Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Ladislav Franc

Příspěvek k řešení VN a VVN

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 6 (1965), No. 1, 85--(145)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119835

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

1965 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 18.

Katedra experimentální fyziky a metodiky fyziky přírodovědecké fakulty.
Vedoucí katedry: Prof. paed. dr. Josef Fuka.

PŘÍSPĚVEK K ŘEŠENÍ VN A VVN

LADISLAV FRANC

(Předloženo dne 24. června 1964)

PŘEDMLUVA

Dnešní způsob používání maticové algebry a tenzorů ve fyzice a v teoretické elektrotechnice byl dosažen postupně a to využitím a syntézou prací fyziků, matematiků a elektrotechniků. Při tom vynikají zvláště tři důležitá jména: Fyzik Maxwell položil základy systematickému řešení elektrických obvodů neboť navrhl metodu obvodových proudů a uzlových napětí v letech sedmdesátých minulého století. Matematický pojem matice vznikl asi v polovině minulého století, avšak propracování maticového počtu provedl hlavně matematik Poincaré, jenž zavedl např. pojem incidenční matice a pod. počátkem tohoto století.

Tyto matematické podklady využil pro operace se složitějšími soubory fyzikálních veličin elektrotechnik Kron ve čtyřicátých letech tohoto století pod názvem tenzorový počet. Jeho metoda byla vytříbena a převzata brzy i u nás pro řešení elektrických obvodů i v různých aplikacích.

Základní a elementární práce v tomto směru u nás je Schmidtmayerův Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice (1953). Dalším stupněm je Prombergerova kniha Použití matic a tenzorů v teoretické elektrotechnice z r. 1956. Vrcholnou prací u nás je zatím rozsáhlá práce J. Kučery a Z. Horáka Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice, vydaná r. 1963.

Všechny tyto knihy mají společný znak v tom, že jejich rozsáhlé části jsou věnovány matematickému úvodu, který vysvětluje maticový nebo tenzorový počet. Potom teprve se přikročuje k vysvětlení, jak se jich používá při řešení elektrických obvodů ve slaboproudé elektrotechnice (první dvě práce) nebo pro výpočet a řešení elektrických strojů v posledně uvedené práci.

Tato studie je věnována aplikaci maticového počtu pro řešení elektrických rozvodných sítí metodou obvodových proudů a uzlových napětí — tedy aplikaci dosud souborně nepropracované a nepublikované. Při tom se předpokládá, že čtenář je se základy maticového počtu obeznámen a tyto jsou jen podle potřeby připomenuty. Čtenáře odkazuji hlavně na práci Schmidtmayerovu nebo některou jinou publikaci čistě matematickou.

Poslední část studie je věnována metodě iterační, která je založena na opakování korekcí uzlových napětí sítě vvn. Rozložení napětí v síti se při prvním přiblížení rozvrhuje pouze úvahou a zkusmo. Je to metoda vyvinutá

původně pro řešení soustav lineárních rovnic a její aplikace pro řešení sítí je upotřebitelná jedině použitím číslicových počítacích strojů. U nás je nyní propracovávána našimi výzkumnými ústavy a zdá se, že bude výhodnější, nežli metody jiné.

OBSAH

Předmluva 85
Obsah 86
Přehled označení 87
A. Úvod. Topologie elektrických obvodů a sítí 87
B. Přehled známých řešení. Vytčení rozdílů mezi elektrickými obvody a sítěmi . . 88
C. Řešení složitých obvodů metodou obvodových proudů a obdoba tohoto řešení u elektrických sítí 95
a) Fyzikální princip metody 95
b) Poměry v zatížené síti 97
c) Stručná rekapitulace maticové algebry 100
d) Aplikace maticového počtu na jednotlivé případy 103
α) Síť napájená v jednom uzlu 105
β) Síť napájená v několika uzlech o neregulovaném zatížení 107
γ) Síť napájená v několika uzlech při regulovaném zatížení napáječů . . . 109
D. Řešení složitých obvodů metodou uzlových napětí a obdoba tohoto řešení u elektrických sítí 112
a) Fyzikální princip metody 112
b) Poměry v zatížené síti 114
c) Aplikace maticového počtu na jednotlivé případy 114
α) Síť napájená v jednom uzlu 115
β) Síť napájená v několika uzlech o neregulovaném zatížení napáječů . . 117
γ) Síť napájená v několika uzlech při regulovaném zatížení napáječů . . . 119
E. Ukázky numerického řešení 122
a) Sítě quasistejnosměrné (ukázkové příklady bez komplexních čísel) 122
α) Síť podle stati *Cdγ* 122
β) Síť podle stati *Dcγ* 126
b) Sítě střídavé 128
α) Matice s komplexními čísly 128
β) Řešení střídavé rozvodné sítě 129
F. Sítě velmi vysokého napětí 133
G. Metoda uzlových iterací 135
a) Teoretický úvod 135
b) Princip metody 139
H. Závěr 142

PŘEHLED OZNAČENÍ

a_{xy} prvek v x-tém řádku a y-tém sloupci matice nebo determinantu
$a + jb$ reálná (činná) a imaginární (jalová) složka proudu I
$e + jf$ reálná (činná) a imaginární (jalová) složka napětí U
$d + jc$ reálná (činná) a imaginární (jalová) složka dílčí příčné vodivosti vedení
$g + jh$ reálná (činná) a imaginární (jalová) složka dílčí podélné vodivosti vedení
$(m; n)$ označení typu matice
m počet větví v síti
p počet větví úplného stromu
q počet uzlů v síti
n počet nezávislých obvodů v síti
A matice vyjádřená souborem

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

$|\boldsymbol{A}|$ determinant matice $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{A}^{-1}$ matice inversní k regulérní matici A
${}^{T}\boldsymbol{A}$ matice transponovaná k matici A
$\tilde{\boldsymbol{A}}'$ matice adjungovaná k matici A
C kapacita
$\boldsymbol{C}$ incidenční matice větví nebo proudů
$\boldsymbol{E}$ jednotková matice
$\boldsymbol{I}_v$ matice proudů ve větvích (sloupcový vektor)
$\boldsymbol{I}_0$ matice proudů v obvodech (sloupcový vektor)
$\boldsymbol{I}_z$ matice proudů zátěžných (sloupcový vektor)
I, U proud a napětí obecně
I^* Celkový proud včetně složky činné I_c i jalové I_j
L vlastní indukčnost
M vzájemná indukčnost
$\boldsymbol{M}$ incidenční matice větví nebo napětí
R, r činný odpor celkový — dílčí
S zdánlivý výkon
P činný výkon
Q jalový výkon
$\boldsymbol{U}_v$ matice napětí ve větvích
$\boldsymbol{U}_0$ matice napětí v obvodech
$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}$ matice impedancí, admitancí ve větvích
$\boldsymbol{Z}_0$ matice impedancí v obvodech
Z, Y impedance, admitance obecně
ε přírůstek reálné složky napětí e
ξ přírůstek imaginární složky napětí f
φ fázový posun mezi časovými vektory $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{I}$
ϑ fázový posun mezi časovými vektory $\boldsymbol{U}_0$ a $\boldsymbol{U}_m$
ω kruhová frekvence
Δ přírůstek
Σ součet

A. Úvod. Topologie elektrických obvodů a sítí

Jak nauky fyzikální, tak i elektrotechnická teorie se zajímá o řešení komplikovaných systémů, složených z proudových zdrojů, vodičů, po případě elektrických spotřebičů, které nazýváme elektrickými obvody nebo sítěmi.

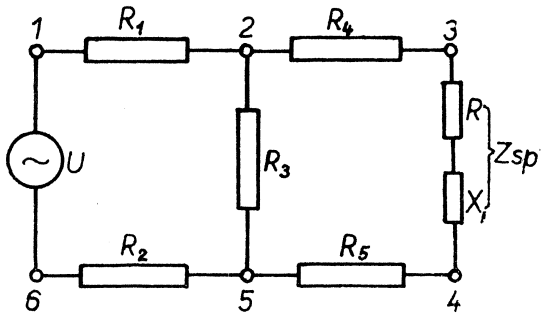
U vodičů, které spojují jednotlivé proudové zdroje mezi sebou nebo se spotřebiči, uplatňují se ovšem jejich činné odpory, u obvodů střídavých také jejich indukčnosti a kapacity. Rozeznáváme proto prvky aktivní — tj. proudové zdroje nebo zdroje napětí a dále prvky pasivní — tj. činné odpory a další složky komplexního odporu střídavého a elektrické spotřebiče, jejichž náhradní schémata jsou složena rovněž z kombinací uvedených pasivních členů.

Ve schématech elektrických obvodů a sítí zakreslujeme ovšem pasivní prvky, jejichž elementy jsou ve skutečnosti rozloženy podél celé délky vodiče, explicitně, tj. jakoby byly soustředěny do jednoho místa, jehož konce spojujeme dále ideálními vodiči bezodporovými.

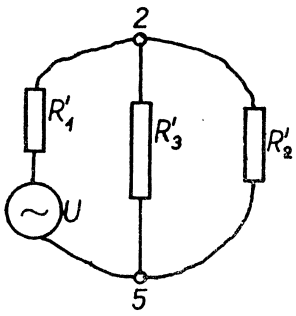
Místa, kde se stýkají alespoň dva prvky obvodu, nazýváme uzly. Spojení mezi dvěma uzly tvoří větve. Větví však častěji nazýváme takovou sériovou kombinaci prvků mezi těmi uzly, ve kterých se stýkají alespoň 3 proudové dráhy. Tak na obr. 1a je zakreslen obvod, který má 6 uzlů a 7 větví. Je v něm 1 proudový zdroj, 5 odporových prvků ve větvích a spotřebič, jehož náhradní

schéma je komplexní reaktance Z_{sp}. Zjednodušené schéma, které je na obr. 1b, ukazuje, že skutečnými uzly jsou jen body 2 a 5. Odpor $R_1' = R_1 + R_2$, $R_2' = R_4 + R_5 + Z_{sp}$.

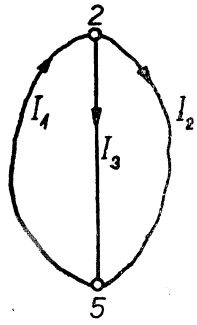
Jestliže ze schématu vypustíme všechny prvky, ať aktivní či pasivní a provedeme jen spojení uzlů ideálními vodiči, obdržíme tzv. kostru spojení čili schéma proudových drah. Taková kostra je obr. 1c.



Obr. 1a.



Obr. 1b.



Obr. 1c.

Pokud pasivní prvky větví mají konstantní hodnoty, nezávislé na velikosti proudů jimi protékajících, nazývají se tyto obvody nebo sítě lineární. Zpravidla je velikost aktivních i pasivních prvků v obvodech i sítích známa a hledáme proudy, tekoucí v jednotlivých větvích. Takovou úlohu nazýváme analýzou elektrických obvodů a sítí. Naším úkolem je tedy analýza elektrických lineárních obvodů a sítí.

B. Přehled známých řešení. Vytčení rozdílu mezi elektrickými obvody a sítěmi

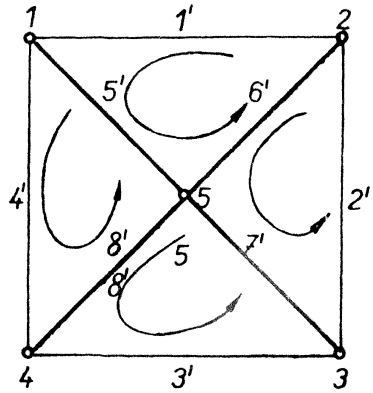
Při jakémkoliv řešení je třeba si uvědomit, že jednotlivé větve jsou v podstatě elektrické dvojpóly a že všechny vztahy platí jak pro obvody a sítě střídavé, tak i stejnosměrné. V tomto případě se vztahy a vzorce zjednoduší

potud, že místo komplexních veličin impedance Z nebo admitance Y nastupují jednoduché veličiny činného odporu R nebo vodivosti G.

