Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček

О некотором преобразовании решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 8 (1967), No. 1, 45--60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119868

1967 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 24.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

О некотором преобразовании решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Станислав Травничек

(Поступило в редакцию 3. 6. 1966 г.)

В настоящей статье я занимаюсь специальным случаем преобразований решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, с помощью которого показывается связь между некоторыми результатами М. Лайтоха [2] и автора [3]. Основанием многих рассуждений является при этом теория преобразований О. Борувки [1].

1. Мы будем заниматься системами двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$(a)\qquad \begin{aligned} y_1' &= b(t)\, y_2 \\ y_2' &= c(t)\, y_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot{Y}_1 &= B(T)\, Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= C(T)\, Y_1, \end{aligned} \qquad (A)$$

где штрихом обозначены производные относительно t и точкой производные относительно T. Предположим, что функции $b(t)$, $c(t)$ непрерывны в интервале j, $B(T)$, $C(T)$ непрерывны в интервале J, и что в этих интервалах определены решения $u(t) \in (a)$, $U(T) \in (A)$,

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \qquad U(T) = \begin{pmatrix} U_1(T) \\ U_2(T) \end{pmatrix},$$

начальными условиями вида

$$(a^*)\qquad u(t_0) = u_0 \qquad\qquad U(T_0) = U_0, \qquad (A^*)$$

где

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{pmatrix}$$

начальные значения и $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ произвольные числа.

По [3] существует общее (см. [4]) линейное преобразование решения $U(T) \in (A)$ на решение $u(t) \in (a)$ в виде

$$u(t) = K(t)\, U[Z(t)], \qquad (1)$$

где

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix},$$

функция $Z(t)$ отображает интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$, точку $t_0 \in j$ на точку $T_0 \in J$, и удовлетворяет вместе с функциями $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ системе

$$\left.\begin{aligned} \alpha'(t) &= -C[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta(t) + b(t)\, \gamma(t) \\ \beta'(t) &= -B[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha(t) + b(t)\, \delta(t) \\ \gamma'(t) &= c(t)\, \alpha(t) - C[Z(t)]\, Z'(t)\delta(t) \\ \delta'(t) &= c(t)\, \beta(t) - B[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma(t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если $b(t)$ $[B(T)]$ имеет в интервале $j[J]$ производные до 2-го порядка включительно и имеет место $b(t)\, B(T) > 0$ для всяких $t \in j$, $T \in J$, тогда по [3] для того, чтобы при преобразовании вида (1) имело место $\beta(t) = 0$ (т. е. чтобы первая компонента решения системы (A) преобразовалась в первую компоненту решения системы (a) в виде $u_1(t) = \alpha(t)\, U_1[Z(t)]$, необходимо и достаточно, чтобы функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ были определены формулами

$$\left.\begin{aligned} \alpha(t) &= L \sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}}\, \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}} \\ \gamma(t) &= \frac{L}{2b(t)} \left(\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\, Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)} \right) \sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}}\, \frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}} \\ \delta(t) &= L \sqrt{\frac{B[Z(t)]}{b(t)}}\, \sqrt{|Z'(t)|}\, \operatorname{sgn} Z', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где L-произвольная постоянная и $Z(t)$-решение дифференциального уравнения

$$-\{Z, t\} + Q(Z)\, Z'^2 = q(t). \tag{Q, q}$$

Здесь обозначено

$$\{Z, t\} = \frac{1}{2} \frac{Z'''}{Z'} - \frac{3}{4} \frac{Z''^2}{Z'^2}$$

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= -\frac{1}{2} \frac{b''(t)}{b(t)} + \frac{3}{4} \frac{b'^2(t)}{b^2(t)} + b(t)\, c(t) \\ Q(T) &= -\frac{1}{2} \frac{\ddot{B}(T)}{B(T)} + \frac{3}{4} \frac{\dot{B}^2(T)}{B^2(T)} + B(T)\, C(T). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы теперь рассматриваем функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, имеющие в интервале j непрерывные производные до второго порядка включительно и пусть функции $b(t)$, $c(t)$ обладают непрерывными производными первого порядка и имеет место

$$\lambda(t)\, \mu'(t) - \lambda'(t)\, \mu(t) + b(t)\, \lambda^2(t) - c(t)\, \mu^2(t) \neq 0. \tag{5}$$

Множество функций

$$\lambda(t)\, y_1(t) + \mu(t)\, y_2(t), \tag{6}$$

где $y(t)$ произвольные решения системы (a), обозначим $G_{\lambda\mu}$.

Лемма 1,1: Для того, чтобы произвольное решение системы (a) преобразовалось регулярным линейным преобразованием (1), где $|K(t)| = m \neq 0$, в решение системы

$$\begin{aligned} x_1' &= \varphi(t)\, x_2 \\ x_2' &= \psi(t)\, x_1 \end{aligned} \tag{$\bar a$}$$

так, что множеством первых компонент $x_1(t)$ решений системы $(\bar a)$ является $G_{\lambda\mu}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$\varphi(t) = \frac{1}{m}\left(\lambda(t)\, \mu'(t) - \lambda'(t)\mu(t) + b(t)\, \lambda^2(t) - c(t)\, \mu^2(t)\right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\psi(t) = \frac{1}{\lambda(t)\, \varphi(t)} \Big(\lambda''(t) + c'(t)\, \mu(t) + 2c(t)\, \mu'(t) - \lambda'(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} -\\ - c(t)\, \mu(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + b(t)\, c(t)\, \lambda(t)\Big)\end{aligned} \tag{8}$$

для $\lambda(t) \neq 0$ и

$$\begin{aligned}\psi(t) = \frac{1}{\mu(t)\, \varphi(t)} \Big(\mu''(t) + b'(t)\, \lambda(t) + 2b(t)\, \lambda'(t) - \mu'(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} -\\ - b(t)\, \lambda(t)\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} + b(t)\, c(t)\, \mu(t)\Big)\end{aligned} \tag{9}$$

для $\mu(t) \neq 0$.

