Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček

О некоторых преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 7 (1966), No. 1, 89--95

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119861`

1966 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 21.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: z. prof. RNDr. et CSc. Miroslav Laitoch

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

СТАНИСЛАВ ТРАВНИЧЕК

(Поступило в редакцию 28. 4. 1965 г.)

Автор в настоящей работе обобщает некоторые результаты теории преобразований решений систем дифференциальных уравнений. Рассматриваются взаимные преобразования решений $U(T)$ системы (A_n) и решений $u(t)$ системы (a_m) в виде (2). Излогаются рассуждения о рангу матрицы $K(t)$, о преобразованиях линейно независимых решений и об обратных преобразованиях. Специальные случаи преобразований $m = n$, $m = n = 3$, $m = n = 2$ изучались изложеными методами в работах [1], [2].

Мы будем заниматься системами вида

$$(a_m) \qquad y' = M(t)\, y \qquad\qquad \dot{Y} = N(T)\, Y \qquad (A_n)$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \qquad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ \vdots \\ Y_n(T) \end{pmatrix},$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{mm}(t) \end{pmatrix}, \qquad N(T) = \begin{pmatrix} A_{11}(T) & \dots & A_{1n}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}(T) & \dots & A_{nn}(T) \end{pmatrix},$$

и где штрихом обозначаются производные по t и точкой производные по T. Предположим, что $a_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \dots m)$ непрерывны в интервале j и $A_{rs}(T)$ $(r, s = 1, 2, \dots, n)$ непрерывны в интервале J и что в этих интервалах определены решения $u(t)$, $U(T)$ систем (a_m), (A_n) начальными условиями: для $t_0 \in j$, $T_0 \in J$ имеет место

$$(a^*) \qquad u(t_0) = u_0 \qquad\qquad U(T_0) = U_0, \qquad (A^*)$$

где

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ \vdots \\ u_{m0} \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} U_{10} \\ \vdots \\ U_{n0} \end{pmatrix},$$

$u_{i0}(i = 1, 2, \dots, m)$, $U_{r0}(r = 1, 2, \dots, n)$ произвольные числа.

Лемма 1. Пусть

а) функция $Z(t)$ *отображает интервал* $i \subset j$ *на интервал* $I \subset J$ *и данную внутреннюю точку* $t_0 \in i$ *на данную внутреннюю точку* $T_0 \in I$, *т. е.* $Z(t_0) = T_0$ *и функция* $Z'(t)$ *непрерывна для* $t \in i$;

б) $\alpha^0_{ik}(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ *произвольные постоянные.*

Тогда для данной функции $Z(t)$ *в интервале* i *существуют и определены однозначно функции* $\alpha_{ik}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ *начальными условиями* $\alpha_{ik}(t_0) = \alpha^0_{ik}$ *как решения системы* mn *дифференциальных уравнений*

$$\alpha'_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, \alpha_{jk}(t) - \sum_{j=1}^{n} A_{jk}[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha_{ij}(t) \tag{1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство: При данных предположениях удовлетворяются тоже предположения теоремы о существовании и однозначности решений систем дифференциальных уравнений (см. напр. [3], г. I, § 3, ч. 1 и 4а) откуда и вытекает верность доказываемой леммы.

Введем обозначение

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \ldots & \alpha_{1n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1}(t) & \ldots & \alpha_{mn}(t) \end{pmatrix}, \qquad K_0 = \begin{pmatrix} \alpha^0_{11} & \ldots & \alpha^0_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^0_{m1} & \ldots & \alpha^0_{mn} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. По лемме 1 существует и определено однозначно начальными условиями

$$K(t_0) = K_0 \tag{1*}$$

решение $K(t)$ матричного дифференциального уравнения

$$K'(t) = M(t)\, K(t) - K(t)\, N[Z(t)]\, Z'(t) \tag{1'}$$

и в этом виде мы будем системой (1) тоже пользоваться.

Теорема 1. *Пусть имеют место предположения а) б) леммы* 1 *и*

в) $U(T)$ *является решением системы* (A_n) *определенным в интервале* J *начальными условиями* (A^*);

г) функции $\alpha_{ik}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$, $Z(t)$ *удовлетворяют в интервале* i *системе* (1) *и в точке* $t = t_0$ *имеет место* $\alpha_{ik}(t_0) = \alpha^0_{ik}$.