Řešení elektrických obvodů byla věnována značná pozornost jak se strany fyziků, tak hlavně teoretických elektrotechniků v poměrně četné literatuře. Mimo hlavní známé metody sluší uvést ještě tzv. metodu rozuzlováním, popsanou v [8]. Tato metoda je pouze aplikací metody přetvářecí čili transfigurační, kdy složitý obvod postupně převádíme na obvod jednodušší. Při tom nahrazujeme trojúhelník hvězdou, paralelní větve nahrazujeme větví jedinou atp.

Systematičtější metoda spočívá však v použití obou Kirchhoffových zákonů.

Konečně nejlépe a nejsystematičtěji, s použitím menšího počtu rovnic, je možno složité obvody řešit metodou obvodových proudů nebo metodou uzlových napětí, které jsou v četné literatuře dobře vysvětleny.



Obr. 2.

Při řešení pomocí Kirchhoffových zákonů nebo při metodě obvodových proudů je nutno v zauzlené síti nebo v elektrickém obvodu vyhledat soustavu nezávislých proudových obvodů. Při tomto hledání rozložíme kostru spojení ve dvě charakteristické skupiny větví. Prvá skupina nazývá se úplný strom. Je to skupina nejnutnějšího počtu větví, vybraných tak, aby byly nejúspornějším způsobem spojeny všechny uzly. V soustavě proudových drah o q uzlech obsahuje úplný strom $(q - 1)$ větví — viz obr. 2. Úplný strom nesmí obsahovat žádné uzavřené proudové obvody.

Druhou skupinu tvoří ony větve, které zbyly v síti nebo složitém obvodu po vyjmutí úplného stromu. Nazývá se skupina nezávislých větví. Všechny jednoduché obvody čili smyčky, které jsou tvořeny jednou větví ze skupiny nezávislých větví a ostatními větvemi ze skupiny úplného stromu tvoří soustavu nezávislých obvodů.

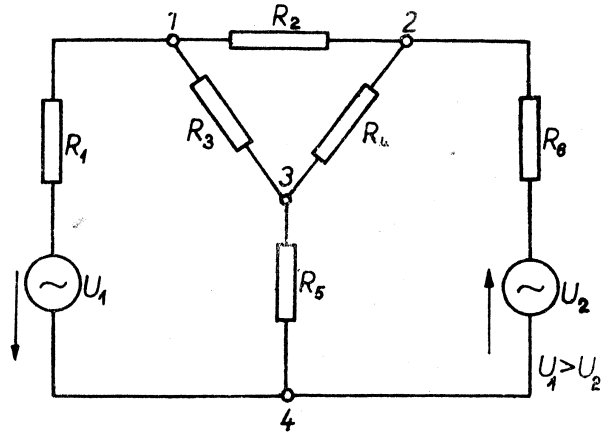
Tímto způsobem dospěli jsme systematicky k identifikaci nezávislých proudových obvodů. Rovnice, které pro tyto obvody vypisujeme podle II. Kirchhoffova zákona, jsou lineárně nezávislé, protože v každé další rovnici uplatňuje se nová větev ze soustavy nezávislých větví.

Někdy připouštíme, aby kterákoliv ze smyček, vyjímaje smyčku první, byla ohraničena i několika nezávislými větvemi. Smyčky, obsahující jedinou nezávislou větev se nazývají smyčky hlavní. Tyto se často překrývají, takže přehlednější schéma dávají smyčky ohraničené i dvěma nezávislými větvemi. Více než dvě nezávislé větve se v jednom obvodě vyskytují zřídka.

Na obr. 2 je např. síť o $q = 5$ uzlech a $m = 8$ větvích. Úplný strom tvoří větve 5, 6, 7 a 8, které jsou silně vytažené. Jejich počet je $p = (q - 1) = 4$. Zbytek větví je $m - p = 4 = n$. Je to počet nezávislých větví a současně i počet nezávislých obvodů, které jsou vyznačeny obloučky. Platí dále obecně, že $n = m - (q - 1) = m - q + 1$.

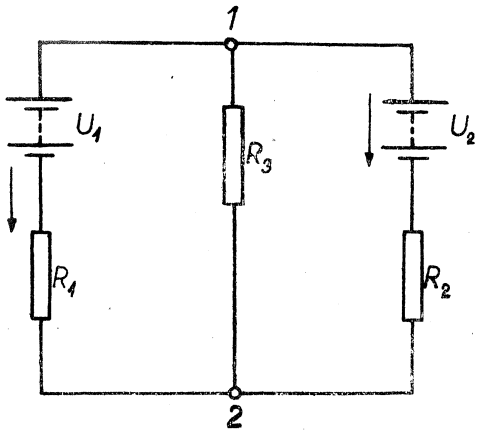
Všechny uvedené metody — s výjimkou metody transfigurační — jsou

vypracovány — a to i v literatuře teoretické elektrotechniky, zejména slaboproudé, — jako metody pro řešení elektrických obvodů. Jejich použití pro řešení zatížených elektrických sítí v technické praxi nebylo dosud obecně



Obr. 3.

a teoreticky osvětleno a propracováno. Jediný pokus toho druhu u nás je popsán v [5]. Zavádění digitálních (číslicových) počítacích strojů však přináší změnu. Zdá se, že početní metody, které byly až dosud pro svoji komplikovanost stěží upotřebitelné, stávají se nyní výhodnými vzhledem k vývoji uvedených počítacích strojů a dává se jim nyní přednost i před modely elektrických sítí [1].



Obr. 4.

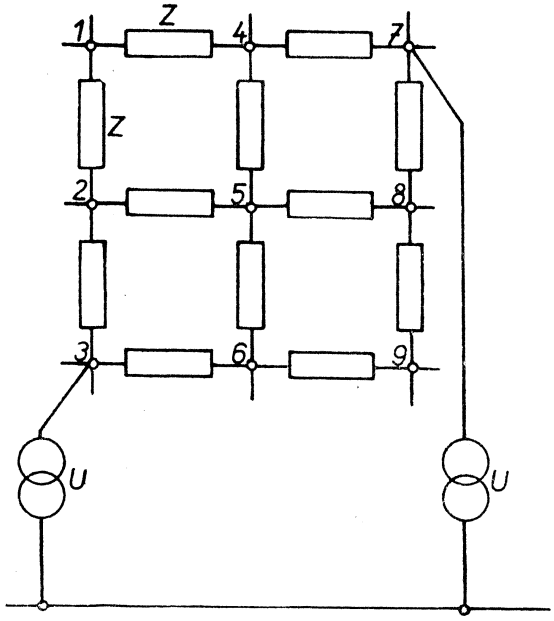
Pro obecnou aplikaci metody obvodových proudů a uzlových napětí na zatížené elektrické sítě, je nutno nejdříve systematicky porovnat rozvodné sítě s elektrickými obvody, jejichž matematická řešení jsou již vypracována. V literatuře se někdy pojem elektrického obvodu a elektrické sítě neodděluje a obvody jsou někdy nazývány nesprávně sítěmi [12].

Rozdílů, pro které není možno mechanicky používat metod pro řešení obvodů k řešení rozvodných elektrických sítí je několik a možno je seřaditi takto:

a) V elektrických obvodech, které jsou spíše fyzikálního, nežli technického charakteru, je možno zapojiti do větví několik proudových zdrojů různého

napětí, ať střídavých či stejnosměrných. Jako ukázku uvádíme střídavý obvod podle obr. 3 nebo stejnosměrný obvod podle obr. 4, které oba jsou převzaty z literatury [3] a [14].

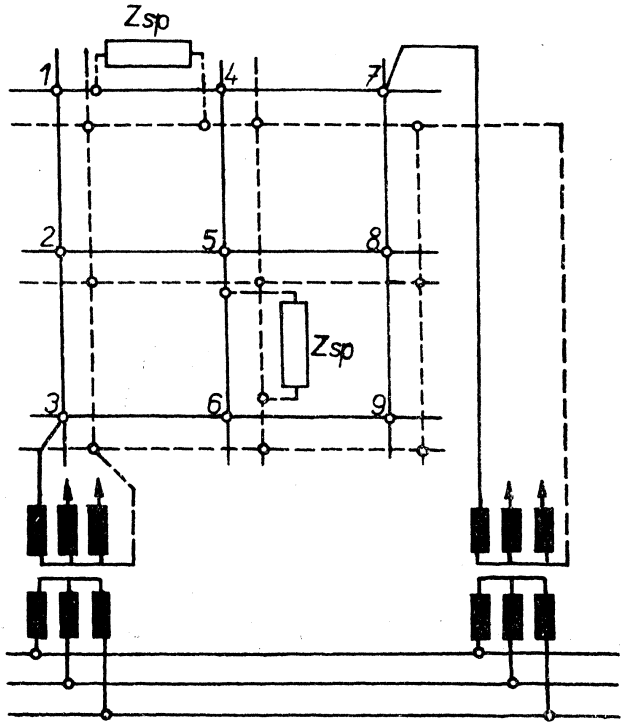
Ve skutečných rozvodných sítích však všechny zdroje mají obvykle stejné napětí. Rozvodné sítě jsou tvořeny u stejnosměrného systému dvěma, u trojfázového systému třemi paralelními vodiči o různé polaritě. Zdroje zde nejsou zapojeny do větví, jak je tomu u obvodů, tj. v podstatě sériově, nýbrž mezi větve, konkrétně mezi uzly, tedy v podstatě paralelně.



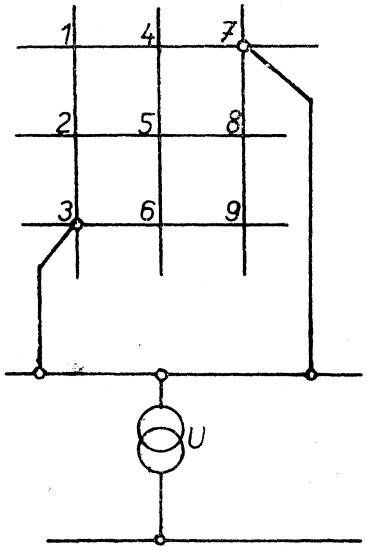
Obr. 5a.

Kdyby zdroje, které napájejí rozvodné elektrické sítě měly různá napětí, vznikly by mezi nimi vyrovnávací proudy, které jsou zde nežádoucím, někdy poruchovým zjevem. Naproti tomu vyrovnávací proudy mezi zdroji v obvodech jsou zjevem normálním. Na obr. 5a je zakresleno schéma městské mřížové sítě s paralelně zapojenými transformátory (zdroji). Tyto mají míti stejná napětí. Ještě názorněji se jeví paralelní zapojení zdrojů v síti i zapojení spotřebičů na schématu nakresleném dvojpólově nebo trojpólově, jak patrno z obr. 5b. Takové paralelní zdroje o stejném napětí můžeme nahraditi zdrojem jediným podle obr. 5c tehdy, když můžeme regulovati jejich sekundární napětí nebo napájecí proudy. Není-li to možné, je náhradní schéma podle obr. 5d. Schémata se nápadně odlišují od obr. 3 a 4, které jsou v podstatě rovněž dvojpólové, avšak zdroje jsou zapojeny sériově.

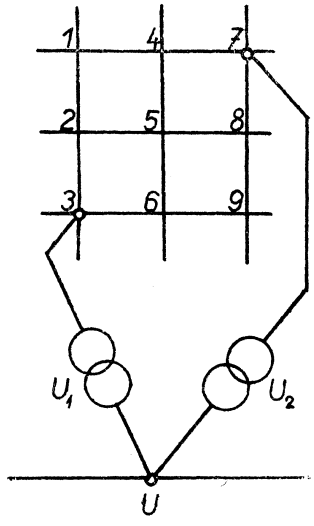
b) V elektrických obvodech fyzikálního rázu procházejí větvemi proudy, které jsou důsledkem různých potenciálů uzlů a různých napětí zdrojů. Proudy



Obr. 5b.