Доказательство: *a*) Пусть $y(t)$ — произвольное решение системы (a), $x(t)$ — произвольное решение системы $(\bar a)$. По предположению леммы имеем

$$x_1(t) = \lambda(t)\, y_1(t) + \mu(t)\, y_2(t); \tag{10}$$

итак при преобразовании вида (1) $\alpha(t) \equiv \lambda(t)$, $\beta(t) \equiv \mu(t)$. Обозначим еще $\gamma(t) = \lambda_1(t)$, $\delta(t) = \mu_1(t)$. Тогда для второй компоненты $x_2(t)$ решения $x(t) \in (\bar a)$ имеем

$$x_2(t) = \lambda_1(t)\, y_1(t) + \mu_1(t)\, y_2(t). \tag{11}$$

Следовательно, функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\lambda_1(t)$, $\mu_1(t)$ необходимо удовлетворяют системе (2), т. е. имеет место

$$\left.\begin{aligned} \lambda'(t) &= \quad - c(t)\, \mu(t) + \varphi(t)\, \lambda_1(t) \\ \mu'(t) &= - b(t)\, \lambda(t) \quad + \varphi(t)\, \mu_1(t) \\ \lambda_1'(t) &= \psi(t)\, \lambda(t) \quad - c(t)\, \mu_1(t) \\ \mu_1'(t) &= \quad \psi(t)\, \mu(t) - b(t)\, \lambda_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из первого и второго уравнения (12) следует

$$\varphi(t)\, \lambda_1(t) = \lambda'(t) + c(t)\, \mu(t), \quad \varphi(t)\, \mu_1(t) = \mu'(t) + b(t)\, \lambda(t). \tag{13}$$

По [3] $|K(t)| = konst.$ и по предположению леммы эта постоянная равна $m \neq 0$ т. е.

$$|K(t)| = m. \tag{14}$$

Из формул (14) и (13) получаем

$$\varphi(t)\, m = \begin{vmatrix} \lambda(t) & \mu(t) \\ \varphi(t)\,\lambda_1(t) & \varphi(t)\,\mu_1(t) \end{vmatrix} = \lambda(t)\,\mu'(t) + \lambda^2(t)\,b(t) - \lambda'(t)\,\mu(t) - \mu^2(t)\,c(t),$$

и из этого вытекает формула (7). Ввиду (5) имеем $\varphi(t) \neq 0$ и поэтому мы из уравнений (13) получаем

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda'(t) + c(t)\,\mu(t)}{\varphi(t)}, \qquad \mu_1(t) = \frac{\mu'(t) + b(t)\,\lambda(t)}{\varphi(t)}. \tag{15}$$

Для $\lambda(t) \neq 0$ вытекает из третьего уравнения (12)

$$\psi(t) = \frac{1}{\lambda(t)}[\lambda_1'(t) + c(t)\,\mu_1(t)], \tag{16}$$

и если подставить из уравнений (15) в уравнение (16), то получаем (8). Для $\mu(t) \neq 0$ вытекает из 4-го уравнения (12)

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu(t)}[\mu_1'(t) + b(t)\,\lambda_1(t)], \tag{17}$$

и если подставить из (15) в (17), то получаем (9).

б) Пусть теперь в системе $(\bar{a})$ функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определены формулами (7), (8) или (7), (9); для определенности мы будем рассматривать первый случай. Пусть имеется произвольный элемент множества $G_{\lambda\mu}$ [т. е. функция вида (6)], следовательно, пусть имеется произвольное решение $y(t)$ системы (а). Если в преобразовании (1) решения системы (a) в решение системы $(\bar{a})$ имеет место $\alpha(t) \equiv \lambda(t)$, $\beta(t) \equiv \mu(t)$, $\gamma(t) \equiv \lambda_1(t)$, $\delta(t) \equiv \mu_1(t)$, где функции $\lambda_1(t)$, $\mu_1(t)$ определены формулами (15), $Z(t) \equiv t$, то эти функции удовлетворяют очевидно первым трем уравнениям системы (2), т. е. (12). Подстановкой в 4-ое уравнение мы убедимся в том, что и 4-ое уравнение (12) удовлетворено [в абз. *а*) к вычислению мы пользовались эквивалентным соотношением (14)]. Итак, функция $x_1(t)$, определенная уравнением (10), является первой компонентной некоторого решения $x(t)$ системы $(\bar{a})$.

Пусть $\bar{x}_1(t)$ первая компонента произвольно заданного решения $\bar{x}(t)$ системы $(\bar{a})$. Это решение мы можем преобразовать преобразованием вида (1), где

$$\alpha(t) = \frac{1}{m}\,\mu_1(t), \quad \beta(t) = -\frac{1}{m}\,\mu(t), \quad \gamma(t) = -\frac{1}{m}\,\lambda_1(t), \quad \delta(t) = \frac{1}{m}\,\lambda(t), \tag{18}$$

в некоторое решение $\bar{y}(t)$ системы (a), так как очевидно функции (18) вместе с функцией $Z^{-1}(t) = t$ удовлетворяют системе (2); именно после подстановки (и умножения всех уравнений на m) получаем с точностью до расположения уравнений систему (12), которая по прежнему удовлетворена. Если $\bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_{10}$, $\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_{20}$, то $\bar{y}(t)$ есть именно то решение системы (a), которое определено начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_1(t_0) &= \frac{\mu_1(t_0)}{m}\bar{x}_{10} - \frac{\mu(t_0)}{m}\bar{x}_{20} \\ \bar{y}_2(t_0) &= -\frac{\lambda_1(t_0)}{m_{10}}\bar{x}_{10} + \frac{\lambda(t_0)}{m}\bar{x}_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Если теперь провести обратное преобразование, то по [3] получаем

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1(t) &= \lambda(t)\,\bar{y}_1(t) + \mu(t)\,\bar{y}_2(t) \\ \bar{x}_2(t) &= \lambda_1(t)\,\bar{y}_1(t) + \mu_1(t)\,\bar{y}_2(t)\,; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ввиду первого уравнения (20) имеет функция $\bar{x}_1(t)$ вид (6),и мы пользовались тем решением системы (a), которое определено начальными условиями (19), т. е. $\bar{x}_1(t) \in G_{\lambda\mu}$, ч. т. д.

Замечание 1,1: Из неравенства (5) вытекает, что ни для одного t неимеет место $\lambda(t) = \mu(t) = 0$; из предыдущей леммы вытекает, что для $\lambda(t) \neq 0$, $\mu(t) \neq 0$ правые части уравнений (8) и (9) тождественны.

Замечание 1,2: Функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, определенные формулами (7), (8) или (9), мы будем в дальнейшем обозначать

$$\varphi(t) = \varphi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)], \qquad \psi(t) = \psi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)],$$

чтобы подчеркнуть, что они образованы к данным функциям $\lambda(t)$, $\mu(t)$.

Теперь мы будем рассматривать функции $\varrho(T)$, $\sigma(T)$, обладающие в интервале J непрерывными производными первого порядка и удовлетворяющие неравенству

$$\varrho(T)\,\dot{\sigma}(T) - \dot{\varrho}(T)\,\sigma(T) + B(T)\,\varrho^2(T) - C(T)\,\sigma^2(T) \neq 0. \tag{21}$$

Множество всех функций

$$\varrho(T)\,Y_1(T) + \sigma(T)\,Y_2(T),$$

где $Y(T)$ произвольные решения системы (A), обозначим $H_{\varrho\sigma}$.