Тогда $u(t)$, *определенное уравнением*

$$u(t) = K(t)\, U[Z(t)] \tag{2}$$

есть решение системы (a_m), *определенное начальными условиями* $u(t_0) = K_0 U_0$

Доказательство: Имеет место

$$u'(t) = K'(t)\, U[Z(t)] + K(t)\, \dot{U}[Z(t)]\, Z'(t) =$$
$$= \{K'(t) + K(t)\, N[Z(t)]\, Z'(t)\}\, U[Z(t)].$$

По (1') получаем

$$u'(t) = M(t)\, K(t)\, U[Z(t)] = M(t)\, u(t),$$

т. е. $u(t)$, определенное уравнением (2), удовлетворяет системе (a_m). Из уравнения (2) в точке $t = t_0$ следует $u(t_0) = K_0 U_0$, ч. т. д.

Замечание 2. Теорема 1 описывает отображение $\mathbf{A}$ n-мерного пространства A_n решений системы (A_n) в m-мерное пространство A'_m решений системы (a_m). Это отображение очевидно линейное: если $U^{(1)} \in A_n$, $U^{(2)} \in A_n$, $u^{(1)} = U^{(1)}\mathbf{A}$, $u^{(2)} = U^{(2)}\mathbf{A}$, то ($\lambda$, η постоянные)

$$(\lambda U^{(1)} + \eta U^{(2)}) \mathbf{A} = K(t) \{\lambda U^{(1)}[Z(t)] + \eta U^{(2)}[Z(t)]\} =$$
$$= \lambda K(t)\, U^{(1)}[Z(t)] + \eta K(t)\, U^{(2)}[Z(t)] = \lambda u^{(1)} + \mu u^{(2)}.$$

Лемма 2. *Пусть P, Q две матрицы функций с m строками и n столбцами, и для произвольного решения системы (A_n) имеет место $PU = QU$. Тогда $P = Q$.*

Доказательство: Пусть $U^{(i)} (i = 1, 2, \ldots, n)$ фундаментальная система решений системы (A_n), так что матрица этих решений

$$\Omega(T) = \begin{pmatrix} U_1^{(1)}(T) & \ldots & U_1^{(n)}(T) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_n^{(1)}(T) & \ldots & U_n^{(n)}(T) \end{pmatrix}$$

и $|\Omega(T)| \neq 0$; итак существует $\Omega^{-1}(T)$. Из n равенств

$$PU^{(i)} = QU^{(i)}, \tag{3}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$ вытекает верность равенства

$$P\Omega(T) = Q\Omega(T). \tag{4}$$

Умножая равенство (4) справа на $\Omega^{-1}(T)$ получаем утверждение леммы.

Теорема 2. *Пусть имеет место предположение а) леммы 1 и*

д) функции $\alpha_{ik}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ определены и дифференцируемы в интервале i;

е) для произвольного решения $U(T)$ системы (A_n) существует решение $u(t)$ системы (a_m) такое, что имеет место (2).

Тогда функции $\alpha_{ik}(t)$, $Z(t)$ являются решением системы (1). *Если начальные условия решений $U(T)$, $u(t)$ имеют вид (A^*), (a^*), то матрица K_0 начальных значений для функций $\alpha_{ik}(t)$ удовлетворяет условию $u_0 = K_0 U_0$.*

Доказательство: Так как $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) и системе (a_m), то имеет место равенство

$$u'(t) = \{K'(t) + K(t)\, N[Z(t)]\, Z'(t)\}\, U[Z(t)]$$

и также

$$u'(t) = M(t)\, K(t)\, U[Z(t)]$$

Сравнивая правые части, получаем по лемме 2 уравнение (1'). Положение теоремы о начальных условиях вытекает из уравнения (2) для $t = t_0$.

Введем обозначения

$$\omega_{mn}(t) = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(t) & \dots & u_1^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ (u_m^{(1)}t) & \dots & u_m^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

где $u_i^{(k)}(t)$ есть i-тая компонента k-того решения системы (a_m)

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} U_{10}^{(1)} & \dots & U_{10}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{n0}^{(1)} & \dots & U_{n0}^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad \omega_{mn0} = \begin{pmatrix} u_{10}^{(1)} & \dots & u_{10}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{m0}^{(1)} & \dots & u_{m0}^{(n)} \end{pmatrix},$$

где $U_{i0}^{(k)}[u_{i0}^{(k)}]$ есть начальное значение i-той компоненты k-того решения системы (A_n) $[(a_m)]$.