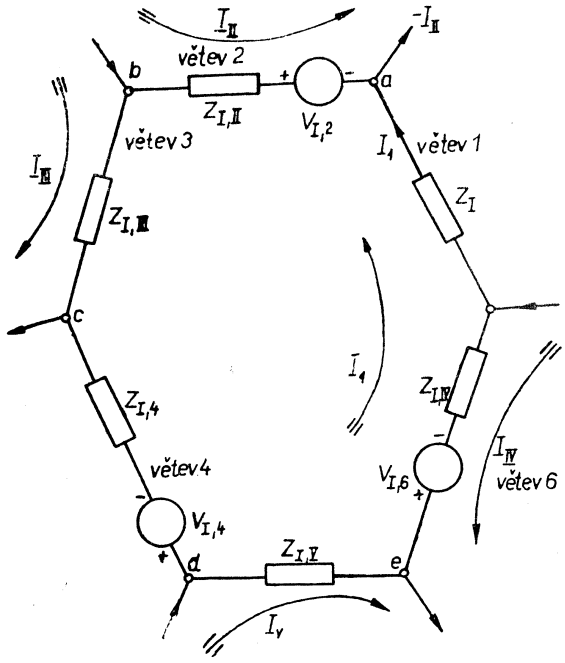
Obr. 5c.



Obr. 5d.

tedy procházejí i tehdy, není-li v obvodu žádný spotřebič. Pasivními prvky jsou tyto proudy tlumeny nebo i regulovány, bez nich by zdroje byly zapojeny prostě nakrátko.

Naproti tomu v elektrické síti — např. podle obr. 5b — nebudou zřejmě procházet žádné proudy, pokud nebude zapojen nějaký spotřebič. Spotřebiče — podobně jako zdroje — se zapojují paralelně a tím se liší jejich náhradní schéma čili náhradní impedance Z_{sp} od impedancí jednotlivých větví Z, které jsou zapojeny mezi uzly sériově.



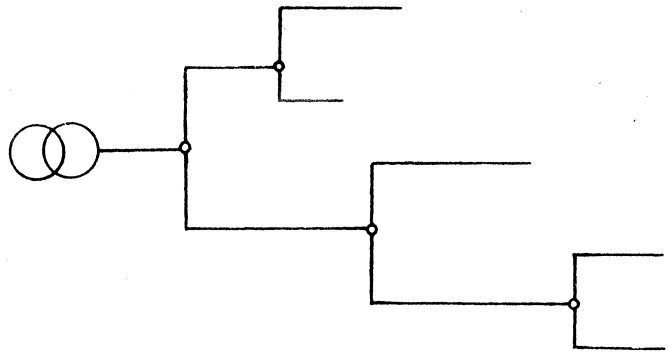
Obr. 6.

Jest tedy proud v elektrickém obvodu důsledkem připojení zdrojů, kdežto v elektrické síti při zapojených zdrojích je důsledkem připojení spotřebičů.

c) Předpokládejme nyní, že zdroje v elektrické síti jsou připojené a pozorujme nyní ony proudy, které dávají vzniknout magnetickým a elektrickým polím kolem dlouhých vedení. V nezatížených sítích se jedná hlavně o nabíjecí proudy kapacitní. Konstatujeme, že v elektrických sítích nezatížených jsou indukčnost a kapacita větví jedinými spotřebiči energie, v sítích zatížených se jejich spotřeba připočítává k zatížení sítě, pokud se jedná o sítě střídavé. Proto v sítích vvn míváme dokonce zařazeny samostatné zdroje, které dodávají do sítě jedině energii jalovou (kapacitní proudy), která kompensuje jalovou spotřebu velkých transformátorů a jiných spotřebičů indukčního rázu.

V elektrických obvodech je vliv vlastní indukčnosti a kapacity vodičů co

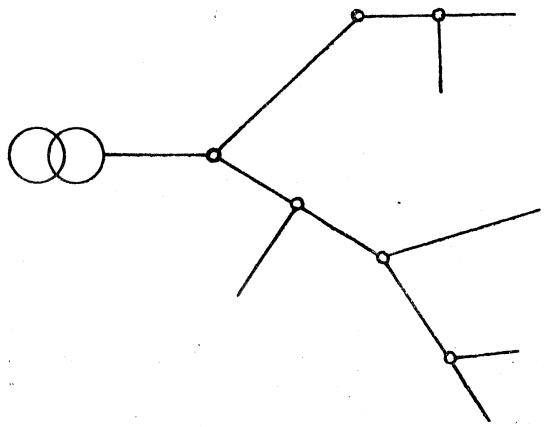
do absolutní hodnoty podstatně menší, neboť se jedná o zcela krátké spoje. Principiální rozdíl je však v tom, že spotřeba těchto polí — magnetického a elektrického — a ovšem i spotřeba činných odporů — se od teoretických



Obr. 7a.

proudů odčítá. Zatížení zdrojů se těmito vlivy (ztrátami) u obvodů nemění, zatímco u sítí se takto zvětšuje.

d) V elektrických obvodech (viz např. obr. 6) mohou se vyskytovat zdroje proudové, které dodávají stálý proud při proměnlivém zatížení. Nebo mohou být zařazeny zdroje napětí, které udržují při proměnném zatížení stálé napětí. Zatížení je representováno odporem větví nebo sériově zapojených spotřebičů. V elektrických střídavých obvodech mohou mít tyto zdroje obecně různé frekvence, nebo alespoň různou fázi.



Obr. 7b.

V elektrických sítích jsou zapojeny vždy zdroje napětí a není možno, aby měly rozdílnou frekvenci nebo fázi. Vznikly by opět nesmírně velké vyrovnávací proudy, které by vedení i stroje zničily.

Jako zdroje jsou míněny v sítích vždy napájecí transformátory. Označíme-li ve schématu vinutí transformátoru jako indukčnost, vidíme, že indukčnost může v elektrickém obvodu býti prvkem pasivním, jde-li o vlastní indukčnost síťové větve (tedy o indukčnost vedení), nebo o indukčnost odběrového transformátoru, ale stává se prvkem aktivním, jde-li o vinutí transformátoru napájecího. V elektrické síti však pokládáme nere-

gulovaný napájecí transformátor za zdroj stálého napětí a jeho celkovou indukčnost označujeme vždy za prvek pasivní, neboť ho pokládáme za indukčnost zvláštní transformátorové větve. Indukčnost obou vinutí napájecího transformátoru přepočítáváme na napětí řešené sítě.

Naproti tomu odběrový transformátor v síti neuvažujeme. Počítáme pouze s jeho zátěžným uzlovým proudem. Podobně i indukčnost napájecího transformátoru, jehož zatížení můžeme regulovat, neuvažujeme, bereme v úvahu jen jeho napájecí proud, který do uzlu dodává.

e) V souvislosti s paralelním zapojením elektrických zdrojů i spotřebičů v sítích mohou schémata elektrických sítí nabývat i zcela jiných tvarů nežli elektrické obvody. Např. sítě paprskové a stromkové není možno řešit jako obvody, neboť jejich schéma netvoří uzavřené smyčky (obr. 7a, 7b). Přes tyto rozdíly je však možno aplikovat metody řešení elektrických obvodů na některé elektrické sítě, neboť je možno je považovat za zvláštní druh pasivních obvodů.

C. Řešení složitého obvodu metodou obvodových proudů a aplikace tohoto řešení na elektrické sítě

a) Fyzikální princip metody

Metoda obvodových proudů spočívá v tom, že celý složitý obvod rozdělíme nejprve podle popsané metody na řadu nezávislých obvodů jednoduchých čili na řadu proudových smyček. Předpokládáme, že v každém jednoduchém obvodu protéká po celé jeho délce — (od zvoleného začátku se vrátíme opět do téhož bodu) — určitý obvodový proud. Jednotlivé větve jsou jednak členy obvodu základního, mohou však současně být i členy některých nezávislých obvodů sousedních.

Na obr. 6 je zakreslen např. nezávislý obvod označený I, vyňatý ze složitého obvodu a skládající se ze 6 větví. Větve 2, 3, 5 a 6 jsou současně začleněny do uzavřených nezávislých obvodů sousedních, označených II, III, V a VI. Proudy v těchto větvích jsou potom algebraickým součtem příslušných obvodových proudů.

$$\begin{aligned} &\text{Proud ve větvi 2 je tedy } I_2 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} \\ &\text{Proud ve větvi 3 je tedy } I_3 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{III}} \\ &\text{Proud ve větvi 5 je tedy } I_5 = I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{V}} \\ &\text{Proud ve větvi 6 je tedy } I_6 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{VI}} \end{aligned} \qquad (1)$$

Pro každý uzel je splněn I. Kirchhoffův zákon. Např. do uzlu a vtéká proud $+I_{\mathrm{I}}$, vytékají proudy $I_{\mathrm{II}} - I_{\mathrm{I}}$ a $-I_{\mathrm{II}}$, neboť proud do uzlu vstupující označujeme jako $+$, proud z uzlu vystupující jako $-$. V algebraickém součtu proudů pro každý uzel vystupují tedy obvodové proudy každý jednou se znaménkem $+$ a jednou se znaménkem $-$.

Vypíšeme nyní pro obvod I, který jsme libovolně vybrali ze složitého schématu, rovnici podle druhého Kirchhoffova zákona:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{I\,I}} I_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{I\,II}}(I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}}) + Z_{\mathrm{I\,III}}(I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{III}}) + Z_{\mathrm{I\,4}} I_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{I\,V}}(I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{V}}) + \\ + Z_{\mathrm{I\,VI}}(I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{VI}}) = U_{\mathrm{I2}} + U_{\mathrm{I4}} - U_{\mathrm{I6}} = U_{\mathrm{I}} \end{aligned} \qquad (2)$$

$I_{\mathrm{I}}, I_{\mathrm{II}}, I_{\mathrm{III}}$ atd. jsou obvodové proudy nezávislých obvodů, Z_{II}, Z_{I4} jsou symboly impedancí, které jsou zapojeny pouze do I. obvodu, $Z_{\mathrm{I\,III}}$, $Z_{\mathrm{I\,III}}$, $Z_{\mathrm{I\,IV}}$ $Z_{\mathrm{I\,V}}$ jsou symboly impedancí, které jsou zapojeny současně do dvou sousedních obvodů, U_{I} je celková elektromotorická síla, která působí v I. obvodě ve zvoleném směru obvodového proudu:

Uspořádáme rovnici (2) podle indexů obvodových proudů:

$$(Z_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{I\,II}} + Z_{\mathrm{I\,III}} + Z_{\mathrm{I4}} + Z_{\mathrm{I\,V}} + Z_{\mathrm{I\,VI}})\, I_{\mathrm{I}} - Z_{\mathrm{I\,II}} I_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{I\,III}} I_{\mathrm{III}} + \\ + Z_{\mathrm{I\,V}} I_{\mathrm{V}} - Z_{\mathrm{I\,VI}} I_{\mathrm{VI}} = U_{\mathrm{I}}$$

Součet $(Z_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{I\,II}} + Z_{\mathrm{I\,III}} + Z_{\mathrm{I4}} + Z_{\mathrm{I\,V}} + Z_{\mathrm{I\,VI}}) = Z_{\mathrm{I}}$. Je to celková impedance nezávislého obvodu (smyčky) I. Pro symboly $Z_{\mathrm{I\,II}}$, $Z_{\mathrm{I\,III}}$ atp. zaveďme tuto konvenci: mají-li proudy obou obvodů stejný směr v určité větvi, budiž znaménko její impedance kladné — např. $Z_{\mathrm{I\,III}}$. Mají-li v určité větvi obrácený směr, např. ve větvi 2, budiž znaménko její impedance $Z_{\mathrm{I\,II}}$ záporné. Touto úpravou však součin $Z_{\mathrm{I\,II}} I_{\mathrm{II}}$ je nyní kladný a podobně i další součiny $Z_{\mathrm{I}x} I_x$.