Таким образом, каким мы в лемме 1,1 определили к системе (a) систему ($\bar{a}$), определим к системе (A) систему

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \Phi[T;\,\varrho(T),\,\sigma(T)]\,X_2 \\ \dot{X}_2 &= \Psi[T;\,\varrho(T),\,\sigma(T)]\,X_1\,; \end{aligned} \tag{$\bar{A}$}$$

итак множеством первых компонент $X_1(T)$ этой системы является $H_{\varrho\sigma}$. Очевидно, ввиду леммы 1,1 имеет место

$$\Phi[T;\;\varrho(T),\;\sigma(T)] = \frac{1}{M}\,[\varrho(T)\;\dot{\sigma}(T) - \dot{\varrho}(T)\;\sigma(T) + B(T)\;\varrho^2(T) - C(T)\;\sigma^2(T)] \tag{22}$$

$$\Psi[T;\varrho(T),\sigma(T)] = \frac{1}{\varrho(T)\,\Phi[T;\varrho(T),\sigma(T)]}\Bigg[\ddot{\varrho}(T) + \dot{C}(T)\,\sigma(T) + 2C(T)\,\dot{\sigma}(T) - \\ - \dot{\varrho}(T)\frac{\dot{\Phi}[T;\varrho(T),\sigma(T)]}{\Phi[T;\varrho(T),\sigma(T)]} - C(T)\,\sigma(T)\frac{\dot{\Phi}[T;\varrho(T),\sigma(T)]}{\Phi[T;\varrho(T),\sigma(T)]} + B(T)\,C(T)\,\varrho(T)\Bigg] \tag{23}$$

для $\varrho(T) \neq 0$ и

$$\Psi[T; \varrho(T), \sigma(T)] = \frac{1}{\sigma(T)\, \Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]} \Big[\ddot{\sigma}(T) + \dot{B}(T)\, \varrho(T) + 2B(T)\, \dot{\varrho}(T) -$$

$$- \dot{\sigma}(T) \frac{\dot{\Phi}[T; \varrho(T), \sigma(T)]}{\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]} - B(T)\, \varrho(T) \frac{\dot{\Phi}[T; \varrho(T), \sigma(T)]}{\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]} + B(T)\, C(T)\, \sigma(T)\Big] \tag{24}$$

для $\sigma(T) \neq 0$, где M постоянное значение определителя матрицы коэффициентов соответствующего линейного преобразования,

$$M = \begin{vmatrix} \varrho(T) & \sigma(T) \\ \varrho_1(T) & \sigma_1(T) \end{vmatrix};$$

здесь обозначено

$$\varrho_1(T) = \frac{\dot{\varrho}(T) + C(T)\, \sigma(T)}{\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]} \qquad \sigma_1(T) = \frac{\dot{\sigma}(T) + B(T)\, \varrho(T)}{\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]}\,. \tag{25}$$

Пусть теперь функции $b(t)$, $c(t)$, $B(T)$, $C(T)$ обладают непрерывными производными до 2-го порядка включительно и функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\varrho(T)$, $\sigma(T)$ обладают непрерывными производными до 3-его порядка включительно. Тогда функции

$$q[t; \lambda(t), \mu(t)] = -\frac{1}{2} \frac{\varphi''[t; \lambda(t), \mu(t)]}{\varphi[t; \lambda(t), \mu(t)]} + \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi'[t; \lambda(t), \mu(t)]}{\varphi[t; \lambda(t), \mu(t)]}\right)^2 +$$
$$+ \varphi[t; \lambda(t), \mu(t)]\, \psi[t; \lambda(t), \mu(t)] \tag{26}$$

$$Q[T; \varrho(T), \sigma(T)] = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{\Phi}[T; \varrho(T), \sigma(T)]}{\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{\Phi}[T; \varrho(T), \sigma(T)]}{\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]}\right)^2 +$$
$$+ \Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)]\, \Psi[T; \varrho(T), \sigma(T)] \tag{27}$$

непрерывны. Пусть далее $m = M = 1$ и пусть в неравенствах (5), (21) имеет место знак $>$.

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$-\{Z, t\} + Q[Z; \varrho(Z), \sigma(Z)]\, Z'^2 = q[t; \lambda(t), \mu(t)], \qquad (Q; \varrho, \sigma; q; \lambda, \mu)$$

решение $Z(t)$ которого отображает интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$ и сверх того данную внутреннюю точку $t_0 \in j$ на данную внутреннюю точку $T_0(= Z_0) \in J$.

Теорема 1,1: Пусть $U(T)$ является решением системы (A) определенным начальными условиями (A^*) и функция $Z(t)$ решением уравнения $(Q; \varrho, \sigma; q; \lambda, \mu)$. Тогда $u(t)$, определенное в интервале i формулами

$$u_1(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t)\, \varrho[Z(t)] & \mu(t) \\ \gamma(t)\, \varrho[Z(t)] + \delta(t)\, \varrho_1[Z(t)] & \mu_1(t) \end{vmatrix} U_1[Z(t)] +$$
$$+ \begin{vmatrix} \alpha(t)\, \sigma[Z(t)] & \mu(t) \\ \gamma(t)\, \sigma[Z(t)] + \delta(t)\, \sigma_1[Z(t)] & \mu_1(t) \end{vmatrix} U_2[Z(t)] \tag{28}$$

$$u_2(t) = \begin{vmatrix} \lambda(t) & \alpha(t)\,\varrho[Z(t)] \\ \lambda_1(t) & \gamma(t)\,\varrho[Z(t)] + \delta(t)\,\varrho_1[Z(t)] \end{vmatrix} U_1[Z(t)] +$$
$$+ \begin{vmatrix} \lambda(t) & \alpha(t)\,\sigma[Z(t)] \\ \lambda_1(t) & \gamma(t)\,\sigma[Z(t)] + \delta(t)\,\sigma_1[Z(t)] \end{vmatrix} U_2[Z(t)], \tag{29}$$

где

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{\varphi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]}{\Phi[Z(t);\,\varrho[Z(t)],\,\sigma[Z(t)]]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}} \tag{30}$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\varphi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]}\left(\frac{\varphi'[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]}{\varphi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]} - \frac{\dot{\Phi}[Z(t);\,\varrho[Z(t)],\,\sigma[Z(t)]]}{\Phi[Z(t);\,\varrho[Z(t)],\,\sigma[Z(t)]]}\,Z'(t) -\right.$$
$$\left. - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{\varphi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]}{\Phi[Z(t);\,\varrho[Z(t)],\,\sigma[Z(t)]]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}} \tag{31}$$

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{\Phi[Z(t);\,\varrho[Z(t)],\,\sigma[Z(t)]]}{\varphi[t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]}}\,\sqrt{|Z'(t)|}\,\operatorname{sgn} Z', \tag{32}$$