Теорема 3. *Пусть $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ..., $U^{(n)}$ образуют фундаментальную систему решений системы (A_n) и матрица K_0 пусть имеет ранг h. Тогда среди решений $u^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $u^{(i)} = U^{(i)}\mathbf{A}$ существует именно h решений линейно независимых.*

Доказательство: По теореме 1 имеет место соотношение между начальными значениями

$$\omega_{mn0} = K_0\Omega_0.$$

Матрица Ω_0 невырожденная, матрица K_0 имеет ранг h, и по [4] (гл. III, § 14) матрица ω_{mn0} имеет тоже ранг h. По [3] (гл. II, § 1, 2г) имеет матрица $\omega_{mn}(t)$ одинаковый ранг во всем интервале i, т. е. среди решений $u^{(i)}(t)$ существует точно h решений линейно независимых.

Лемма 3. *Матрица $K(t)$ сохраняет ранг во всем интервале i.*

Доказательство: Пусть в точке t_0 имеет матрица $K(t_0) = K_0$ ранг h_0. По теореме 3 имеет ранг h_0 тоже матрица

$$\omega_{mn}(t) = K(t)\,\Omega[Z(t)]. \tag{5}$$

Если бы в точке $t_1 \neq t_0$ имела матрица $K(t_1)$ ранг $h_1 \neq h_0$, то и матрица $\omega_{mn}(t_1)$ имела бы тот же самый ранг h_1. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ..., $U^{(n)}$ образуют фундаментальную систему решений системы (A_n) и матрица $K(t)$ пусть имеет ранг m. Тогда среди решений $u^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $u^{(i)} = U^{(i)}\mathbf{A}$ существует m решений образующих фундаментальную систему решений системы (a_m).*

Доказательство вытекает из леммы 3 и теоремы 3 для $h = m$.

Замечание 3. Из предыдущих рассуждений очевидно, что для теоремы 3 и леммы 4 справедливы и обратные теоремы.

Лемма 5. *Пусть $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ..., $U^{(p)}$ линейно независимые решения системы (A_n) и матрица $K(t)$ пусть имеет ранг h. Тогда среди решений $u^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, $u^{(i)} = U^{(i)}\mathbf{A}$, существует r линейно независимых решений, где*

$$\max(0, p + h - n) \leqq r \leqq \min(p, h). \tag{6}$$

Доказательство: Дефект преобразования **A** равен $n - h$, ядро преобразования может из данных p решений содержать наиболее $\min(p, n - h)$ решений. Тогда на линейно независимые решения преобразуется по крайней мере $p - \min(p, n - h) = \max(0, p + h - n)$. Если рассмотрим начальные значения (как и в доказательстве теоремы 3), то второе неравенство (6) непосредственно вытекает из теоремы о рангу произведения матриц.

Замечание 4. Очевидно, в каких нетривиальных случаях r определено однозначно:

$$\text{если } p \leqq n,\ h = n, \text{ то } r = p,$$

$$\text{если } p = n,\ h \leqq n, \text{ то } r = h.$$

Лемма 6. *Для того, чтобы решение $U(T)$ системы (A_n) преобразовалось по теореме 1 в нетривиальное решение $u(t)$ системы (a_m), необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере для одного $i = 1, 2, \ldots n$, имело место*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^0 U_{j0} \neq 0.$$

Доказательство вытекает из обстоятельства, что начальные условия для тривиального решения системы (a_m) имеют вид

$$u_{i0}\Big(= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^0 U_{j0}\Big) = 0$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для следующих рассуждений предположим, что функция $Z(t)$ имеет в интервале i непрерывную производную разную от нуля. Тогда существует функция $\zeta(T)$ обратная к функции $Z(t)$, отображающая интервал $I \subset J$ на интервал $i \subset j$, внутреннюю точку $T_0 \in I$ на внутреннюю точку $t_0 \in i$ и имеет в интервале I непрерывную производную разную от нуля. Для соответствующих точек t, T (т. е. $Z(t) = T$) имеет место $\dot{\zeta}(T)\, Z'(t) = 1$.

Теорема 4. *Пусть решение $U(T)$ системы (A_n) преобразуется по теореме 1 на нетривиальное решение $u(t)$ системы (a_m). Тогда существует обратное преобразование, преобразующее это решение на $U(T)$*

$$U(T) = \bar{K}(T)\, u[\zeta(T)], \tag{7}$$

где $\zeta(T)$ функция обратная к функции $Z(t)$; $\bar{K}(T)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\bar{K}}(T) = N(T)\, \bar{K}(T) - \bar{K}(T)\, M[\zeta(T)]\, \dot{\zeta}(T) \tag{8}$$