Rovnice (2) nabude tím formy:

$$Z_{\mathrm{I}} I_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{I\,II}} I_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{I\,III}} I_{\mathrm{III}} + Z_{\mathrm{I\,V}} I_{\mathrm{V}} + Z_{\mathrm{I\,VI}} I_{\mathrm{VI}} = U_{\mathrm{I}}$$

Vypíšeme obdobné rovnice pro všechny nezávislé obvody daného schématu a obdržíme soustavu rovnic tohoto obecného tvaru:

$$\begin{array}{lllll} Z_{\mathrm{I}} I_{\mathrm{I}} & + Z_{\mathrm{III}} I_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{I\,III}} I_{\mathrm{III}} + \ldots + Z_{\mathrm{I}n} I_n & = U_{\mathrm{I}} \\ Z_{\mathrm{II\,I}} I_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{II}} I_{\mathrm{II}} & + Z_{\mathrm{II\,III}} I_{\mathrm{III}} + \ldots + Z_{\mathrm{II}n} I_n & = U_{\mathrm{II}} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ Z_{n\mathrm{I}} I_{\mathrm{I}} & + Z_{n\mathrm{II}} I_{\mathrm{II}} + Z_{n\mathrm{III}} I_{\mathrm{III}} + \ldots & Z_n I_n = U_n \end{array} \qquad (3)$$

kde n je počet nezávislých obvodů.

Soustava má n lineárních nezávislých rovnic pro stejný počet neznámých obvodových proudů. V rovnicích mohou mít ovšem některé členy hodnotu nulovou. Označíme jako $|\,\boldsymbol{D}\,|$ determinant soustavy činitelů Z.

$$|\,\boldsymbol{D}\,| = \begin{vmatrix} Z_{\mathrm{I}} & Z_{\mathrm{I\,II}} & Z_{\mathrm{I\,III}} & \ldots & Z_{\mathrm{I}n} \\ Z_{\mathrm{II\,I}} & Z_{\mathrm{II}} & Z_{\mathrm{II\,III}} & \ldots & Z_{\mathrm{II}n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n\mathrm{I}} & Z_{n\mathrm{II}} & Z_{n\mathrm{III}} & \ldots & Z_n \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Obvodový proud v libovolném x-tém nezávislém obvodě určíme podle Cramerova pravidla takto:

$$I_x = \frac{|\,\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}x}\,|}{|\,\boldsymbol{D}\,|}\, U_1 + \frac{|\,\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}x}\,|}{|\,\boldsymbol{D}\,|}\, U_2 + \ldots \frac{|\,\boldsymbol{D}_{nx}\,|}{|\,\boldsymbol{D}\,|}\, U_n \ldots . \qquad (5)$$

kde $x = 1, 2, 3, \ldots, n$. $|\,\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}x}\,|$, $|\,\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}x}\,|$ atd. jsou algebraické doplňky, příslušné v determinantu $|\,\boldsymbol{D}\,|$ k prvkům $Z_{\mathrm{I}x}, Z_{\mathrm{II}x}$, atd.

Takto určíme všechny obvodové proudy jako veličiny vzájemně nezávislé. Jejich velikost je odvislá v dané síti (při určitých impedancích Z) jedině od

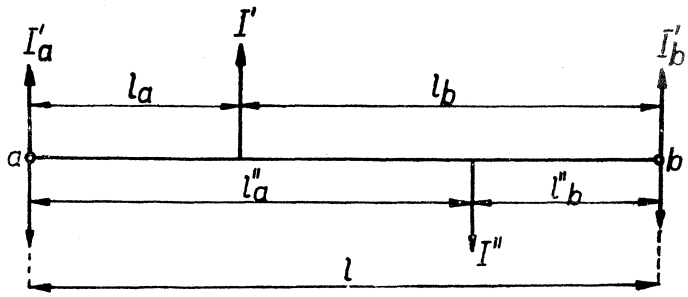
velikosti napětí zařazených zdrojů. Proudy v jednotlivých větvích určíme superposicí proudů obvodových, tj. jejich algebraickým sečítáním v oněch větvích, ve kterých mají společný průběh.

b) Poměry v zatížené síti

Naznačený princip řešení elektrických obvodů je důkladně propracován maticovým počtem v literatuře slaboproudé elektrotechniky. Avšak skutečné použití těchto metod pro řešení obvodů, hlavně však pro řešení sítí, bylo až dosud omezeno hlavně tím, že numerické zpracování matic a determinantů vyšších řádů je velmi obtížné a pracné. Proto aplikace a příklady v literatuře se nakonec omezovaly na obvody ukázkové a jednoduché, jejichž výpočet by býval snadnější některým méně systematickým způsobem a měly cenu hlavně teoretickou.

Pro aplikaci těchto řešení na výpočet složitější elektrické sítě byl u nás v praxi učiněn zatím jediný již citovaný pokus [5], který měl za účel vyzkoušet možnost použití číslicového počítacího stroje pro výpočet determinantů a matic. Všeobecné zásadní vztahy a rozdíly mezi elektrickými obvody a elektrickými sítěmi nebyly při tomto pokusu soustavně studovány, ani určeny.

Chceme-li aplikovat metodu obvodových proudů na řešení skutečných rozvodných sítí, musíme si uvědomit, že jako napájecí zdroje v sítích máme transformátory, které pokládáme za zdroje napětí. Dále je zřejmé, že při obvyklých okolnostech stačí řešit jednu fázi, neboť poměry v ostatních jsou stejné. Konečné odběry z větví zatížené sítě můžeme snadno redukovat do uzlů. uvějme např. ve větvi 1 (obr. 8) proudové odběry I' a I''.



Obr. 8.

Proud I' můžeme rozdělit (redukovat) do uzlů takto: Proudové momenty uzlových složek odebíraných proudů musejí zůstat stejné, jako byly proudové momenty původních odběrových proudů k jednomu i druhému uzlu. Platí tedy $I'l_b = I'_a l$, kde I'_a je uzlová složka v uzlu a, I'_b v uzlu b.

$$I'_a = \frac{I'l'_b}{l} \quad \text{a} \quad I'_b = \frac{I'l'_a}{l}.$$

Podobně můžeme rozdělit do uzlů i proud I''.

$$I''l_b'' = I_a' \,.\, l; \quad I_a'' = \frac{I''l_p}{l} \quad \text{a} \quad I_b'' = \frac{I''l_a''}{l}\,.$$

Odběr proudu v uzlu a, pokud se týká větve 1 je: $I_a = I_a' + I_a''$ obecně ΣI_a^x. V uzlu b je to: $I_b = I_b' + I_b''$ obecně ΣI_b^x.

(6)

Podobně bychom redukovali i proudy, odebírané z ostatních větví a tak obdrželi síť, zatíženou pouze v uzlech, která by byla rovnocenná síti původní.

Na základě tohoto rozboru je zřejmo, že můžeme použít metodu obvodových proudů pouze pro sítě, jejichž

a) schéma tvoří uzavřené obvody (smyčky), tedy nikoli pro sítě paprskové nebo stromkové,

b) proudové zatížení a proudové napájení (transformátory) je soustředěno pouze do uzlů,

c) větve neobsahují žádné sériově zařazené zdroje ani aktivní indukčnosti.

Rovnice (3) by měly za těchto podmínek na pravé straně nulu (není zařazených zdrojů napětí), avšak vlivem procházejících zatěžovacích proudů vznikají úbytky napětí v obvodech a soustava rovnic nabývá tvaru:

$$\begin{aligned}
Z_{\mathrm{I}}I_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{I\,II}}I_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{I\,III}}I_{\mathrm{III}} + \ldots Z_{\mathrm{I}n}I_n &= \Sigma Z_{\mathrm{I}a}I_a + \Sigma Z_{\mathrm{I}b}I_b + \ldots \Sigma Z_{\mathrm{I}x}I_x \\
Z_{\mathrm{II\,I}}I_{\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{II}}I_{\mathrm{II}} + Z_{\mathrm{II\,III}}I_{\mathrm{III}} + \ldots Z_{\mathrm{II}n}I_n &= \Sigma Z_{\mathrm{II}a}I_a + \Sigma Z_{\mathrm{II}b}I_b + \ldots \Sigma Z_{\mathrm{II}x}I_x \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\qquad (7) \\
Z_{n\mathrm{I}}I_{\mathrm{I}} + Z_{n\mathrm{II}}I_{\mathrm{II}} + Z_{n\mathrm{III}}I_{\mathrm{III}} + \ldots Z_nI_n &= \Sigma Z_{na}I_a + \Sigma Z_{nb}I_b + \ldots \Sigma Z_{nx}I_x
\end{aligned}$$

kde I_a až I_x jsou proudy odebírané v uzlech a až x, které protékají sítí od uzlu (nebo uzlů) napájecího až k uzlům odběrovým (obr. 9a, 9b).

$\Sigma Z_{\mathrm{I}a}$ je součet impedancí oněch větví obvodu I, jímž protéká zatěžovací proud uzlu a.

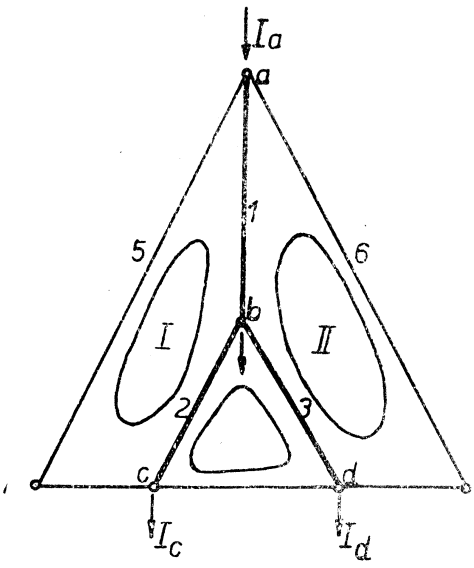
$\Sigma Z_{\mathrm{I}b}$ je součet impedancí oněch větví obvodu I, jimiž protéká zatěžovací proud uzlu b.

Obecně ΣZ_{jx} je součet impedancí oněch větví obvodu j, jimiž protéká zatěžovací proud uzlu x.

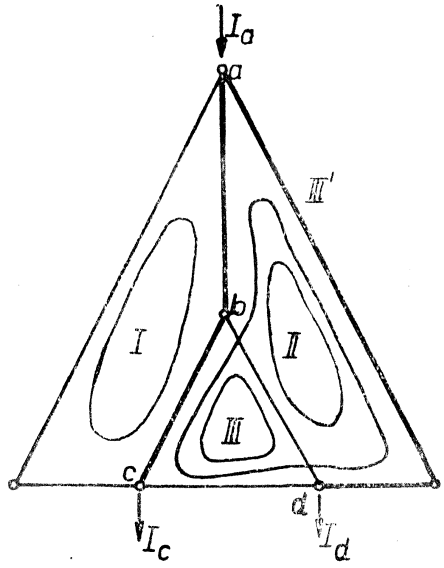
Na pravých stranách rovnic, napsaných podle II. Kirchhoffova zákona pro jednotlivé nezávislé obvody se nyní objevují úbytky napětí, způsobené zatěžujícími proudy. Abychom ze soustavy rovnic mohli eliminovat neznámé obvodové proudy I_{I} až I_n, musí být pravé strany rovnic známy. Jedná se o to, abychom určili trasy jednotlivých uzlových zatěžovacích proudů, jejichž velikosti I_a, I_b, až I_x jsou známy. Proudovými trasami jsou určeny součty impedancí větví Z_{jx} a tím jsou i určeny úbytky napětí, čili pravé strany rovnic. Obvodové proudy jsou lineárně závislé na velikosti proudů zatěžovacích.