является решением системы (a), определенным начальными условиями

$$u_1(t_0) = \begin{vmatrix} \alpha(t_0)\,\varrho(Z_0) & \mu(t_0) \\ \gamma(t_0)\,\varrho(Z_0) + \delta(t_0)\,\varrho_1(Z_0) & \mu_1(t_0) \end{vmatrix} U_{10} +$$
$$+ \begin{vmatrix} \alpha(t_0)\,\sigma(Z_0) & \mu(t_0) \\ \gamma(t_0)\,\sigma(Z_0) + \delta(t_0)\,\sigma_1(Z_0) & \mu_1(t_0) \end{vmatrix} U_{20} \tag{33}$$

$$u_2(t_0) = \begin{vmatrix} \lambda(t_0) & \alpha(t_0)\,\varrho(Z_0) \\ \lambda_1(t_0) & \gamma(t_0)\,\varrho(Z_0) + \delta(t_0)\,\varrho_1(Z_0) \end{vmatrix} U_{10} +$$
$$+ \begin{vmatrix} \lambda(t_0) & \alpha(t_0)\,\sigma(Z_0) \\ \lambda_1(t_0) & \gamma(t_0)\,\sigma(Z_0) + \delta(t_0)\,\sigma_1(Z_0) \end{vmatrix} U_{20}. \tag{34}$$

Сверх того имеют место соотношения

$$\lambda(t)\,u_1(t) + \mu(t)\,u_2(t) = \alpha(t)\,(\varrho[Z(t)]\,U_1[Z(t)] + \sigma[Z(t)]\,U_2[Z(t)]) \tag{35}$$

$$\lambda_1(t)\,u_1(t) + \mu_1(t)\,u_2(t) = (\gamma(t)\,\varrho[Z(t)] + \delta(t)\,\varrho_1[Z(t)])\,U_1[Z(t)] +$$
$$+ (\gamma(t)\,\sigma[Z(t)] + \delta(t)\,\sigma_1[Z(t)])\,U_2[Z(t)]. \tag{36}$$

Доказателвьсто: Так как $U(T)$ — решение системы (A), то по лемме 1,1 имеет система $(\tilde{A})$ решение

$$\bar{U}(T) = \begin{pmatrix} \varrho(T)\,U_1(T) + \sigma(T)\,U_2(T) \\ \varrho_1(T)\,U_1(T) + \sigma_1(T)\,U_2(T) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Рассмотрим преобразование решения $\bar{U}(T) \in (\tilde{A})$ на $\bar{u}(t)$ в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1(t) &= \alpha(t)\,\bar{U}_1[Z(t)] \\ \bar{u}_2(t) &= \gamma(t)\,\bar{U}_1[Z(t)] + \delta(t)\,\bar{U}_2[Z(t)] \end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

Теперь мы создаем к системам $(\bar{A})$, $(\bar{a})$ уравнение (Q, q) и функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ по формулам (3). Таким образом мы получаем уравнение $(Q; \varrho, \sigma; q; \lambda, \mu)$ и функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (30), (31), (32). По [3], случай 2°, имеет место: Так как $Z(t)$ — решение уравнения $(Q; \varrho, \sigma; q; \lambda, \mu)$ и функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ удовлетворяют формулам (30), (31), (32), то $\bar{u}(t)$, определенное соотношениями (38), является решением системы $(\bar{a})$. По лемме 1,1 существует к этому $\bar{u}(t)$ решение $u(t) \in (a)$ такое, что имеет место

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t)\, u_1(t) + \mu(t)\, u_2(t) \\ \lambda_1(t)\, u_1(t) + \mu_1(t)\, u_2(t) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Из соотношений (38), после подстановки из формул (37) и (39), вытекают формулы (35), (36). Если вычислить функции $u_1(t)$, $u_2(t)$ из уравнений (35), (36), то получаем, что $u(t)$, определенное формулами (28), (29), есть решением системы (a) и что удовлетворяет начальным условиям (33), (34).

Замечание 1,3: Соотношение (35) можно представить тоже в виде

$$[\lambda(t)\, u_1(t) + \mu(t)\, u_2(t)]\, (\varphi[t; \lambda(t), \mu(t)])^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= (\varrho[Z(t)]\, U_1[Z(t)] + \sigma[Z(t)]\, U_2[Z(t)])\, (\Phi[Z(t); \varrho[Z(t)], \sigma[Z(t)]])^{-\frac{1}{2}}\, |\, Z'(t)\, |^{-\frac{1}{2}}. \tag{40}$$

Теорема 1,2: Пусть $\alpha(t)$ функция обладающая непрерывной 1-ой производной, $Z(t)$ функция обладающая производной до 3-его порядка включительно и отображающая интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$ и пусть существует линейное преобразование, которое к всякому решению $U(T)$ системы (A) определяет некоторое решение $u(t)$ системы (a), так что имеет место уравнение (35). Тогда функция $\alpha(t)$ определена формулой (30), функция $Z(t)$ удовлетворяет уравнению $(Q; \varrho, \sigma; q; \lambda, \mu)$ и имеет место (36), где функции $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (31), (32).

Доказательство: К системам (A), (a) мы построим системы $(\bar{A})$, $(\bar{a})$. Итак, если $U(T) \in (A)$, $u(t) \in (a)$, тогда $\bar{U}(T)$ $[\bar{u}(t)]$, определенное формулой (37) [(39)], является решением $(\bar{A})$ $[(a)]$. По предположению существует линейное преобразование $U(T)$ в $u(t)$, т. е. учитывая лемму 1,1 тоже $\bar{U}(T)$ в $\bar{u}(t)$, так что удовлетворено (31), это значит 1-ое уравнение (38). Но из этого вытекает, что при преобразовании $\bar{U}(T)$ в $\bar{u}(t)$ вида (1) имеем $\beta(t) \equiv 0$, т. е. можем использовать теорему 2,4 [3]. По этой теореме функция $Z(t)$ является решением дифференциального уравнения $(Q; \varrho, \sigma; q; \lambda, \mu)$ и удовлетворена 2-ая формула (38), в которой функции $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены уравнениями (31), (32). По лемме 1,1 получаем из уравнений (38) соотношение (36).

