуют т. наз. нормальному направлению распространения, которое употребляется в электромагнитной теории света.

Итак, если разделить действительный путь луча света s_0 на маленькие участки и в каждой делящей точке провести плоскую эйкональную поверхность, определенную нормалью $\vec{s}(\vec{f})$ (см. рис. 3), то оптические пути в отдельных участках будут стационарными, это значит, что если вести сравнительную линию s_i , являющуюся достаточно малой вариацией действительного пути светового луча s_0 , оптические пути в отдельных отрезках на линиях s_0 и s_i , кроме малых величин высших порядков, сходны. Следствием стационарности оптического пути в отдельных отрезках является стационарность общего оптического пути между точками A и B .



III. Взаимная корреспонденция между принципом Фермата и волновой теорией света

Описанная в предыдущей главе конструкция эйкональных поверхностей напоминает конструкцию световых волновых поверхностей на основе принципа Гюйгенса. Если учесть отношение (10), видно, что при подходящем выборе граничных условий эйкональные поверхности тождественны со световыми волновыми поверхностями. Конструкция светового луча, сделанная на основе вариационной формулировки принципа Фермата, тождественна, таким образом, с конструкцией Гюйгенса.

Покажем дальше, что прямо из принципа Фермата вытекает дифференциальное уравнение для фазы бегущей электромагнитной волны, которая распространяется в анизотропной среде.

Дифференциал функции действия dS , определенной отношением (8), можно записать в виде

$$dS = n_r ds = \text{grad } S \cdot \vec{f} ds. \quad (11)$$

Отсюда получается для функции действия S дифференциальное уравнение

$$\text{grad } S \cdot \vec{f} = n_r \quad (12)$$

или

$$(\text{grad } S)^2 = n_n^2, \quad (13)$$

где n_n обозначается нормальный индекс преломления

$$n_n = \frac{n_r}{\cos \delta}. \quad (14)$$

Угол δ обозначает здесь опять угол, который заключает лучевое направление распространения \vec{f} с нормальным направлением распространения, или с нормалью к эйкональной поверхности \vec{s} .

Учитываем теперь функцию действия, которая соответствует пути светового луча из точки A в точку B

$$S_{AB} = \int_A^B n_r ds. \quad (15)$$

Так как индекс преломления n_r не является временной функцией, можно писать для деривации по времени

$$\dot{S}_{AB} = \frac{\partial S_{AB}}{\partial t} = n_r \frac{ds}{dt} = n_r v_r = c. \quad (16)$$

Отсюда заменой переменных получаем

$$S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \dot{S}_{AB} dt = \tau(s). \quad (17)$$

Здесь мы обозначили $\tau(s)$ участок времени, за которое луч света пройдет путь из точки A в точку B по линии s . Для действительного пути луча света s_0 должно быть для времени $\tau(s_0)$ выполнено вариационное условие (6).

Принимаем во внимание теперь более общую функцию

$$S = \int_0^{t_B} \dot{S} dt = \int_0^B n_r ds, \quad (18)$$

которую разделим на две части; первая из них описывает путь луча света из какой-то точки $O(t=0)$ в точку A , и вторая идентична с функцией действия S_{AB} (15)

$$S = \int_0^B n_r ds = \int_0^{t_A} \dot{S} dt + \int_A^B n_r ds. \quad (19)$$

Отсюда получаем для функции действия S_{AB}

$$S_{AB} = \int_0^B n_r ds - ct_A. \quad (20)$$

Насчет функции S_{AB} предполагаем, что она выполняет вариационное условие (6). Так как о функции (19) мы предполагали, что она описывает действительный путь луча света из какой-то точки O в точку B , вариационное условие принципа Фермата (6) выполнено для всех членов в уравнениях (19) и (20).

Первый член на правой стороне уравнения (20) считаем функцией пространственных координат, второй член, очевидно, зависит только от времени. Если обозначить первый член в (20) $S_0(x, y, z)$ и $t_A = t$, можно любую функцию действия записать как функцию пространственных и временных координат

$$S(x, y, z, t) = S_0(x, y, z) - ct. \quad (21)$$

Если учесть (13), видно, что для такой функции действует дифференциальное уравнение

$$(\text{grad } S)^2 = \frac{1}{v_n^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2. \quad (22)$$

Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в анизотропной среде, описывается волновой функцией

$$A = A_0 e^{i\Phi}, \quad \Phi = \omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{v_n} \right) + \varphi_0. \quad (23)$$

Здесь $\vec{r}(x, y, z)$ обозначает вектор положения.

Фазовая функция Φ выполняет дифференциальное уравнение для эйконала (21).