Při určování průběhu zatěžovacích proudů od uzlu napájecího až k uzlům odběrovým, vycházíme ze zásady, že proudy v nezávislých obvodech jsou na sobě nezávislé a nesmějí být se žádným jiným proudem superponovány. Naproti tomu proudy ve větvích úplného stromu jsou veličiny závislé, vzniklé

superpozicí proudů obvodových. Proto trasu zatěžovacích uzlových proudů musíme předpokládat podél větví kteréhokoliv stromu, takže proudy v těchto větvích u zatížených sítí jsou výsledkem superpozice jednak proudů nezávislých obvodů, jednak superpozice proudů zátěžných. Naopak, proudy v nezávislých větvích nám vyjdou jednoznačně vyřešením systému rovnic (7) jako prosté obvodové proudy.



Obr. 9a.



Obr. 9b.

Na obr. 9a, 9b jsou nakresleny dva možné stromy a tedy dvě možné trasy zátěžných uzlových proudů. Systém nezávislých obvodů je v každém případě jiný. Výsledek řešení, tj. určení proudů v jednotlivých větvích musí však být v obou případech stejný a proto i proud větve 3, která je v obou případech větví nezávislou, musí být stejný podle obou řešení. Proto i obvodové proudy smyček III a III′ se musí sobě rovnat. Z toho vyplývá, že nezávislé obvody obr. 9a a 9b možno zaměniti. Důsledek této úvahy je, že trasy zatěžovacích uzlových proudů musíme sice vždy volit podle některého úplného stromu, avšak nezávislé obvody nemusí tomuto stromu odpovídat. Volíme z praktických důvodů vždy nezávislé obvody přehledně a připouštíme, aby některé byly ohraničeny i více než jedinou nezávislou větví. Proto např. na obr. 9b bychom raději pracovali s obvodem III nežli s obvodem III′, i když tento přesně odpovídá zvoleným trasám zatěžovacích uzlových proudů.

Napájecí proud uzlu *a* je zřejmě součtem všech proudů v síti odebíraných tedy podle obr. 9a, b $I_a = I_b + I_c + I_d$. Napájecích bodů však může být v síti více, než jeden a proto rozeznáváme různé případy řešení, byť v principu stejných.

c) Stručná rekapitulace maticové algebry

Rekapitulace se omezuje pouze na pojmy a operace, kterých je potřeba pro řešení elektrických sítí v rozsahu této práce.

1. Některé základní pojmy. Maticí se nazývá soubor veličin, sestavený do m řádků a n sloupců. Např. impedance větví v síti, která má m obvodů (smyček) a každý obvod může mít n větví, můžeme sestavit do následující matice:

$$\begin{array}{ll}
Z_{\mathrm{I}1}, Z_{\mathrm{I}2}, Z_{\mathrm{I}3}, \ldots, Z_{\mathrm{I}n} & \text{impedance 1. až } n\text{-té větve I. obvodu} \\
Z_{\mathrm{II}1}, Z_{\mathrm{II}2}, Z_{\mathrm{II}3}, \ldots, Z_{\mathrm{II}n} & \text{impedance 1. až } n\text{-té větve II. obvodu} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\
Z_{m1}, Z_{m2}, Z_{m3}, \ldots, Z_{mn} & \text{impedance 1. až } n\text{-té větve } m\text{-tého obvodu}
\end{array}$$

Jestliže je počet řádků m roven počtu sloupců n, nazývá se taková matice čtvercová. Je-li $m \neq n$, je to matice obdélníková, je-li $n = 1$, je to matice sloupcová, nazývaná také sloupcovým vektorem. Mluvíme o obdélníkové matici typu $(m; n)$, čtvercové typu $(n; n)$ nebo sloupcové typu $(n; 1)$. Z prvků čtvercové matice můžeme vypočítat její determinant.

Prvky $Z_{\mathrm{I}1}$, $Z_{\mathrm{II}2}$ atd. až $Z_{\ldots}$, které leží v diagonále čtvercové matice, jsou prvky hlavní. Jsou-li ostatní prvky kolem diagonály uspořádány souměrně, mluvíme o matici souměrné. Některé prvky matic mohou být ovšem nulové. Matice, která má prvky mimo hlavní diagonálu vesměs nulové, nazývá se maticí diagonální.

Např.: Matice obdélníková typu (3; 4)

$$\boldsymbol{Z} = \begin{Vmatrix} Z_{\mathrm{I}1} & Z_{\mathrm{I}2} & Z_{\mathrm{I}3} & Z_{\mathrm{I}4} \\ Z_{\mathrm{II}1} & Z_{\mathrm{II}2} & Z_{\mathrm{II}3} & Z_{\mathrm{II}4} \\ Z_{\mathrm{III}1} & Z_{\mathrm{III}2} & Z_{\mathrm{III}3} & Z_{\mathrm{III}4} \end{Vmatrix}$$

Matice čtvercová, souměrná typu (3; 3)

$$\boldsymbol{Z}' = \begin{Vmatrix} Z_{\mathrm{I}1} & 0 & Z_{\mathrm{I}3} \\ 0 & Z_{\mathrm{II}2} & 0 \\ Z_{\mathrm{III}1} & 0 & Z_{\mathrm{III}3} \end{Vmatrix}, \text{ kde } Z_{\mathrm{I}3} = Z_{\mathrm{III}1}.$$

Matice sloupcová (sloupcový vektor) typu (4; 1)

$$\boldsymbol{I} = \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{Vmatrix}$$

Každé čtvercové matici přísluší determinant z jejich prvků, zvaný determinant matice. Tento determinant má určitou hodnotu, je to jednoznačně určené číslo. Naproti tomu matice není číslo, nemá hodnotu, nýbrž je to symbol pro celý soubor prvků, uspořádaných určitým způsobem.

Kromě pojmu determinant matice musíme si ujasnit i pojem determinantu h-tého stupně určité matice. Je to determinant sestavený z oněch prvků matice, které tvoří h libovolně vybraných sloupců a h libovolně vybraných řádků. Vůči determinantu matice je to jeho subdeterminant čili minor, neboť některé sloupce a řádky jeho jsme vynechali.

Říkáme, že matice A typu (m, n) má hodnost h, jestliže všechny její determinanty stupně vyššího než h jsou rovny nule, avšak existuje alespoň jeden determinant h-tého stupně, který není roven nule.

Matice incidenční určují nebo vyjadřují v našich úvahách např. skutečnost, že impedance určitých větví náleží do uvažovaného obvodu. V jiném případě zase incidenční matice stanoví, které obvodové proudy, nebo které zátěžné proudy se překládají (superponují) v určité větvi. Pojem incidence je ovšem široký a je převzat z geometrie. Říkáme, že dva geometrické útvary jsou incidentní, jestliže jeden z nich obsahuje v sobě druhý útvar úplně, nebo z části. Jestliže např. přímka zahrnuje v sobě několik samostatných bodů, říkáme, že tyto body jsou s ní incidentní.

Např. síť podle obr. 10 má 6 větví a 3 nezávislé obvody, jejichž proudy jsou předběžně orientovány. Chceme-li vyjádřit incidenční maticí, že větve 1, 2 a 5 náleží do obvodu I, větve 1, 4 a 6 do obvodu II a větve 2, 3 a 4 do obvodu III, sestavíme ji takto:

Větve	I.	II.	III. obvody
1.	+1	+1	0
2.	+1	0	−1
3.	0	0	+1
4.	0	+1	+1
5.	+1	0	0
6.	0	+1	0

Znaménko — u některých větví je podle konvence, kterou jsme vysvětlili na str. 95 – 96 a která platí i pro všechny incidenční matice. Jestliže chceme naopak vyjádřit, ve kterých větvích se obvodové proudy I_{I}, I_{II} a I_{III} vzájemně skládají, sestavíme incidenční matici proudů ve větvích:

Obvody	1.	2.	3.	4.	5.	6. větve
I.	+1	+1	0	0	+1	0
II.	+1	0	0	+1	0	+1
III.	0	−1	+1	+1	0	0

Ze druhé incidenční matice je např. zřejmé, že ve větvi 1 se obvodové proudy I_{I} a I_{II} sečítají, ve větvi 2 se obvodový proud I_{III} odčítá od obvodového proudu I_{I} atp.

Prvky incidenčních matic nejsou však přímo proudy větví I_1 až I_6, nebo obvodové proudy I_{I} až I_{III}, ale pouze koeficienty, kterými tyto proudy násobíme. Jde-li proud větve ve směru orientace obvodu, násobíme koeficientem +1, jde-li naopak, koef. −1 a nepřísluší-li větev do tohoto obvodu, je koef. = 0 (nepíše se). Podobně, jdou-li obvodové proudy v některé větvi souhlasně, je koef. +1, nesouhlasně −1 a neprochází-li některý obvodový proud určitou větví, je to opět 0. Z toho vyplývá, že prvky incidenčních matic mohou být pouze +1, −1 a 0.

2. *Některé základní operace.* Při řešení našich úloh přichází často transponování matic. Při tomto úkonu zaměňujeme řádky za sloupce a naopak: např. z matice $\mathbf{C}$ vznikne transponovaná matice ${}^{T}\mathbf{C}$ takto:

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{Vmatrix} \qquad {}^{T}\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{Vmatrix}$$

Transponování matic má nejen matematický, ale i fyzikální význam: jestliže např. transponujeme matici incidenční, která určuje, které větve tvoří jednotlivé obvody, získáme incidenční matici, která určuje, které obvodové proudy se v jednotlivých větvích skládají. Podobně je tomu i v jiných případech.

Matice sečítáme tak, že každý prvek součtové matice je roven součtu příslušných prvků matic původních. Podobně každý prvek rozdílové matice je roven rozdílu příslušných prvků matic původních.

Násobíme-li matice mezi sebou, rozeznáváme násobení zprava a zleva. Násobíme-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, násobíme matici $\boldsymbol{A}$ maticí $\boldsymbol{B}$ zprava, nebo matici $\boldsymbol{B}$ násobíme maticí $\boldsymbol{A}$ zleva. Násobení není obecně úkonem záměnným, tzn., že $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Součin libovolné matice s maticí k ní transponovanou je vždy matice souměrná. Aby dvě matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ byly násobitelné, musí mít matice $\boldsymbol{B}$ tolik řádků, kolik má matice $\boldsymbol{A}$ sloupců. Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu $(m; n)$, musí být matice $\boldsymbol{B}$ typu $(n; p)$ a jejich součin, tj. matice $\boldsymbol{C}$ je typu $(m; p)$. Každý obecný prvek c_{xy} výsledné matice $\boldsymbol{C}$ vznikne jako součet součinů prvků x-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a prvků y-tého sloupce matice $\boldsymbol{B}$. Je tedy $c_{xy} = (a_{x1}b_{1y} + a_{x2}b_{2y} + a_{x3}b_{3y} + \ldots + a_{xn}b_{ny}$.

Matici násobíme nebo dělíme určitým číslem, jestliže tímto číslem násobíme nebo dělíme všechny její prvky. Takové číslo můžeme naopak vytknout jako násobitele nebo dělitele před matici. Pro násobení platí dále zákon asotiativní:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{ABC}$$

a zákony distributivní:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$$

3. *Inverse matic.* Čtvercová matice $\boldsymbol{Z}$, pro kterou platí podmínka, že $\boldsymbol{ZA} = \boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}$ jednotková matice, nazývá se maticí inversní k matici $\boldsymbol{A}$; píšeme $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Inverse obecných matic je operace velice pracná. V naší praxi budeme invertovat matice čtvercové. Inverse matice diagonální je jednoduchá, neboť platí pouze, že musíme v inversní matici vepsat do diagonály převrácené hodnoty původních prvků

$$\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{Vmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{11}} \end{Vmatrix}$$

Inversní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k regulární čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ je určena vztahem: $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}$, kde $|\boldsymbol{A}|$ je determinant původní matice $\boldsymbol{A}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}$ je matice adjungovaná k matici $\boldsymbol{A}$.