Замечание 1,4: Пусть теперь на интервале I существует функция $\zeta(T)$ обратная к функции $Z(t)$ и ее производная $\dot{\zeta}(T)$. Тогда $\zeta(T_0) = t_0$ и очевидно (см. напр. [1], [2]) $\zeta(T)$ является решением уравнения

$$-\{\zeta, T\} + q[\zeta; \lambda(\zeta), \mu(\zeta)]\, \dot{\zeta}^2 = Q[T; \varrho(T), \sigma(T)]. \qquad (q; \lambda, \mu; Q; \varrho, \sigma)$$

Теорема 1,3: Решение $U(T)$ системы (A), рассматриваемое в теореме 1,1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению $u(t)$ системы (a) обратному соотношению

$$U_1(T) = \begin{vmatrix} \delta[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] & \sigma(T) \\ -\gamma[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)] & \sigma_1(T) \end{vmatrix} u_1[\zeta(T)]\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \delta[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] & \sigma(T) \\ -\gamma[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)] & \sigma_1(T) \end{vmatrix} u_2[\zeta(T)]\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} \tag{41}$$

$$U_2(T) = \begin{vmatrix} \varrho(T) & \delta[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] \\ \varrho_1(T) & -\gamma[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)] \end{vmatrix} u_1[\zeta(T)]\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \varrho(T) & \delta[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] \\ \varrho_1(T) & -\gamma[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)] \end{vmatrix} u_2[\zeta(T)]\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta}, \tag{42}$$

ζде функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (30), (31), (32) и функция г(T) обратная к функции $Z(t)$, и сверх того имеет место

$$\begin{gathered} \varrho(T)\,U_1(T) + \sigma(T)\,U_2(T) = \\ = \delta[\zeta(T)]\,(\lambda[\zeta(T)]\,u_1[\zeta(T)] + \mu[\zeta(T)]\,u_2[\zeta(T)])\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} \end{gathered} \tag{43}$$

$$\begin{gathered} \varrho_1(T)\,U_1(T) + \sigma_1(T)\,U_2(T) = \\ = (-\gamma[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)])\,u_1[\zeta(T)]\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} + \\ + (-\gamma[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)])\,u_2[\zeta(T)]\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta}. \end{gathered} \tag{44}$$

Доказательство: Пусть $u(t)$ — решение системы (a), которое получено по теореме 1,1 [т. е. определено начальными условиями (33), (34)]. Тогда $\bar{u}(t)$, определенное формулой (39), является решением системы $(\bar{a})$. По теореме 3,1 [3] $\bar{U}(T)$, определенное формулами

$$\left.\begin{aligned} \bar{U}_1(T) &= \delta[\zeta(T)]\,(\lambda[\zeta(T)]\,u_1[\zeta(T)] + \mu[\zeta(T)]\,u_2[\zeta(T)])\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} \\ \bar{U}_2(T) &= -\gamma[\zeta(T)]\,(\lambda[\zeta(T)]\,u_1[\zeta(T)] + \mu[\zeta(T)]\,u_2[\zeta(T)])\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} + \\ &\quad + \alpha[\zeta(T)]\,(\lambda_1[\zeta(T)]\,u_1[\zeta(T)] + \mu_1[\zeta(T)]\,u_2[\zeta(T)])\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где $\zeta(T)$ функция обратная к $Z(t)$, является решением системы $(\bar{A})$. По лемме 1,1 существует к этому $\bar{U}(T)$ решение $\tilde{U}(T) \in (A)$, так что для него имеем

$$\left.\begin{aligned} \bar{U}_1(T) &= \varrho(T)\,\tilde{U}_1(T) + \sigma(T)\,\tilde{U}_2(T) \\ \bar{U}_2(T) &= \varrho(T)\,\tilde{U}_1(T) + \sigma_1(T)\,\tilde{U}_2(T). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Из уравнений (45), (46) получаем, что $\tilde{U}(T)$ определено формулами (41), (42) и что удовлетвоняет начальным условиям

$$\tilde{U}_1(T_0) = \begin{vmatrix} \delta(t_0)\,\lambda(t_0) & \sigma(T_0) \\ -\gamma(t_0)\,\lambda(t_0) + \alpha(t_0)\,\lambda_1(t_0) & \sigma_1(T_0) \end{vmatrix} u_1(t_0)\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \delta(t_0)\,\mu(t_0) & \sigma(T_0) \\ -\gamma(t_0)\,\mu(t_0) + \alpha(t_0)\,\mu_1(t_0) & \sigma_1(T_0) \end{vmatrix} u_2(t_0)\,\mathrm{sgn}\,\dot{\zeta} \tag{47}$$

$$\tilde U_2(T_0) = \begin{vmatrix} \varrho(T_0) & \delta(t_0)\,\lambda(t_0) \\ \varrho_1(T_0) & -\gamma(t_0)\,\lambda(t_0) + \alpha(t_0)\,\lambda_1(t_0) \end{vmatrix} u_1(t_0)\,\operatorname{sgn}\dot\zeta + $$
$$+ \begin{vmatrix} \varrho(T_0) & \delta(t_0)\,\mu(t_0) \\ \varrho_1(T_0) & -\gamma(t_0)\,\mu(t_0) + \alpha(t_0)\,\mu_1(t_0) \end{vmatrix} u_2(t_0)\,\operatorname{sgn}\dot\zeta. \tag{48}$$

Если теперь подставить в формулах (47), (48) вместо $u_1(t_0)$, $u_2(t_0)$ из уравнений (33), (34), то получаем $\tilde U_1(T_0) = U_{10}$, $\tilde U_2(T_0) = U_{20}$; итак $\tilde U(T) \equiv U(T)$. Если вместо $\tilde U_1(T)$, $\tilde U_2(T)$ подставить в уравнения (46) из уравнений (45), то получаем (43), (44), ч. т. д.

2. Покажем теперь вид некоторых из предыдущих рассуждений в случае, когда λ, μ, ϱ, σ являются постоянными. Следующие теоремы вытекают непосредственно из соответствующих теорем в 1-ом абзаце и поэтому новые доказательства не нужны.

Пусть имеет место [по (5) и (21)]

$$\left.\begin{aligned} b(t)\,\lambda^2 - c(t)\,\mu^2 > 0 \\ B(T)\,\varrho^2 - C(T)\,\sigma^2 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Множество всех функций вида

$$\lambda y_1(t) + \mu y_2(t), \tag{50}$$

где $y(t)$ произвольные решения системы (a), обозначим опять $G_{\lambda\mu}$.

Лемма 2,1: Для того, чтобы произвольное решение системы (a) преобразовалось регулярным линейным преобразованием (1), где $|K(t)| = 1$, в решение системы (a), так что множеством первых компонент $x_1(t)$ решений системы $(\bar a)$ является $G_{\lambda\mu}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$\varphi(t;\lambda,\mu) = b(t)\,\lambda^2 - c(t)\,\mu^2 \tag{51}$$

$$\psi(t;\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda\varphi(t;\lambda,\mu)}\left(c'(t)\,\mu - c(t)\,\mu\,\frac{\varphi'(t;\lambda,\mu)}{\varphi(t;\lambda,\mu)} + b(t)\,c(t)\,\lambda\right) \tag{52}$$

для $\lambda \neq 0$ и

$$\psi(t;\lambda,\mu) = \frac{1}{\mu\varphi(t;\lambda,\mu)}\left(b'(t)\,\lambda - b(t)\,\lambda\,\frac{\varphi'(t;\lambda,\mu)}{\varphi(t;\lambda,\mu)} + b(t)\,c(t)\,\mu\right) \tag{53}$$

для $\mu \neq 0$.