Разумеется, что на основе принципа Фермата нельзя описывать те свойства света, которые выходят за рамки геометрической оптики, как напр. поляризацию, дифракционные явления и т. п. Однако для описывания геометрическо-оптических свойств распространения света в анизотропной среде принцип Фермата является вполне достаточным. Функциональная зависимость индекса преломления от лучевого направления распространения

$$n_r = n_r(\vec{f}) \quad (24)$$

вводится в геометрическую оптику кристаллов на основе электромагнитной теории Максвелла, это и отвечает взаимной корреспонденции принципов Гюйгенса и Фермата. Такое введение наименее трудное. Однако, принципиально можно было бы установить эту зависимость на основе экспериментальных измерений, употребляя исключительно принцип Фермата. Но такое сведение было бы в общем слишком трудно и не принесло бы никаких новых результатов.

IV. Возражения против применимости принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов и их недостатки

1. Первое возражение против применимости принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов исходило из следующей конструкции (см. рис. 4):

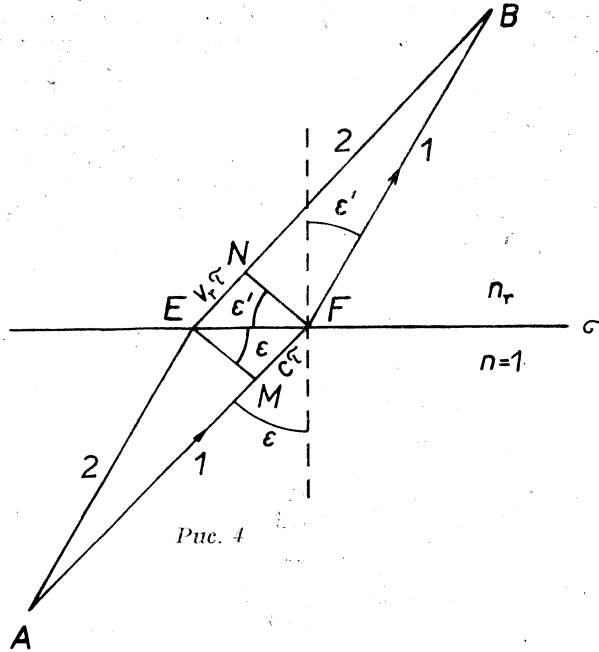


Рис. 4

Пусть точка A лежит в изотропной среде с индексом преломления $n = 1$, и точка B в анизотропной среде с индексом преломления $n = \frac{c}{v_r}$.

Обе среды отделяются друг от друга плоской границей σ . Преломленный геометрический луч 1 соответствует действительному пути, по которому распространяется свет из точки A в точку B . Точки A и B находятся в значительной дистанции от границы σ . Действительный путь луча 1 немного переменим в путь 2, так что

$$\overline{NF} \ll \overline{BF}, \quad \overline{EM} \ll \overline{EA}. \quad (25)$$

Итак, пути 1 и 2 почти параллельные. Если предположить, что вторая среда однородная, тогда индекс преломления n_r (1) приближается соответствующему пути 1 индекса преломления n_r (2), который соответствует варьированному пути 2.

Оптические пути 1 и 2 определяются выражениями

$$\begin{aligned} S_1 &= \overline{AM} + \overline{MF} + n_r \overline{FB} \\ S_2 &= \overline{AE} + n_r (\overline{EN} + \overline{NB}). \end{aligned} \quad (26)$$

Для достаточно близких лучей 1 и 2 будет

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \overline{AE} \\ n_r \overline{FB} &= n_r \overline{NB}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из условия стационарности оптических путей

$$S_1 = S_2 \quad (28)$$

тогда вытекает

$$\overline{MF} = n_r \overline{EN}. \quad (29)$$

Из отношений (27), (29) и из рис. 4 вытекает, что эйкональные поверхности перпендикулярны к лучевому направлению распространения, и действует закон преломления Снеля

$$n \sin \varepsilon = n_r \sin \varepsilon'.$$

Так как в анизотропной среде лучевое направление распространения в общем не перпендикулярно к эйкональным поверхностям, закон преломления Снеля не действует, и о среде мы не сделали никаких ограничительных предположений, вытекало бы отсюда, что принцип Фермата в области анизотропной среды нельзя употребить.

Это рассуждение предполагало, что в однородном анизотропном диэлектрике оптические пути, соответствующие двум одинаковым геометрическим дистанциям на двух почти параллельных лучах, сходны. Такое предположение в сущности идентично с предположением, что эйкональные поверхности перпендикулярны к лучевому направлению.

Покажем, что это предположение в основном не правильно.