Matice adjungovaná má prvky $\tilde{a}_{xy}$, které jsou doplňky prvků a_{yx} v determinantu původní matice. Proto adjungovanou matici nejlépe sestavíme tak, že původní matici nejprve transponujeme, avšak potom místo prvků vepisujeme jejich doplňky v determinantu této transponované matice. Doplněk určitého prvku a_{xy} v determinantu je jeho subdeterminant čili minor, který vznikl vynecháním x-tého řádku a y-tého sloupce, avšak násobený ještě činitelem $(-1)^{x+y}$.

Pro matice třetího řádu je schéma determinantu i matice adjungované toto:
Schéma determinantu: (Sarrusovo pravidlo)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{array}{llll} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ - & & & \\ - & & & \end{array} \quad +$$

Schéma adjungované matice:

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} a_{22}a_{33} - a_{33}a_{23} & -a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13} & a_{21}a_{32} - a_{32}a_{22} \\ -a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} & -a_{11}a_{22} + a_{31}a_{12} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{Vmatrix}$$

Jiné operace maticové algebry přicházejí při našich studiích jen výjimečně. Důkladnější poučení nutno hledat ovšem v odborné matematické literatuře.

d) Aplikace maticového počtu na jednotlivé případy

Předpokládáme, že zauzlená síť má m větví a q uzlů a $n = m - q + 1$ nezávislých obvodů. Proudy ve větvích obdržíme superposicí proudů obvodových a proudů zátěžných. Maticové vyjádření tohoto vztahu je

$$\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 + \boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{I}_v$ je sloupcová matice čili vektor proudů ve větvích typu $(m, 1)$,
$\boldsymbol{I}_0$ je sloupcová matice (vektor) proudů v obvodech typu $(n, 1)$,
$\boldsymbol{I}_z$ je sloupcová matice (vektor) zátěžných proudů v uzlech typu $(q - 1,1)$, neboť proud posledního uzlu napájecího je součtem uzlů odběrných,
$\boldsymbol{C}$ je incidenční matice obvodových proudů, která určuje způsob jejich superposice ve větvích sítě. Je to matice typu (m, n),
$\boldsymbol{C}_z$ je incidenční matice zatěžovacích proudů, která určuje jejich superposici ve větvích stromu s proudy obvodovými. Je to matice typu $(m, q - 1)$.

Maticové vyjádření rovnic (3), platných pro elektrické obvody je:

$$^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_0 = \boldsymbol{U}, \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{U}$ je sloupcová matice (vektor) obvodových napětí typu $(n, 1)$. Platí o nich dále, že $\boldsymbol{U} = {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}_{z}$

$\boldsymbol{U}_{z}$ je sloupcová matice (vektor) napětí zdrojů ve větvích typu (m, 1)

${}^{T}\boldsymbol{C}$ je transponovaná matice $\boldsymbol{C}$ typu (n, m), která určuje příslušnost větví k jednotlivým obvodům,

$\boldsymbol{Z}$ je diagonální matice impedancí větví typu (m, m). Předpokládáme, že větve navzájem nepůsobí ani indukčně, ani jinak.

Maticové vyjádření rovnic (7), platných pro elektrické sítě:

$$ {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_{0} = {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} \tag{10} $$

Z této rovnice můžeme vyjádřit vektor obvodových proudů

$$ \boldsymbol{I}_{0} = ({}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1\,T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} = \boldsymbol{Z}^{-1\,T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} \tag{11} $$

Dosadíme do rovnice (8) a obdržíme vektor proudů ve větvích:

$$ \boldsymbol{I}_{z} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_{0} + \boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} = \boldsymbol{C}({}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1\,T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} + \boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} \tag{12} $$

Tím je řešení provedeno. Proudy ve větvích získáme také přímo z (11) příslušným superponováním.

Ve sloupcové matici obvodových proudů $\boldsymbol{I}_{0}$ nebo v matici proudů ve větvích $\boldsymbol{I}_{z}$ se mohou jednotlivé proudy vyskytnout s označením —. Obvodové proudy, které mají toto označení v matici $\boldsymbol{I}_{0}$ podle (11), mají zřejmě obrácený směr, nežli jsme při orientaci smyček původně předpokládali a musíme tedy jejich orientaci dodatečně opravit.

Podle této opravené orientace obvodových proudů ve smyčkách je nutno sestavit teprve incidenční matici zatěžovacích proudů $\boldsymbol{C}_{z}$ ve (12).

Ty proudy ve větvích, které vznikly superposicí proudů obvodových nebo zátěžných a které mají záporné označení v matici $\boldsymbol{I}_{z}$ podle (12), mají obrácený směr, nežli příslušný obvodový proud podle opravené orientace. Proudy v nezávislých větvích mají ovšem vždy směr podle opravené orientace svého obvodového proudu a jejich znaménka jsou v obou případech, tj. v obou sloupcových maticích (11) a (12) stejná.

V části literatury [5] se traduje jiná formulace uvedených rovnic. Např. (10) se uvádí takto:

$$ {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_{0} = -{}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z}\boldsymbol{I}_{z} \tag{10a} $$

Je to proto, že se vycházelo ze základní rovnice, platné pro elektrické obvody, kde platí vztah: ${}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_{0} = \boldsymbol{U}_{0} - {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_{z}$. Poněvadž v sítích je vektor $\boldsymbol{U}_{0} = 0$, potom zůstává ${}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_{0} = -{}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z} \,.\, \boldsymbol{I}_{z}$ a implicitní vyjádření tohoto vztahu je:

$$ {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_{0} + {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z} \,.\, \boldsymbol{I}_{z} = 0. $$

Je však nutno si uvědomit, že znaménko + v tomto posledním vztahu má pouze symbolický význam algebraického součtu. Je zřejmé, že oba členy rovnice se vzájemně ruší a proto musí být mezi nimi aritmetický rozdíl, čili znaménko —. Matematicky přesný tvar této rovnice je ${}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_{0} - {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{z} \,.\, \boldsymbol{I}_{z} = 0$ čili rovnice (10).

Úbytky napětí ve větvích, způsobené obvodovými proudy a úbytky, způsobené zátěžnými proudy, jsou ovšem časové vektory, jejichž směr je nejčastěji opačný (může býti i totožný), avšak na to je vzat zřetel v incidenčních maticích. Proto v (10) můžeme oba členy již prostě aritmeticky odčítat.

Dalším postupem z nesprávného předpokladu, interpretovaného rovnicí (10a), dostáváme zásadně obrácenou orientaci obvodových proudů a nesprávné výsledky, neboť
rovnice (11) přejde do tvaru:

$$\boldsymbol{I}_0 = -({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1} \,.\, \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z \quad \text{(11a)}$$

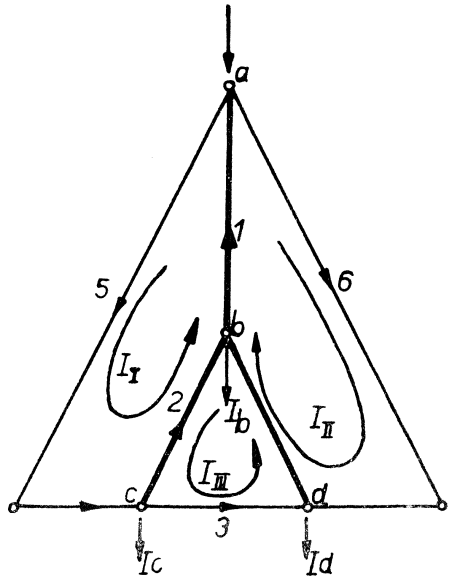
a rovnice (12) do tvaru:

$$\boldsymbol{I}_v = -\boldsymbol{C}({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1} \,.\, {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z + \boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z \quad \text{(12a)}$$

Správný vztah ${}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} \,.\, \boldsymbol{I}_0 = {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z$ odpovídá také rovnicím (7), které vyjadřují fyzikální podstatu věci. Proto jsme se přidrželi formulace podle rovnic (10), (11) a (12).

α) Síť napájená v jednom uzlu.

Na obr. 10 je již známé schéma sítě, napájené v jediném uzlu. Má $m = 6$ větví, $q = 4$ uzly a $n = 6 - 4 + 1 = 3$ nezávislé obvody. Napájecí je uzel a, v uzlech b, c, a d se odebírají proudy I_b, I_c a I_d, jejichž předpokládané dráhy jsou naznačeny. Napájecí proud $I_a = I_b + I_c + I_d$ je odebírán z jediného transformátoru. Orientujeme nejdříve proudy v nezávislých větvích a podle nich proudy smyčkové. Proudy ve větvích se skládají a překládají takto:



Obr. 10.

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{II}} - I_b & I_4 &= +I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}} \\ I_2 &= I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{III}} & I_5 &= I_{\mathrm{I}} + I_c \\ I_3 &= I_{\mathrm{III}} & I_6 &= I_{\mathrm{II}} + I_d \end{aligned} \quad (13)$$

Tuto soustavu rovnic vyjádříme v maticovém tvaru podle rovnice (8) takto: $\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 + \boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z$. Incidenční matice se sestaví pomocí obr. 10. S přihlédnutím k orientaci proudů ve větvích a k orientaci proudů v obvodech budou to matice:

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_z = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} \qquad \boldsymbol{I}_v = \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{Vmatrix}$$

$$\boldsymbol{I}_0 = \begin{Vmatrix} I_{\mathrm{I}} \\ I_{\mathrm{II}} \\ I_{\mathrm{III}} \end{Vmatrix} \qquad I_z = \begin{Vmatrix} I_b \\ I_c \\ I_d \end{Vmatrix}$$

Poněvadž zátěžné proudy jsou dány, je znám celý vektor $\boldsymbol{I}_z$, kdežto vektory $\boldsymbol{I}_0$ a $\boldsymbol{I}_v$ hledáme. V sítích nejsou zapojeny sériově žádné zdroje napětí a proto vektory napětí ve větvích U_v i vektory napětí v obvodech U_0 jsou rovny nule. Pokud se týká úbytků napětí ve větvích, musí se rovněž ve svém souhrnu rovnati nule, což vyjádříme maticovou rovnicí

$$^{T}\boldsymbol{CZC} \,.\, \boldsymbol{I}_0 + {}^{T}\boldsymbol{CZC}_z\boldsymbol{I}_z = 0 \qquad \text{neboli} \qquad {}^{T}\boldsymbol{CZC} \,.\, \boldsymbol{I}_0 = -{}^{T}\boldsymbol{CZC}_z\boldsymbol{I}_z,$$

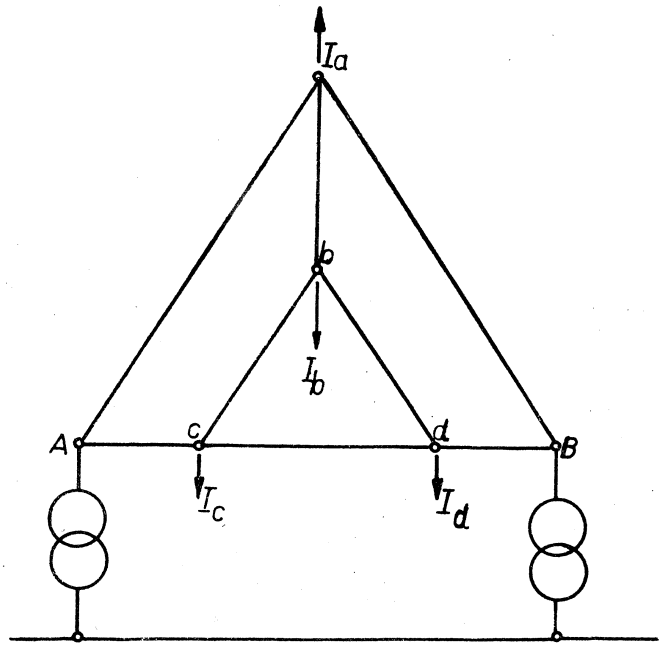
což je rovnice (10), kde

$$\boldsymbol{Z} = \begin{Vmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{Z}_0 = \begin{Vmatrix} Z_5 + Z_2 + Z_1 & Z_1 & -Z_2 \\ Z_1 & Z_6 + Z_4 + Z_1 & Z_4 \\ -Z_2 & Z_4 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{Vmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{Z}_0 = {}^{T}\boldsymbol{CZC}$ je souměrná.