Рассматриваем теперь системы

$$(\bar{\bar a}) \qquad \begin{aligned} x_1' &= \varphi(t;\lambda,\mu)\,x_2 \\ x_2' &= \psi(t;\lambda,\mu)\,x_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot X_1 &= \Phi(T;\varrho,\sigma)\,X_2 \\ \dot X_2 &= \Psi(T;\varrho,\sigma)\,X_1, \end{aligned} \qquad (\bar{\bar A})$$

где система $(\bar{\bar a})$ $[(\bar{\bar A})]$ определена к системе (a) $[(A)]$ по лемме 2,1, следовательно функции $\varphi(t;\lambda,\mu)$, $\psi(t;\lambda,\mu)$ определены формулами (51), (52) или (53) и $\Phi(T;\varrho,\sigma)$, $\Psi(T;\varrho,\sigma)$ формулами аналогическими. Решения системы (a), $(\bar{\bar a})$ и (A), $(\bar{\bar A})$ связаны по лемме 2,1 соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \bar{\bar u}_1(t) &= \lambda u_1(t) + \mu u_2(t) \\ \bar{\bar u}_2(t) &= \lambda_1(t)\,u_1(t) + \mu_1(t)\,u_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{U}_1(T) &= \varrho U_1(T) + \sigma U_2(T)\\ \overline{U}_2(T) &= \varrho_1(T)\, U_1(T) + \sigma_1(T)\, U_2(T),\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1(t) &= \frac{\mu c(t)}{\varphi(t;\lambda,\mu)}, &\quad \mu_1(t) &= \frac{\lambda b(t)}{\varphi(t;\lambda,\mu)},\\ \varrho_1(T) &= \frac{\sigma C(T)}{\Phi(T;\varrho,\sigma)}, &\quad \sigma_1(T) &= \frac{\varrho B(T)}{\Phi(T;\varrho,\sigma)}.\end{aligned}\right| \tag{56}$$

Рассматривая предположения абз. 1 мы имеем по (26), (27) определены функции

$$q(t;\lambda,\mu) = -\frac{1}{2}\frac{\varphi''(t;\lambda,\mu)}{\varphi(t;\lambda,\mu)} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi'(t;\lambda,\mu)}{\varphi(t;\lambda,\mu)}\right)^2 + \varphi(t;\lambda,\mu)\,\psi(t;\lambda,\mu) \tag{57}$$

$$Q(T;\varrho,\sigma) = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{\Phi}(T;\varrho,\sigma)}{\Phi(T;\varrho,\sigma)} + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\Phi}(T;\varrho,\sigma)}{\Phi(T;\varrho,\sigma)}\right)^2 + \Phi(T;\varrho,\sigma)\,\Psi(T;\varrho,\sigma) \tag{58}$$

и на основе этих формул и уравнение $(Q;\varrho,\sigma;q;\lambda,\mu)$.

Теорема 2,1: Пусть $U(T)$ является решением системы (A) определенным начальными условиями (A^*) и функция $Z(t)$ решением уравнения $(Q;\varrho,\sigma;q;\lambda,\mu)$. Тогда $u(t)$, определенное в интервале i формулами

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \begin{vmatrix}\alpha(t)\,\varrho & \mu\\ \gamma(t)\,\varrho + \delta(t)\,\varrho_1[Z(t)] & \mu_1(t)\end{vmatrix} U_1[Z(t)] +\\ &+ \begin{vmatrix}\alpha(t)\,\sigma & \mu\\ \gamma(t)\,\sigma + \delta(t)\,\sigma_1[Z(t)] & \mu_1(t)\end{vmatrix} U_2[Z(t)]\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}u_2(t) &= \begin{vmatrix}\lambda & \alpha(t)\,\varrho\\ \lambda_1(t) & \gamma(t)\,\varrho + \delta(t)\,\varrho_1[Z(t)]\end{vmatrix} U_1[Z(t)] +\\ &+ \begin{vmatrix}\lambda & \alpha(t)\,\sigma\\ \lambda_1(t) & \gamma(t)\,\sigma + \delta(t)\,\sigma_1[Z(t)]\end{vmatrix} U_2[Z(t)],\end{aligned} \tag{60}$$

где

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{\varphi(t;\lambda,\mu)}{\Phi[Z(t);\varrho,\sigma]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{1}{2\varphi(t;\lambda,\mu)}\left(\frac{\varphi'(t;\lambda,\mu)}{\varphi(t;\lambda,\mu)} - \frac{\dot{\Phi}[Z(t);\varrho,\sigma]}{\Phi[Z(t);\varrho,\sigma]}\,Z'(t) -\right.\\ &\left.- \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{\varphi(t;\lambda,\mu)}{\Phi[Z(t);\varrho,\sigma]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}\end{aligned} \tag{62}$$

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{\Phi[Z(t);\varrho,\sigma]}{\varphi(t;\lambda,\mu)}}\,\sqrt{|Z'(t)|}\,\operatorname{sgn} Z' \tag{63}$$

является решением системы (a), определенным начальцыми условиями (33), (34) (где конечно $\varrho(Z_0) = \varrho$, $\sigma(Z_0) = \sigma$, $\lambda(t_0) = \lambda$, $\mu(t_0) = \mu$). Сверх того имеют место соотношения

$$\lambda u_1(t) + \mu u_2(t) = \alpha(t)\,(\varrho U_1[Z(t)] + \sigma U_2[Z(t)]) \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1(t)\,u_1(t) + \mu_1(t)\,u_2(t) = (\gamma(t)\,\varrho + \delta(t)\,\varrho_1[Z(t)])\,U_1[Z(t)] + \\ + (\gamma(t)\,\sigma + \delta(t)\,\sigma_1[Z(t)])\,U_2[Z(t)].\end{aligned} \tag{65}$$

Теорема 2,2: Пусть $\alpha(t)$ функция обладающая непрерывной 1-ой производной, $Z(t)$ функция обладающая производной до 3-его порядка включительно и отображающая интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$, и пусть существует линейное преобразование, которое к всякому решению $U(T)$ системы (A) определяет некоторое решение $u(t)$ системы (a), так что имеет место уравнение (64). Тогда функция $\alpha(t)$ определена формулой (61), $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (Q; ϱ, σ; q; λ, μ) (λ, μ; ϱ, σ данные постоянные) и имеет место (65), где функции $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (62), (63).