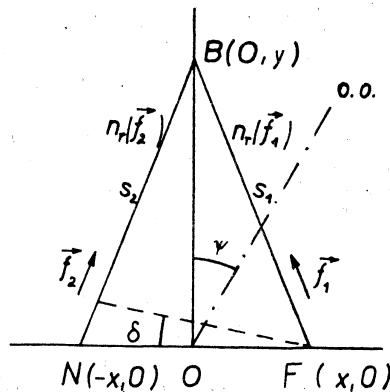


Рис. 5

На рис. 5 вводится удобно ориентированная система координат x, y так, что геометрические пути $s_1 = \overline{FB}$ и $s_2 = \overline{NB}$ одинаковы. Точки F и N лежат на оси x и они симметричны с началом координатной

системы, точка B лежит на оси y . Оптические пути на обоих лучах определяются выражениями

$$\begin{aligned} S_1 &= n_r(\vec{f}_1) \sqrt{x^2 + y^2} \\ S_2 &= n_r(\vec{f}_2) \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Дифференциал этих выражений определяется отношением

$$\Delta S = \sqrt{x^2 + y^2} [n(\vec{f}_2) - n_r(\vec{f}_1)]. \quad (31)$$

Если учесть два почти параллельных луча, необходимо лимитировать выражение (31) для $\frac{x}{y} \rightarrow 0$.

Однако для вычисления выражения

$$\lim_{\frac{x}{y} \rightarrow 0} \Delta S = \lim_{\frac{x}{y} \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} [n_r(\vec{f}_2) - n(\vec{f}_1)] \right\} \quad (32)$$

необходимо знание функциональной зависимости индекса преломления n_r от лучевого направления \vec{f} .

Как пример приведем здесь вычисление для необыкновенного луча в одноосном кристалле. Пусть оптическая ось кристалла заключает с координатной осью y угол ψ . Тогда лучевой индекс преломления n_r определяется выражением (см. [2], [6])

$$n_r = \sqrt{n_e^2 \sin^2 \Phi + n_o^2 \cos^2 \Phi}, \quad (33)$$

где

$$\Phi = \psi \pm \Delta$$

и

$$\sin \Delta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \Delta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= \sin \psi \cos \Delta \pm \cos \psi \sin \Delta \\ \cos \Phi &= \cos \psi \cos \Delta \mp \sin \psi \sin \Delta. \end{aligned}$$

Употребляя биномическую теорему, мы получаем

$$\lim_{\frac{x}{y} \rightarrow 0} \Delta S = 2 \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_r} \cos \psi \sin \psi x. \quad (34)$$

Аналогическое вычисление можно провести и для двухосных кристаллов.

Итак, мы видим, что разность оптических путей при равенстве путей геометрических прямо пропорциональна дистанции точек N и F .

Если мы хотим вычислить отклонение нормали эйкональной поверхности от луча δ , получаем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta S}{n_r 2x}, \quad (35)$$

и, таким образом, в случае одноосных кристаллов для необыкновенного луча выходит для произвольно малого x

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_r^2} \sin \psi \cos \psi. \quad (36)$$

Отсюда видно, что нельзя предполагать, что в анизотропной среде эйкональные поверхности, или волновые поверхности перпендикулярны к лучевому направлению, и возражение, исходящее из такого предположения, совсем необоснованное.

2. Второе возражение против применимости принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов исходило из возражения первого и было основано на следующем рассуждении:

Пусть точки A и B находятся в изотропной среде, и линия s_0 соответствует действительному пути луча света из точки A в точку B . Действительный путь s_0 разделим на маленькие участки и в деющих точках проводим плоскости перпендикулярные к лучу s_0 . Если путь s_0 немного переменить в другой путь s_1 , то оптические пути на линиях s_0 и s_1 будут в отдельных участках отличаться только маленькими величинами высших порядков. Можно, таким образом, сказать, что оптические пути в отдельных участках стационарные, и следствием этой стационарности в отдельных участках является стационарность общего оптичес-

кого пути $S = \int_A^B n ds$ на линии s_0 . Действительность принципа Фермата является в сущности следствием такой стационарности в каждом участке.

Если провести вполне одинаковое рассуждение в анизотропной среде, нельзя утверждать, что оптические пути на сравнительных линиях отличаются только маленькими величинами высших порядков. Значит, нельзя предполагать, что оптические пути в отдельных участках стационарные. Так как оптический путь s_0 должен быть в общем стационарным, надо было бы нестационарность в одном участке компенсировать отклонениями в других участках; эти отклонения, однако, зависят от выбора сравнительных линий. Таким образом был бы выбор допустимых линий ограничен, и принцип Фермата потерял бы характер критерия.

Это возражение имеет очевидный недостаток. Плоскости, проводимые в отдельных деющих точках на луче s_0 , являются по существу касательными плоскостями к эйкональным поверхностям. В изотропной среде индекс преломления не является функцией направления распространения, элементарными эйкональными поверхностями (см. рис. 1) являются, следовательно, всегда шары. Следствием того является то,

что эйкональные поверхности в изотропной среде всегда перпендикулярны к лучевому направлению распространения. В анизотропной среде существует к каждому лучевому направлению \vec{f} однозначно определенное нормальное направление \vec{s} [6], которое определяет нормаль эйкональной поверхности, или волновой поверхности. Если конструировать в деющих точках на луче s_0 плоскости, нормалью которых является нормальное направление $\vec{s}(\vec{f})$, то оптические пути на сравнительных линиях отличаются только маленькими величинами высших порядков, и можно утверждать, подобно, как в изотропной среде, что оптические пути в отдельных участках стационарные и что стационарным также является и общий оптический путь $S(s_0)$, как мы уже показали в главе II-ой настоящей работы. Значит, принцип Фермата не теряет в области анизотропной среды характер критерия.