Z_1 až Z_6 jsou komplexní střídavé odpory čili impedance větví 1 až 6. Matice $\boldsymbol{Z}_0$ obsahuje prvky, které odpovídají činitelům na levé straně rovnic (3) a (7). Např. činitel Z_1 první z těchto rovnic odpovídá součtu $Z_5 + Z_2 + Z_1$, činitel



Obr. 11.

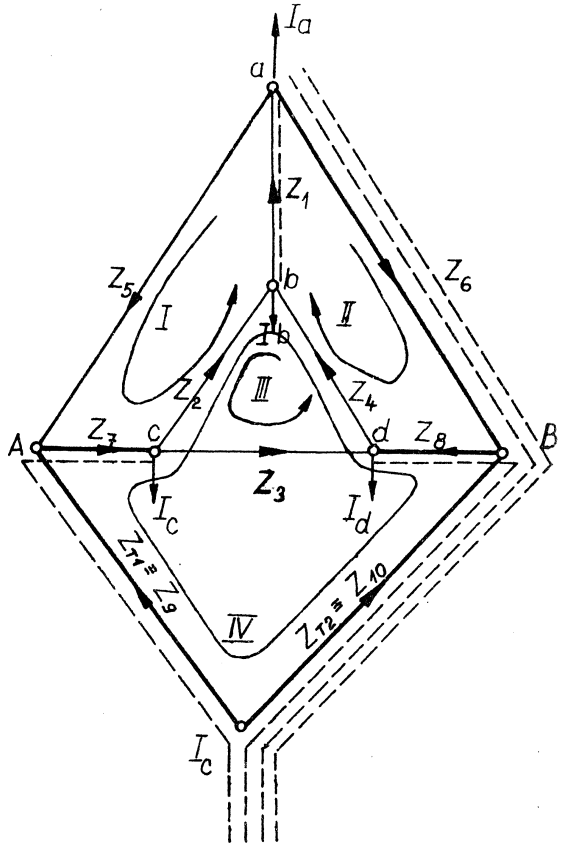
$Z_{I\,II} = Z_1$, činitel $Z_{I\,III} = -Z_2$. Podobně sobě odpovídají činitelé a prvky i druhého a třetího řádku. Mohli bychom tuto matici vypsat přímo buďto z rovnic (7), nebo ze schématu sítě (obr. 10) což je často postup kratší a výhodnější, nežli systematický postup maticovým počtem.

Proudy ve větvích určíme podle rovnice (11). Matici $\boldsymbol{Z}_0$ musíme převést na matici inversní $\boldsymbol{Z}_0^{-1}$, což je nejpracnější operace výpočtu. Invertujeme po dosazení numerických hodnot. Proudy ve větvích můžeme obdržet buďto superposicí podle rovnic (13), nebo maticovým počtem podle rov. (12).

Kdyby uzel a byl nejen uzlem napájecím, ale současně odběrovým, nic by se na postupu nezměnilo, pouze napájecí proud I_a by se zvětšil o odběrový proud I'_a, který však neprochází žádnou větví. Řešení tohoto případu jako sítě liší se od řešení topologicky totožného obvodu pouze tím, že vektory $\boldsymbol{U}_n$ a $\boldsymbol{U}_0$ se rovnají nule, což u obvodů, kde proudy jsou důsledkem zapojení zdrojů, není možné.

Incidenční matice $\boldsymbol{C}_n$ se musí opravit tehdy, jestliže obvodové proudy v matici $\boldsymbol{I}_0$ nesouhlasí s navrženou orientací (některý má znaménko —).

β) Síť napájená v několika uzlech o neregulovaném zatížení.



Obr. 12.

Mějme nyní schéma sítě podle obr. 11 — je to tatáž síť jako v předchozím případě, avšak napájená dvěma transformátory v uzlech A, B. V uzlech a, b, c, d jsou odebírány proudy. Zatížení transformátorů neregulujeme, je obecně různé a záleží na tvaru sítě, na odebíraných proudech a na napětí transformátorů na krátko. Tuto síť musíme řešit podle náhradního schématu na obr. 12. Z_{T1}, Z_{T2} jsou náhradní impedance transformátorů, přepočtené na napětí řešené sítě. Síť podle obr. 12 je napájena v jediném bodě C a napájecí proud $I_c = I_a + I_b + I_c + I_d$. Náhradní schéma je složitější než původní síť, má v našem případě o jeden obvod více. Orientace obvodů a předpokládané dráhy zátěžných proudů jsou zvoleny. Silně vytažené větve tvoří úplný strom, slabě jsou zakresleny nezávislé větve. Nezávislé obvody jsou smyčky hlavní.

Mechanika určení proudů ve větvích maticovým počtem je stejná jako dříve. Vycházíme opět z rovnice (8) a sestavíme příslušné matice podle obr. 12. Počet větví je 10, jejich impedance jsou Z_1 až Z_{10}, při čemž $Z_9 = Z_{T1}$, $Z_{10} = Z_{T2}$.
Proudy ve větvích jsou složeny takto:

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{II}} + I_b \\
I_2 &= I_{\mathrm{I}} + I_{\mathrm{III}} - I_{\mathrm{IV}} \\
I_3 &= I_{\mathrm{III}} \\
I_4 &= I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}} + I_{\mathrm{IV}} \\
I_5 &= I_{\mathrm{I}} \\
I_6 &= I_{\mathrm{II}} - I_a - I_b \\
I_7 &= I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{IV}} + I_c \\
I_8 &= I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{IV}} + I_d \\
I_9 &= I_{\mathrm{IV}} - I_c \\
I_{10} &= I_{\mathrm{IV}} + I_a + I_b + I_d
\end{aligned}$$

Tedy

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}_z = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & +1 \end{Vmatrix}.$$

Vektor proudů obvodových je sloupcová matice $\boldsymbol{I}_0$, vektor proudů odebíraných v uzlech (zátěžných) sloupcová matice $\boldsymbol{I}_z$ a vektor proudů ve větvích sloupcová matice $\boldsymbol{I}_v$. Výsledek řešení, tj. vektor proudů ve větvích, obdržíme dosazením příslušných matic do rovnice (12). Matice impedancí ve větvích je čtvercová matice $\boldsymbol{Z}$, matice impedancí obvodových $\boldsymbol{Z}_0$ je rovněž čtvercová.

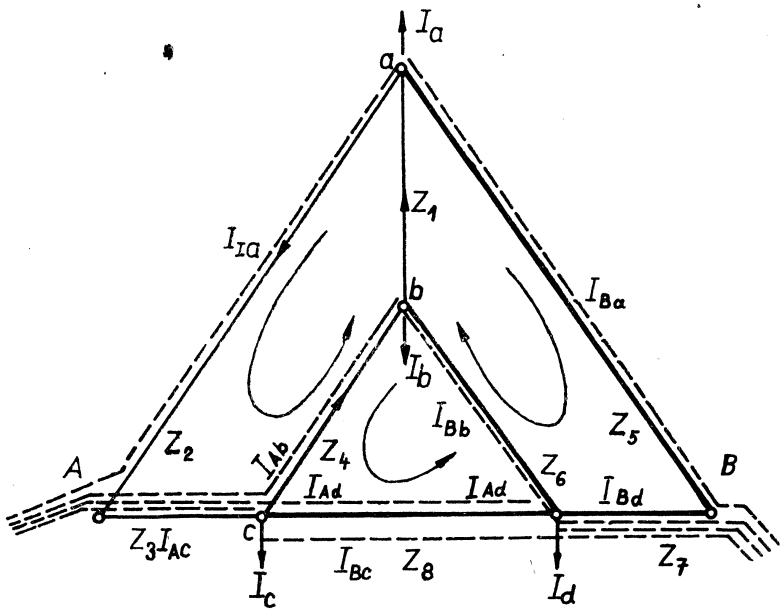
$$\boldsymbol{I}_v = \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{Z} = \begin{Vmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{10} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_0 = \begin{Vmatrix} I_{\mathrm{I}} \\ I_{\mathrm{II}} \\ I_{\mathrm{III}} \\ I_{\mathrm{IV}} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_z = \begin{Vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{Z}_0 = \begin{Vmatrix} Z_5 + Z_7 + Z_2 + Z_1 & Z_1 & -Z_2 & -Z_2 - Z_7 \\ Z_1 & Z_6 + Z_8 + Z_4 + Z_1 & Z_4 & Z_4 + Z_8 \\ -Z_2 & Z_4 & Z_2 + Z_3 + Z_4 & Z_4 - Z_2 \\ -Z_2 - Z_7 & Z_4 + Z_8 & Z_4 - Z_2 & Z_2 + Z_7 + Z_9 + Z_{10} + Z_8 \end{Vmatrix}.$$

Matice obvodových impedancí $\boldsymbol{Z}_0 = {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}$. Nejobtížnější matematickou operací je právě inverse této matice (v našem případě čtvrtého řádu), která se provádí obvykle po dosazení numerických hodnot.

Proudy I_9 a I_{10} určují zatížení napájecích transformátorů T_{r1} a T_{r2}, ostatní jsou proudy jednotlivých větví, čili jednotlivých vedení sítě.

Všechny veličiny mohou být komplexní. Na základě známých impedancí (komplexních odporů větví) a na základě známých zatěžovacích proudů vyjdou i proudy větví jako komplexní hodnoty, takže známe jejich činné i jalové složky. Touto metodou je řešen zatím jediný příklad v naší literatuře [5] pomocí číslicového počítacího stroje. Čím více je napájecích transformátorů, tím se stává náhradní schéma sítě složitější, neboť přibývají další obvody.



Obr. 13.

γ) Síť napájená v několika uzlech při regulovaném zatížení napáječů. Kdyby oba transformátory napájecí v síti podle obr. 10 udržovaly stejné proudové zatížení — např. pomocí automatické regulace napětí — tak, že by oba přebíraly vždy 1/2 zatížení, bylo by náhradní schéma sítě podle obr. 13. Případ je řešitelný pouze za předpokladu, že oba napájecí proudy v uzlech jsou známy. Tento předpoklad je splněn tehdy, známe-li poměr, ve kterém se podílejí oba napaječe na krytí celkového proudového odběru.