Теорема 2,3: Решение $U(T)$ системы (A), рассматриванное в теореме 2,1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению $u(t)$ системы (a) обратному соотношению

$$\begin{aligned}U_1(T) = \begin{vmatrix}\delta[\zeta(T)]\,\lambda & \sigma \\ -\gamma[\zeta(T)]\,\lambda + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)] & \sigma_1(T)\end{vmatrix} u_1[\zeta(T)]\operatorname{sgn}\dot\zeta + \\ + \begin{vmatrix}\delta[\zeta(T)]\,\mu & \sigma \\ -\gamma[\zeta(T)]\,\mu + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)] & \sigma_1(T)\end{vmatrix} u_2[\zeta(T)]\operatorname{sgn}\dot\zeta\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}U_2(T) = \begin{vmatrix}\varrho & \delta[\zeta(T)]\,\lambda \\ \varrho_1(T) & -\gamma[\zeta(T)]\,\lambda + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)]\end{vmatrix} u_1[\zeta(T)]\operatorname{sgn}\dot\zeta + \\ + \begin{vmatrix}\varrho & \delta[\zeta(T)]\,\mu \\ \varrho_1(T) & -\gamma[\zeta(T)]\,\mu + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)]\end{vmatrix} u_2[\zeta(T)]\operatorname{sgn}\dot\zeta,\end{aligned} \tag{67}$$

где функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (61), (62), (63) и функция $\zeta(T)$ обратная к функции $Z(t)$ и сверх того имеет место

$$\varrho U_1(T) + \sigma U_2(T) = \delta[\zeta(T)]\,(\lambda u_1[\zeta(T)] + \mu u_2[\zeta(T)])\operatorname{sgn}\dot\zeta \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\varrho_1(T)\,U_1(T) + \sigma_1(T)\,U_2(T) = (-\gamma[\zeta(T)]\,\lambda + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)])\,u_1[\zeta(T)]\operatorname{sgn}\dot\zeta + \\ + (-\gamma[\zeta(T)]\,\mu + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)])\,u_2[\zeta(T)]\operatorname{sgn}\dot\zeta.\end{aligned} \tag{69}$$

3. Полученные результаты мы теперь используем к исследованию дифференциальных уравнений

$$(g) \qquad y'' = g(t)\,y \qquad\qquad \ddot Y = G(T)\,Y. \qquad (G)$$

Полагая $y = x_1$, $y' = x_2$, $Y = X_1$, $\dot Y = X_2$ мы видим, что $y(t) \in (g)$, $Y(T) \in (G)$ являются первыми компонентами решений систем

$$(g') \qquad \begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= g(t)\,x_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \dot X_1 &= X_2 \\ \dot X_2 &= G(T)\,X_1 \end{aligned} \qquad (G')$$

Теорема 3,1: Пусть $U(T)$ является решением дифференциального уравнения (G) определенным начальными условиями

$$U(T_0) = U_0, \qquad \dot{U}(T_0) = \dot{U}_0, \tag{G^*}$$

где U_0, $\dot{U}_0$ данные начальные значения. Пусть даны функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\varrho(T)$, $\sigma(T)$ обладающие непрерывными производными до 3-его порядка включительно, функции $g(t)$, $G(T)$, обладают непрерывными производными до второго порядка включительно и имеют место неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(t)\,\mu'(t) - \lambda'(t)\,\mu(t) + \lambda^2(t) - g(t)\,\mu^2(t) > 0 \\ &\varrho(T)\,\dot{\sigma}(T) - \dot{\varrho}(T)\,\sigma(T) + \varrho^2(T) - G(T)\,\sigma^2(T) > 0 \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Пусть еще функция $Z(t)$ является решением дифференциального уравнения $(Q;\, \varrho, \sigma;\, q;\, \lambda, \mu)$, где $q[t;\, \lambda(t), \mu(t)]$, $Q[T;\, \varrho(T), \sigma(T)]$ определены формулами (26), (27) и

$$\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)] = \lambda(t)\,\mu'(t) - \lambda'(t)\,\mu(t) + \lambda^2(t) - g(t)\,\mu^2(t) \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \psi[t;\, \lambda(t), \mu(t)] = \frac{1}{\lambda(t)\,\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]} \Big(&\lambda''(t) + g'(t)\,\mu(t) + 2g(t)\,\mu'(t) - \\ &- \lambda'(t)\,\frac{\varphi'[t;\, \lambda(t), \mu(t)]}{\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]} - g(t)\,\mu(t)\,\frac{\varphi'[t;\, \lambda(t), \mu(t)]}{\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]} + g(t)\,\lambda(t)\Big) \end{aligned} \tag{72}$$

для $\lambda(t) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \psi[t;\, \lambda(t), \mu(t)] = \frac{1}{\mu(t)\,\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]} \Big(&\mu''(t) + 2\lambda'(t) - \mu'(t)\,\frac{\varphi'[t;\, \lambda(t), \mu(t)]}{\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]} - \\ &- \lambda(t)\,\frac{\varphi'[t;\, \lambda(t), \mu(t)]}{\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]} + g(t)\,\mu(t)\Big) \end{aligned} \tag{73}$$

для $\mu(t) \neq 0$, и аналогическим путем мы определим $\Phi[T;\, \varrho(T), \sigma(T)]$, $\Psi[T;\, \varrho(T), \sigma(T)]$.

Тогда функция $u(t)$, определенная в интервале i формулой

$$\begin{aligned} u(t) = &\begin{vmatrix} \alpha(t)\,\varrho[Z(t)] & \mu(t) \\ \gamma(t)\,\varrho[Z(t)] + \delta(t)\,\varrho_1[Z(t)] & \mu_1(t) \end{vmatrix} U_1[Z(t)] + \\ &+ \begin{vmatrix} \alpha(t)\,\sigma[Z(t)] & \mu(t) \\ \gamma(t)\,\sigma[Z(t)] + \delta(t)\,\sigma_1[Z(t)] & \mu_1(t) \end{vmatrix} \dot{U}_1[Z(t)], \end{aligned} \tag{74}$$

где

$$\mu_1(t) = \frac{\mu'(t) + \lambda(t)}{\varphi[t;\, \lambda(t), \mu(t)]},$$

функции $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (30), (31), (32), является решением уравнения (g), определенным начальными условиями

$$(Z_0 = Z(t_0) = T_0)$$

$$\begin{aligned} u(t_0) = &\begin{vmatrix} \alpha(t_0)\,\varrho(Z_0) & \mu(t_0) \\ \gamma(t_0)\,\varrho(Z_0) + \delta(t_0)\,\varrho_1(Z_0) & \mu_1(t_0) \end{vmatrix} U_0 + \\ &+ \begin{vmatrix} \alpha(t_0)\,\sigma(Z_0) & \mu(t_0) \\ \gamma(t_0)\,\sigma(Z_0) + \delta(t_0)\,\sigma_1(Z_0) & \mu_1(t_0) \end{vmatrix} \dot{U}_0 \end{aligned} \tag{75}$$

$$u'(t_0) = \begin{vmatrix} \lambda(t_0) & \alpha(t_0)\,\varrho(Z_0) \\ \lambda_1(t_0) & \gamma(t_0)\,\varrho(Z_0) + \delta(t_0)\,\varrho_1(Z_0) \end{vmatrix} U_0 + $$
$$+ \begin{vmatrix} \lambda(t_0) & \alpha(t_0)\,\sigma(Z_0) \\ \lambda_1(t_0) & \gamma(t_0)\,\sigma(Z_0) + \delta(t_0)\,\sigma_1(Z_0) \end{vmatrix} \dot{U}_0, \tag{76}$$