3. Был еще поставлен вопрос, не надо ли в области анизотропной среды в вариационной формулировке (6) заменить индекс преломления n_r более общей функцией.

Из приведенной во II-ой и III-ей главе этой работы корреспонденции между принципами Фермата и Гюйгенса вытекает, что вариационная формулировка (6) вполне обоснована. Об этом свидетельствует и то, что принцип Фермата можно перевести в принцип временной стационарности. Из отношений (1) и (2) вытекает для изотропной среды

$$\delta\tau_{AB}(s_0) = 0, \quad (37)$$

где мы обозначили $\tau_{AB}(s_0)$ время, за которое луч света пройдет действительный путь s_0 между точками A и B . Если требовать подобной временной стационарности для анизотропной среды, видно, (см. (4)), что в вариационной формулировке (6) должен выступать лучевой индекс преломления n_r , или его произведение вместе с независимой ни от времени, ни от координат константой, которая, однако, не имеет для вариационной формулировки значения.

V. Некоторые примеры, показывающие обоснование употребление принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов

1. Дифференциальные уравнения пути луча света

Из вариационной формулировки (6) вместе с (7) вытекают три дифференциальных уравнения в координатах Декарта

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial n_r}{\partial x'} \right) - \frac{\partial n_r}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial n_r}{\partial y'} \right) - \frac{\partial n_r}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial n_r}{\partial z'} \right) - \frac{\partial n_r}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds}.$$

С формальной точки зрения эти уравнения значительно напоминают употребляемые в механике материальных частиц уравнения Лагранжа.

Исчерпывающим доказательством обоснования употребления принципа Фермата в оптике анизотропных кристаллов было бы установление пути луча s как функции координат x, y, z

$$s = s(x, y, z)$$

на основе уравнений (38) и сравнения таким образом установленного пути с действительным путем луча, форма которого была бы или установлена экспериментально, или на основе принципа Гюйгенса.

Затруднения такого процесса заключаются в том, что в действительных оптических системах луч света проходит сквозь оптическую систему, состоящую из ряда оптических сред, отделенных друг от друга граничными поверхностями. В области границы меняется индекс преломления скачком и нельзя его, таким образом, считать непрерывной функцией координат x, y, z . Вследствие скачка индекса преломления на границе было бы очень трудно уставить отдельные деривации в уравнениях (38).

Дифференциальные уравнения можно в явном виде решить только в случае учета неограниченной однородной среды.

В такой среде индекс преломления n_r не является явной функцией координат x, y, z и действует поэтому

$$\frac{\partial n_r}{\partial x} = \frac{\partial n_r}{\partial y} = \frac{\partial n_r}{\partial z} = 0.$$

Если учесть, что действует

$$ds = v_r dt,$$

вытекают из уравнений (38) три параметрических уравнения прямолинейного движения

$$\begin{aligned} x - x_0 &= K_x t \\ y - y_0 &= K_y t \\ z - z_0 &= K_z t. \end{aligned} \tag{39}$$

2. Преломление света на границе между двумя анизотропными средами

При конструкции преломленного луча обычно исходят из конструкции Гюйгенса. В точке, в которой происходит преломление, проводится касательная плоскость и конструируется преломленный луч так, будто преломление происходит на плоской границе.

Исходя из такой конструкции Гюйгенса, покажем теперь, что при преломлении на границе между двумя анизотропными средами выполнено условие стационарности оптических путей принципа Фермата.

Пусть преломление луча света происходит в какой-то точке O поверхности границы. Обозначим σ касательную плоскость к границе в точке O (см. рис. 6). Конструкция преломленного луча проводится следующим образом:

Лучевым направлением падающего луча \vec{f} определено однозначно нормальное направление падающей волновой поверхности Σ . Значит, возможно провести через точку O плоскую волновую поверхность Σ , соответствующую падающему лучу. В плоскости падения, определенной единичным вектором \vec{f} и нормально \vec{l} к границе, проводим близкий луч, параллельный лучу падающему. Этот луч пересекает падающую волновую поверхность Σ в точке F и плоскость границы σ в какой-то точке N , так что

$$\overline{FN} = v_r d\tau. \quad (40)$$

За время $d\tau$ распространяется волнение из точки O на элементарную волновую поверхность, определенную радиусом-вектором $v_r(\vec{f}') d\tau \vec{f}'$. Преломленную волновую поверхность конструируем потом так, что через прямую p , в которой плоскость, параллельная падающей волновой поверхности Σ и проходящая через точку N , пересекает плоскость границы σ , проводим касательную плоскость к элементарной волновой поверхности $v_r(\vec{f}') d\tau$. Лучевое направление распространения преломленного луча \vec{f}' указывает направление, определенное точкой O и точкой T , в которой волновая поверхность Σ' прикасается к элементарной волновой поверхности, конструированной в точке O (см. рис. 6).