и определено начальными условиями

$$\bar{K}(T_0) = \bar{K}_0 = (\bar{\alpha}_{ki}^0), \tag{8*}$$

где значения $\bar{\alpha}_{ki}^0 (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m)$ получаем путем решения n алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_{ki}^0 \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^0 U_{j0} = U_{k0} \tag{9}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$, *в каждой из которых находится* m *неизвестных* $\overline{\alpha}^0_{ki}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство: Пусть $u(t)$ нетривиальное решение системы (a_m), $u = U\mathbf{A}$. Используя на это решение теорему 1, получаем решение $\overline{U}(T)$ системы (A_n),

$$\overline{U}(T) = \overline{K}(T)\, u[\overline{\zeta}(T)],$$

где $\overline{K}(T)$ удовлетворяет уравнению (8) и $\overline{\zeta}(T)$ должна по теореме 1 иметь эти свойства: отображает интервал $I \subset J$ на интервал $i \subset j$ и точку $T_0 \in I$ на точку $t_0 \in i$, $\zeta(T)$ непрерывна. Итак в качестве функции $\overline{\zeta}(T)$ мы можем выбрать функцию $\zeta(T)$ обратную к $Z(t)$, которая обладает этими свойствами.

Так как $u(t)$ нетривиальное решение, то по лемме 6 имеет место по крайней мере для одного $i = 1, 2, \ldots, n$

$$(u_{i0} =) \sum_{j=1}^{n} \alpha^0_{ij} U_{j0} \neq 0.$$

Это значит, что (по теореме Кронекера—Капелли) уравнения (9) имеют решения. Для начальных условий решения $\overline{U}(T)$ системы (A_n) имеем

$$\overline{U}(T_0) = \overline{K}(T_0)\, u[\zeta(T_0)] = \overline{K}_0 u(t_0),$$

но в силу (9) это равно U_0; итак $\overline{U}(T) \equiv U(T)$.

Замечание 5. В системе (9) содержает каждое уравнение m неизвестных. Это значит, что в теореме 4 удовлетворяет обратным соотношениям $(m-1)\,n+1$ линейно независимых решений $\overline{\alpha}_{ki}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $i = 1, 2, \ldots, m)$ системы (8).

Теорема 5. *Пусть матрица $K(t)$ имеет ранг h. Тогда существует h линейно независимых решений $U^{(l)}(T)$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$ системы (A_n) которые преобразуются по теореме 1 на линейно независимые решения $u^{(l)}(t)$ $(u^{(l)} = U^{(l)}\mathbf{A})$ системы (a_m) и существует обратное преобразование, преобразующее эти решения обратно на $U^{(l)}(T)$.*

$$U^{(l)}(T) = \overline{K}(T)\, u^{(l)}[\zeta(T)].$$

Функция $\zeta(T)$ обратная к $Z(t)$, $\overline{K}(T)$ удовлетворяет уравнению (8) *и определено начальными условиями* (8*) *и значения $\overline{\alpha}^0_{ki}$ получаем путем решения n систем $(k = 1, 2, \ldots, n)$ h алгебраических уравнений $(l = 1, 2, \ldots, h)$ с m неизвестными $\alpha^0_{ki}(i = 1, 2, \ldots, m)$*

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}^0_{ki} \sum_{j=1}^{n} \alpha^0_{ij} U^{(l)}_{j0} = U^{(l)}_{k0}. \tag{10}$$

Доказательство: Первая часть утверждения теоремы вытекает непосредственно из теоремы 3 и леммы 3. Утверждение об обратном преобразовании вытекает из теоремы 4, которую можно использовать на каждое из решений $U^{(l)}(l = 1, 2, \ldots, h)$. Остается вопрос о совместности всех систем (10) $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $h \leqq m$, то уравнений в системе не больше чем неизвестных и из независимости решений $u^{(l)}(t)$ вытекает что матрица коэфициентов $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{0} U_{j0}^{(l)} = u_{i0}^{(l)}$ уравнений всех систем имеет ранг h. Итак расширенные матрицы имеют тоже ранг h и все системы совместны.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 18, 1965.

[2] *Травничек, С.:* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. „Acta Universitatis Palackianae Olomucensis" F. R. N. т. 9, 1962.

[3] *Сансоне, Дж.:* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва ИЛ 1953.

[4] *Курош, А. Г.:* Курс высшей алгебры. Издание 7-ое. Москва, ФМ 1962.

SHRNUTÍ

O JISTÝCH TRANSFORMACÍCH ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU

STANISLAV TRÁVNÍČEK

V práci se studuje transformace řešení soustav (A_n), (a_m) ve tvaru (2); přímo se touto transformací zabývají věty 1 a 2. Ve větě 3 a v následujících lemmatech jsou úvahy o hodnosti matice $K(t)$ a o transformaci lineárně nezávislých řešení. Ve větách 4 a 5 jsou pak studovány inversní transformace.