где

$$\lambda_1(t) = \frac{\lambda'(t) + g(t)\,\mu(t)}{\varphi[(t;\,\lambda(t),\,\mu(t)]}.$$

Сверх того имеет место соотношение

$$\lambda(t)\,u(t) + \mu(t)\,u'(t) = \alpha(t)\,(\varrho[Z(t)]\,U[Z(t)] + \sigma[Z(t)]\,\dot{U}[Z(t)]). \tag{77}$$

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 1,1 использованной на системы (g'), (G').

Из приведенной теоремы вытекают согласно абз. 2 как следствия следующие рассуждения:

Если λ, μ, ϱ, σ постоянные, то условия (70), т. е. (49) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 - \mu^2 g(t) &> 0 \\ \varrho^2 - \sigma^2 G(T) &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

По (71) или (51) имеем

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t;\,\lambda,\,\mu) &= \lambda^2 - \mu^2 g(t) \\ \Phi(T;\,\varrho,\,\sigma) &= \varrho^2 - \sigma^2 G(T). \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

По (72), (73) или (52), (53) имеем

$$\left.\begin{aligned} \psi(t;\,\lambda,\,\mu) &= \frac{g(t)}{\lambda^2 - \mu^2 g(t)} + \lambda\mu\,\frac{g'(t)}{[\lambda^2 - \mu^2 g(t)]^2} \\ \Psi(T;\,\varrho,\,\sigma) &= \frac{G(T)}{\varrho^2 - \sigma^2 G(T)} + \varrho\sigma\,\frac{\dot{G}(T)}{[\varrho^2 - \sigma^2 G(T)]^2} \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

и по (26), (27) или (57), (58) получаем

$$\left.\begin{aligned} q(t;\lambda,\mu) &= g(t) + \frac{3}{4}\mu^4\left(\frac{g'(t)}{\lambda^2 - \mu^2 g(t)}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\,\frac{g''(t)}{\lambda^2 - \mu^2 g(t)} + \lambda\mu\,\frac{g'(t)}{\lambda^2 - \mu^2 g(t)} \\ Q(T;\varrho,\sigma) &= G(T) + \frac{3}{4}\sigma^4\left(\frac{\dot{G}(T)}{\varrho^2 - \sigma^2 G(T)}\right)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\,\frac{\ddot{G}(T)}{\varrho^2 - \sigma^2 G(T)} + \varrho\sigma\,\frac{\dot{G}(T)}{\varrho^2 - \sigma^2 G(T)} \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Из этого следует, что дифференциальное уравнение (Q; ϱ, σ; q; λ, μ) в настоящем случае согласится с тем же самым уравнением в работе [2], значит, что теорема 3,1 является обобщением теоремы 1, абз. 5, [2]. Действительно из (74) получаем (1), 5 [2], из (75), (76) вытекает (2), 5 [2] и из (77) имеем (3), 5 [2], так как по (61), (79) имеет место

$$\alpha(t) = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2 g(t)}{\varrho^2 - \sigma^2 G[Z(t)]}}\;\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}. \tag{83}$$

Аналогическим образом мы можем на основе теоремы 1,3 обобщить теорему 2,5 [2].

Теорема 3,2: Решение $U(T)$ уравнения (G), рассматриванное в теореме 3,1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению $u(t)$ уравнения (g) обратному соотношению

$$U(T) = \begin{vmatrix} \delta[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] & \sigma(T) \\ -\gamma[\zeta(T)]\,\lambda[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\lambda_1[\zeta(T)] & \sigma_1(T) \end{vmatrix} u[\zeta(T)] \operatorname{sgn} \dot{\zeta} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \delta[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] & \sigma(T) \\ -\gamma[\zeta(T)]\,\mu[\zeta(T)] + \alpha[\zeta(T)]\,\mu_1[\zeta(T)] & \sigma_1(T) \end{vmatrix} u'[\zeta(T)] \operatorname{sgn} \dot{\zeta},$$

где $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены формулами (30), (31), (32) и функция $\zeta(T)$ обратная к функции $Z(t)$, и сверх того имеет место

$$\varrho(T)\, U(T) + \sigma(T)\, \dot{U}(T) = \delta[\zeta(T)]\; (\lambda[\zeta(T)]\; u[\zeta(T)] \;+\; \mu[\zeta(T)] u'[\zeta(T)]) \operatorname{sgn} \dot{\zeta},$$

т. е.

$$[\varrho(T)\, U(T) + \sigma(T)\, \dot{U}(T)]\, (\Phi[T; \varrho(T), \sigma(T)])^{-\frac{1}{2}} = (\lambda[\zeta(T)]\, u[\zeta(T)] +$$

$$+ \mu[\zeta(T)]\, u'[\zeta(T)])\, [\varphi(\zeta(T); \lambda[\zeta(T)], \mu[\zeta(T)])]^{-\frac{1}{2}}\, |\dot{\zeta}(T)|^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} \dot{\zeta}.$$

Литература

[1] *Borůvka, O.:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. „Annali di matematica pura ed aplicata" (Bologna) IV, T. XLI, 1956.

[2] *Laitoch, M.:* L'équation associée dans la théorie des transformations des équations différentielles du second ordre. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. T. 12, 1963.

[3] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. T. 9, 1962.

[4] *Wilczynski, E. J.:* Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig, B. G. Teubner 1906.

Shrnutí

O jisté transformaci řešení soustav dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

STANISLAV TRÁVNÍČEK

V tomto článku se zabývám speciálními vzájemnými transformacemi řešení soustav dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu (a), (A) a to takovými, aby řešení byla vázána podmínkou (35), kde $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\varrho(T)$, $\sigma(T)$ jsou dané funkce.

V 1. části jsou k tomuto problému formulovány tři věty.

Ve 2. části je uveden tvar vzorců a vět z 1. části za předpokladu, že λ, μ, ϱ, σ jsou konstanty.

Ve 3. části jsou výsledky předchozích dvou odstavců použity na diferenciální rovnice 2. řádu (g), (G) a je ukázána souvislost uvažovaných transformací s některými výsledky práce [2].