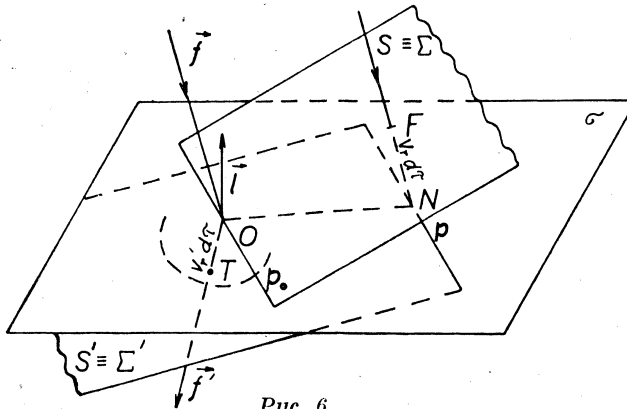


Рис. 6

Как вытекает из рассуждений, проведенных в главе, II-ой настоящей работы, можно волновые поверхности Σ и Σ' считать эйкональными

поверхностями, в которых функция действия S константная. Условие стационарности оптических путей будет выполнено тогда, когда действительно

$$n_r(\vec{f}) \overline{FN} = n'_r(\vec{f}') \overline{OT}. \quad (41)$$

Из конструкции Гюйгенса вытекает

$$d\tau = \frac{\overline{FN}}{v_r(\vec{f})} = \frac{\overline{OT}}{v'_r(\vec{f}')}, \quad (42)$$

и отсюда умножением уравнения (42) на скорость света c в вакууме получаем условие (41).

Возникает вопрос, выполнено ли условие стационарности оптических путей и для других близких лучей, не лежащих в определенной векторами \vec{f} и \vec{l} и точкой O плоскости падения. К каждому такому лучу можно провести преломленный луч, пересекающий плоскость границы σ в прямой p_0 (см. рис. 6), и параллельный лучу, проходящему через точку O . С первого взгляда ясно, что и для таких лучей будет условие стационарности соблюдаться.

Процесс вычисления при установлении законов отражения и преломления на границе между двумя анизотропными средами в общем случае был намечен в [3]. Для иллюстрации проведем здесь установление закона преломления в специальном случае для необыкновенного луча, распространяющегося в одноосном кристалле в плоскости главного сечения и преломляющегося в изотропную среду. Оптическая ось кристалла параллельна плоскости границы.

Для такого случая был выведен на основе принципа Гюйгенса закон преломления в виде [2]

$$\sin \varepsilon'_r = \frac{n_0^2 \sin \varepsilon_r}{n' \sqrt{n_0^2 \sin^2 \varepsilon_r + n_e^2 \cos^2 \varepsilon_r}}, \quad (42)$$

где ε_r обозначается угол падения и ε_r угол преломления.

Учитывая (33), имеется для лучевого индекса преломления необыкновенного луча

$$n_r = \sqrt{n_e^2 \cos^2 \varepsilon_r + n_0^2 \sin^2 \varepsilon_r}. \quad (43)$$

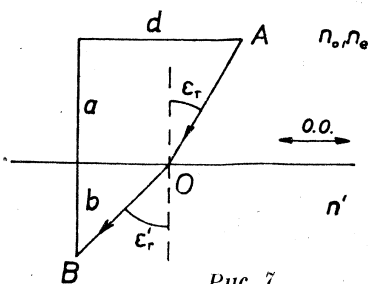


Рис. 7

Теперь будем исследовать, какое условие соответствует стационарности оптического пути необыкновенного луча, распространяющегося из точки A в среде одноосного кристалла в точку B в изотропной среде (см. рис. 7).

Из рис. 7 вытекает для углов ε_r и ε'_r

$$\sin \varepsilon_r = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}, \quad \cos \varepsilon_r = \frac{a}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}},$$

$$\sin \varepsilon'_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

и

$$s_1 = \sqrt{(d-x)^2 + a^2}, \quad s_2 = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

Функцию действия S_{AB} можно, таким образом, выразить как функцию единого параметра x

$$S_{AB} = n_r(x) s_1(x) + n'_r s_2(x). \quad (44)$$

Условие стационарности оптического пути будет выполнено, если

$$\frac{d S_{AB}}{d x} = 0. \quad (45)$$

После дифференцирования функции действия S_{AB} и после преобразования видно, что условию стационарности оптических путей удовлетворяет закон преломления (42). Подобных случаев можно было бы привести целый ряд.

3. Законы отражения и преломления для нормального направления распространения на границе между двумя анизотропными средами

Пока мы не говорили здесь о свойствах двойного лучепреломления анизотропной среды. С точки зрения геометрической оптики двойное лучепреломление является следствием того, что для каждого направления распространения существуют в анизотропной среде два индекса преломления, или две скорости распространения.

Следствием двойного лучепреломления в анизотропной среде являются в общем случае четыре закона преломления и четыре закона отражения для лучевого направления распространения. Так как к каждому лучевому направлению распространения однозначно определено соответствующее нормальное направление распространения, существуют на границе между двумя анизотропными средами тоже четыре закона отражения и преломления для нормального направления распространения.

Обозначим ε_{ni} , ε_{ni}^j и $\varepsilon_{ni}^{\prime j}$ углы, которые заключают нормали падающей, преломленной и отраженной волновой поверхности с нормалью к границе. Из волновой теории вытекают для этих углов законы преломления и отражения в виде законов Снеля [6]

$$n_{ni} \sin \varepsilon_{ni} = n_{ni}^j \sin \varepsilon_{ni}^j \quad (46)$$

$$n_{ni} \sin \varepsilon_{ni} = n_{ni}^{\prime\prime j} \sin \varepsilon_{ni}^{\prime\prime j} \quad (47)$$

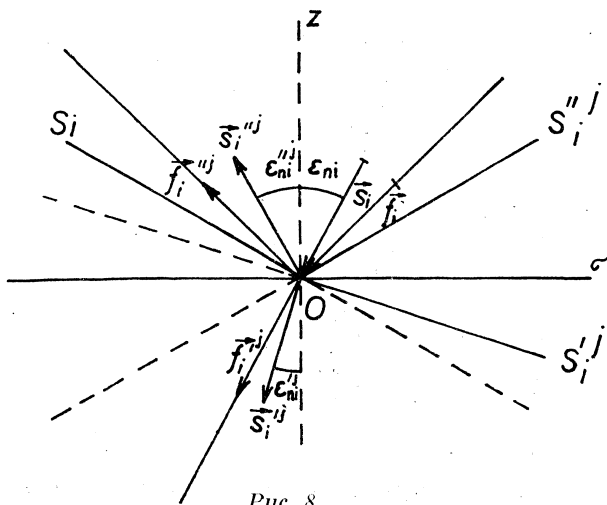
$$i = \text{I, II}$$

$$j = \text{I, II,}$$

при этом соблюдаются плоскости распространения.

В отличие от изотропной среды необходимо в (47) учитывать другой индекс преломления, чем индекс преломления падающего луча.

Покажем, что законы преломления и отражения (46) и (47) можно вывести прямо из принципа Фермата, где, однако, нормальное направление распространения надо определять как нормаль к эйкональной поверхности. Это определение эквивалентно определению нормального направления распространения в волновой оптике.



В точке O , в которой происходит преломление, или отражение (см. рис. 8) пересекаются соответствующие падающему, преломленному и отраженному лучу эйкональные поверхности. Если ввести удобно ориентированную координатную систему x, y, z так, что координатная ось z образует нормаль к границе и координатные оси x, y лежат в плоскости границы, тогда для функции действия в точке O действительно

$$S_{O_i}(x, y, 0) = S_{O_i}^{\prime j}(x, y, 0) = S_{O_i}^{\prime\prime j}(x, y, 0) \quad (48)$$

$$i = \text{I, II}$$

$$j = \text{I, II.}$$

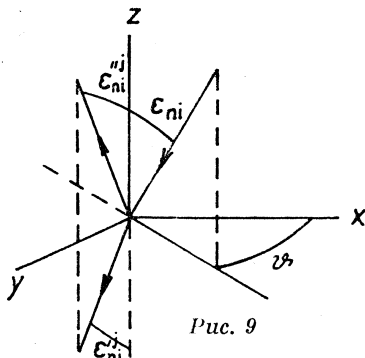
Если обозначить компоненты нормальных векторов

падающего луча	$\vec{s}_i (\cos \alpha_{i1}, \cos \alpha_{i2}, \cos \alpha_{i3}),$
преломленного луча	$\vec{s}_i^{\prime j} (\cos \alpha_{i1}^{\prime j}, \cos \alpha_{i2}^{\prime j}, \cos \alpha_{i3}^{\prime j}),$
отраженного луча	$\vec{s}_i^{\prime\prime j} (\cos \alpha_{i1}^{\prime\prime j}, \cos \alpha_{i2}^{\prime\prime j}, \cos \alpha_{i3}^{\prime\prime j}),$

получаем после интегрирования уравнения (13) для функций действия

$$\begin{aligned} S_{O_i} &= n_{ni} (x \cos \alpha_{i1} + y \cos \alpha_{i2} + z \cos \alpha_{i3}) \\ S'_{O_i} &= n_{ni}^j (x \cos \alpha_{i1}^j + y \cos \alpha_{i2}^j + z \cos \alpha_{i3}^j) \\ S''_{O_i} &= n_{ni}^{j'} (x \cos \alpha_{i1}^{j'} + y \cos \alpha_{i2}^{j'} + z \cos \alpha_{i3}^{j'}). \end{aligned} \quad (49)$$

Если ввести полярные координаты ϵ_n и ϑ (см. рис. 9), получаем из условия (48) четыре закона преломления и четыре закона отражения для нормального направления распространения



$$n_{ni}(\epsilon_{ni}, \vartheta) \sin \epsilon_{ni} = n_{ni}^j(\epsilon_{ni}^j, \vartheta) \sin \epsilon_{ni}^j \quad (50)$$

$$n_{ni}(\epsilon_{ni}, \vartheta) \sin \epsilon_{ni} = n_{ni}^{j'}(\epsilon_{ni}^{j'}, \vartheta) \sin \epsilon_{ni}^{j'} \quad (51)$$

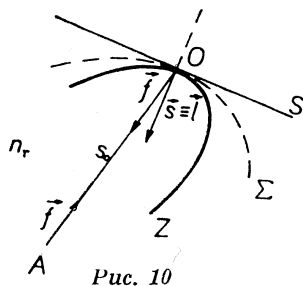
$$\begin{aligned} i &= \text{I, II} \\ j &= \text{I, II,} \end{aligned}$$

так как для азимутов плоскостей распространения вытекает из (48)

$$\vartheta_i = \vartheta_i^j = \vartheta_i^{j'} \quad (52)$$

VI. Стационарный характер оптического пути

Выйдем из простого примера. Пусть луч света выходит из точки A и отражается от отрагательной поверхности Z обратно в точку A (см. рис. 10).



Ищем теперь на поверхности Z такую точку O , которая выполняет это условие отражения.

Это задание можно решить, на основе конструкции Гюйгенса. Луч света, отражающийся под тем же углом, под которым падает, должен выполнять, учитывая (51), условие, что его нормальное направление распространения \vec{s} тождественно с проводимой в точке отражения O нормалью отражательной поверхности \vec{I} . Конструктивно задание провести так, что из точки A конструируем такую волновую поверхность Σ , у которой общая с отражательной поверхностью Z касательная плоскость S в точке O . Точка O , в которой прикасается волновая поверхность Σ к отражательной поверхности Z , выполняет условие, что направление отраженного луча сходно с направлением луча падающего. Эта конструкция, конечно, предполагает центральную симметричность элементарных волновых поверхностей, условие это во всех анизотропных кристаллах выполнено.

В главе II-ой и III-ей этой работы было показано, что касательные плоскости волновых и эйкональных поверхностей тождественны. Плоскость S можно, таким образом, считать, в близком окружении точки O эйкональной поверхностью, которая соответствует в точке O как лучу падающему, так лучу отраженному. Из приведенной конструкции видно, что оптический путь $n_r s_0$ (см. рис. 10) выполняет условие стационарности принципа Фермата.

Нас интересует теперь, будет ли действительный путь $n_r s_0$ экстремального характера.

Предположим, что отражательная поверхность Z является ротационной поверхностью кривой Z на рис. 10. Световая волновая поверхность в анизотропной среде в общем не является ротационной поверхностью, таким образом, при удобном искривлении отражательной поверхности Z могут произойти ситуации, показанные на рис. 11а, 11б, 11с, при этом все случаи могут случиться одновременно в разных меридианах при одинаковом уискривлении отражательной поверхности Z .

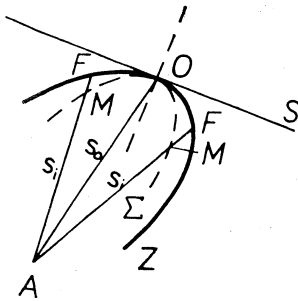


Рис. 11а

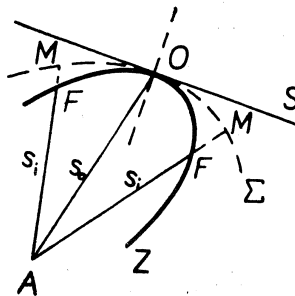


Рис. 11б

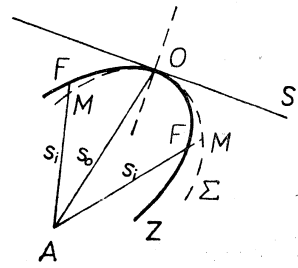


Рис. 11с

Все точки волновой поверхности Σ временно синхронизированы, значит, для времени τ , за которое в анизотропной среде распространи-

лось волнение из точки A на волновую поверхность Σ , действительно (см. рис. 11а, 11б, 11с)

$$\tau = \frac{\overline{AO}}{v_r(\vec{f}_0)} = \frac{\overline{AM}}{v_r(\vec{f}_i)}. \quad (53)$$

Если учесть этот факт, с первого взгляда ясно, что в случае, показанном на рис. 11а., оптический путь $n_r(\vec{f}_0)s_0$ минимальный в отличие от случая, показанного на рис. 11б., где оптический путь $n_r(\vec{f}_0)s_0$ максимальный. В случае 11с. нельзя говорить ни о максимуме, ни о минимуме, а, скорее, о инфлексной точке.

Из приведенного примера видно, что условие стационарности оптического пути не тождественно с условием экстремности функции действия

$$S = \int_{(s_0)} n_r ds. \quad (54)$$

Функция действия S может быть в общем функцией взаимно независимых параметров $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$

$$S = S(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n). \quad (55)$$

Вариационное условие (6) можно, таким образом, записать в виде

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial S}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial S}{\partial q_n} \delta q_n = 0. \quad (56)$$

Так как отдельные параметры q_i взаимно независимы, и вариации параметров q_i можно выбирать совсем произвольно, должно для действительного оптического пути s_0 быть выполнено условие

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial S}{\partial q_n} = 0. \quad (57)$$

При этом деривации в (57) могут не определять ни минимум, ни максимум функции действия S .

Условие (57) для действительных оптических путей в общем обязательно.

VII. Заключение

Из вышеприведенного изложения видно, что принцип Фермата в области анизотропной среды вполне соответствует конструкции Гюйгенса геометрического луча в анизотропной среде, и что на основе его вариационной формулировки можно построить геометрическую оптику анизотропных кристаллов так же хорошо, как была построена геометрическая оптика изотропной среды.

Есть, однако, вопрос, является ли концепция строения геометрической оптики анизотропных кристаллов на основе принципа Фермата более удобной, чем концепция, исходящая из электромагнитной теории Макс-

велла и употребляющая принцип Гюйгенса. На этот вопрос нельзя однозначно ответить. Есть задания, в которых выгоднее и нагляднее употреблять к конструкции геометрических лучей принцип Гюйгенса. Часто и для явного вычисления некоторых отношений не является принцип Фермата вполне подходящим [2], [3]. Мы, однако, думаем, что для целого ряда практических вычислений оптических систем, в которых появляются оптические члены двойного лучепреломления, именно при употреблении вычислительных машин, принцип Фермата мог бы быть очень хорошим помощником.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Born, M.*: Optik, Springer, Berlin—Heidelberg—New York (1965).
- [2] *Chmela, P.*: Optik 26, 134 (1967), 26, 254 (1967).
- [3] *Chmela, P.*: Acta Univ. Palac. Olomucensis 27, 191 (1968).
- [4] *Jurek, B.*: Fermatův princip a problémy konstrukce lámavých soustav, Nakl. ČSAV, Praha (1959).
- [5] *Landé, A.*: Optik, Mechanik und Wellenmechanik, Handbuch der Physik, B. 22., s. 321—358, Springer, Berlin (1928).
- [6] *Szivešy, G.*: Kristaloptik, Handbuch der Physik, B. 22., s. 235, Springer, Berlin (1928).

SHRnutí

OPRÁVNĚNOST POUŽITÍ FERMATOVA PRINCIPU V OPTICE ANIZOTROPNÍCH KRYSTALŮ

PAVEL CHMELA

V práci je uvedena formulace Fermatova principu pro optiku anizotropních krystalů a je ukázáno, že požadavek stacionárnosti optických drah plně koresponduje s Huygensovou konstrukcí geometrického paprsku v anizotropním prostředí. Dále jsou zde uvedeny některé námítky proti použitelnosti Fermatova principu v anizotropním prostředí a je ukázána jejich neopodstatnělost. V závěru práce jsou uvedeny některé příklady použití Fermatova principu v optice krystalů a je ukázána stacionární povaha optické dráhy.

ZUSAMMENFASSUNG

DIE BERECHTIGUNG DER ANWENDUNG DES FERMATSCHEN PRINZIPS IN DER KRISTALLOPTIK

PAVEL CHMELA

In der Arbeit ist die Formulierung des Fermatschen Prinzips für die Optik der anisotropen Kristalle eingeführt und man zeigt, dass die Forderung der Stationarität des Lichtweges des geometrischen Strahls völlig mit der Huygensschen Konstruktion des geometrischen Strahls im anisotropen Medium korrespondiert. Weiter führt man einige Einwände gegen die Verwendbarkeit des Fermatschen Prinzips im anisotropen Medium ein und man zeigt, dass diese nicht korrekt sind. Im Schluss der Arbeit bringt man einige Beispiele der Anwendung des Fermatschen Prinzips in der Kristalloptik bei und man zeigt die stationäre Natur des Lichtweges.