Nyní má síť $q = 6$ uzlů, $m = 8$ větví a $n = m - q + 1 = 3$ nezávislé obvody. Je tedy proti dřívějšímu případu jednodušší. Předpokládáme, že všechny odběry jsou napájeny stejným dílem jak z napaječe A, tak i napaječe B. Dráhy napájecích proudů sledují opět větve úplného stromu a jsou

na obr. 13 zakresleny. Případ je vlastně superposicí dvou případů stati O_χ . C_χ. Platí:

$$I_a = I_{Aa} + I_{Ba}, I_b = I_{Ab} + I_{Bb}, \quad I_c = I_{Ac} + I_{Bc}, \quad I_d = I_{Ad} + I_{Bd}$$
$$I_A + I_B = I_a + I_b + I_c + I_d$$

Proudy ve větvích jsou určeny jednak superposicí proudů obvodových a dále napájecích proudů z transformátoru A a napájecích proudů z transformátoru B. Složení těchto proudů určují tyto rovnice:

$I_1 = I_\mathrm{I} + I_\mathrm{II}$
$I_2 = I_\mathrm{I} - I_{Aa}$
$I_3 = I_\mathrm{I} + I_{Ab} + I_{Ac} + I_{Ad}$
$I_4 = I_\mathrm{I} - I_\mathrm{III} + I_{Ab}$
$I_5 = I_\mathrm{II} - I_{Ba}$
$I_6 = I_\mathrm{II} + I_\mathrm{III} + I_{Bb}$
$I_7 = I_\mathrm{II} + I_{Bb} + I_{Bc} + I_{Bd}$
$I_8 = I_\mathrm{III} + I_{Ad} - I_{Bc}$

Je zřejmé, že nyní budeme potřebovat incidenční matice 3: jednu pro proudy obvodové, druhou pro proudy, tekoucí z uzlu A, třetí pro proudy, tekoucí z uzlu B.

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C}_{ZA} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{ZB} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8 \end{Vmatrix}.$$

Výraz ${}^T\mathbf{CZC} = \mathbf{Z}_0$ je opět maticí impedancí obvodů (rov. 4 a 7). Vektory proudů obvodových, proudů ve větvích a proudů odebíraných v uzlech jsou sloupcové matice. Vektor proudů zátěžných je ve všech svých členech znám.

$$Z_0 = \begin{Vmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 & Z_1 & -Z_4 \\ Z_1 & Z_1 + Z_5 + Z_7 + Z_6 & Z_6 \\ -Z_4 & Z_6 & Z_4 + Z_8 + Z_6 \end{Vmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_z = \begin{Vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_0 = \begin{Vmatrix} I_{\mathrm{I}} \\ I_{\mathrm{II}} \\ I_{\mathrm{III}} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}_v = \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{Vmatrix}.$$

Rovnice (8) nabude nyní tvaru:

$$\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 + \boldsymbol{C}_{ZA}\boldsymbol{I}_{Ax} + \boldsymbol{C}_{ZB}\boldsymbol{I}_{Bx} \tag{13}$$

Rovnice (9) zůstává v platnosti, dosazením z (13) obdržíme:

$${}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 = {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA}\boldsymbol{I}_{Ax} + {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB}\boldsymbol{I}_{Bx} = 0 \tag{14}$$

ve formě explicitní:

$${}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 = ({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA}\boldsymbol{I}_{Ax} + {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB}\boldsymbol{I}_{Bx}) \tag{15}$$

Abychom tuto rovnici, která obsahuje 3 neznámé vektory $\boldsymbol{I}_0$, $\boldsymbol{I}_{Ax}$ a $\boldsymbol{I}_{Bx}$ mohli řešit, musíme učinit předpoklad, že $\boldsymbol{I}_{Ax} = \boldsymbol{I}_{Bx} = {}^1/_2\boldsymbol{I}_Z$. To je možné neboť rov. (15) musí platit pro jakékoliv $\boldsymbol{I}_{Ax}$ a $\boldsymbol{I}_{Bx}$. Tím redukujeme počet neznámých vektorů na $\boldsymbol{I}_0$ a obdržíme pro něj lineární rovnici:

$${}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 = \left({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2}\right) \tag{16}$$

Odtud je

$$\boldsymbol{I}_0 = ({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1}\left({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2}\right) \tag{17}$$

Proudy ve větvích:

$$\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{C}\boldsymbol{I}_0 + \boldsymbol{C}_{ZA}\boldsymbol{I}_{Ax} + \boldsymbol{C}_{ZB}\boldsymbol{I}_{Bx} =$$

$$= \boldsymbol{C}({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1}({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA} + {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB})\frac{\boldsymbol{I}_z}{2} + (\boldsymbol{C}_{ZA} + \boldsymbol{C}_{ZB})\frac{\boldsymbol{I}_z}{2} \tag{17}$$

kde ${}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}$ je opět matice $\boldsymbol{Z}_0$, tj. maticei mpedancí obvodů. Tuto matici můžeme snadno psáti přímo ze schématu sítě.

Zatížení napájecích transformátorů A, B je dáno součtem proudů, které tekou ve větvích, ústících do těchto napájecích bodů. Tedy ztížení $A = I_2 + I_3$, zatížení $B = I_5 + I_7 = \dfrac{\Sigma \mathrm{Ix}}{2}$.

Úplně obdobně by se řešila síť zatížená v uzlech a napájená více transformátory o známém proudovém zatížení. Např. kdyby se jednalo o 3 napáječe, změnil by se vzorec (17) na

$$\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{C}({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C})^{-1}({}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA} + {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB} + {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZC})\frac{\boldsymbol{I}_z}{3} +$$

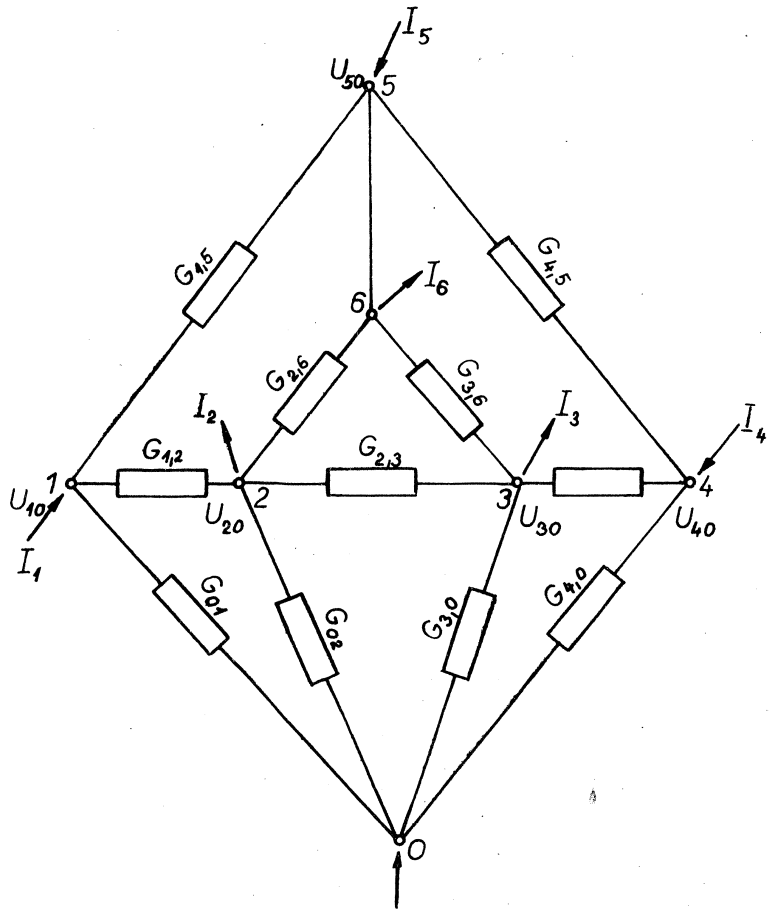
$$+ (\boldsymbol{C}_{ZA} + \boldsymbol{C}_{ZB} + \boldsymbol{C}_{ZC})\frac{\boldsymbol{I}_z}{3} \tag{18}$$

za předpokladu, že každý napáječ dodává do sítě ${}^1/_3$ celkového odběru proudového.

D. Řešení složitého obvodu metodou uzlových napětí a obdoba tohoto věšení u elektrických sítí

a) Fyzikální princip metody

Předpokládejme nejprve, že u obvodu nakresleného na obr. 14 známe napětí všech uzlů. Uzel O je uzel referenční, jehož potenciál je nulový. U_{10}, U_{20}, obecně U_{j0} jsou potenciály jednotlivých uzlů proti uzlu referenčnímu. Mezi



Obr. 14.

uzly je napětí, určené jejich potenciálnými rozdíly. Např. $U_{10} - U_{20}$ je napětí mezi uzly 1 a 2 a proud v této větvi je podle Ohmova zákona $I_{12} = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_{12}} = (U_{10} - U_{20})\, G_{12}$, kde G_{12} je vodivost této větve. Kdyby ve větvi obvodu

byl zdroj napětí, převedli bychom ho na zdroj proudu, který by do uzlů dodával proud.

V elektrických sítích nejsou ve větvích zdroje napětí, které bychom museli převádět na zdroje proudu. Do některých uzlů proud přitéká z napájecích transformátorů, z jiných uzlů je proud odebírán do spotřebičů. Nemusíme tedy dělat žádné úpravy, vyjma redukci zatěžovacích proudů, které jsou eventuálně odebírány podél větví, do uzlů.

Metoda spočívá v tom, že nejprve vypíšeme pro všechny uzly sítě rovnice podle I. Kirchhoffova zákona. Předpokládejme obecně, že v síti je $q + 1$ uzel, můžeme tedy vypsat q nezávislých rovnic, neboť pro poslední uzel by již rovnice nebyla nezávislá. Všechny proudy, které by se v ní objevily, byly by vypsány již po druhé, není již žádného nového proudu.

Rovnice fyzikálně znamenají, že algebraický součet proudů, které do kteréhokoliv uzlu přitékají větvemi do něho ústícími, je roven proudu, který se z uzlu odebírá, tj. proudu zátěžnému. Soustava rovnic má tuto formu (za předpokladu, že každý uzel může být spojen větvemi se všemi uzly dalšími):

$$\begin{aligned}
&G_{10}U_{10} + G_{12}(U_{10} - U_{20}) + \ldots + G_{1q}(U_{10} - U_{q0}) = -I_1\\
&G_{20}U_{20} + G_{21}(U_{20} - U_{10}) + \ldots + G_{2q}(U_{20} - U_{q1}) = -I_2\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&G_{q0}U_{q0} + G_{q1}(U_{q0} - U_{q1}) + \ldots + G_{q,q-1}(U_{q0} - U_{q-1,0}) = -I_q
\end{aligned} \tag{19}$$

Z rovnice první můžeme vytknout výraz $U_{10}(G_{10} + G_{12} + \ldots + G_{12}) = U_{10}G_{11}$, kde G_{11} je součet vodivostí všech větví, ústících do uzlu 1. Podobný výraz můžeme vytknout ze všech rovnic a jeho obecná formulace bude $U_{j0}(G_{j0} + G_{j1} + \ldots + G_{jq}) = U_{j0}G_{jj}$. Soustava rovnic potom nabude tvaru:

$$\begin{aligned}
&G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} - \ldots - G_{1q}U_{q0} = I_1\\
&-G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} - \ldots - G_{2q}U_{q0} = I_2\\
&\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
&-G_{q1}U_{10} - G_{q2}U_{20} - G_{q3}U_{30} - \ldots + G_{qq}U_{q0} = I_q
\end{aligned} \tag{20}$$

V soustavě rovnic známe všechny proudy uzlové I_1 až I_q. Jsou to proudy odebírané, redukované do uzlů sítě. Uzel $q + 1$ je uzel referenční, jehož napětí je nulové a jehož napájecí proud je součtem všech odběrů.

Dále jsou známy impedance jednotlivých větví a tím i jejich admitance G nebo Y. Máme tedy pro q neznámých uzlových potenciálů (potenciál referenčního uzlu je roven 0) q lineárních a nezávislých rovnic, takže uzlové potenciály můžeme určit. Postupujeme při tom opět podle Cramerova pravidla a označíme determinant

$$\begin{Vmatrix}
G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \ldots & -G_{1q}\\
-G_{21} & G_{22} & -G_{23} & \ldots & -G_{2q}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
-G_{q1} & -G_{q2} & -G_{q3} & \ldots & G_{qq}
\end{Vmatrix} = |\,\boldsymbol{D}\,| \tag{21}$$

Poněvadž $-G_{12} = -G_{21}$ je determinant souměrný. Potenciál např. uzlu 2 U_{20} obdržíme jako výraz $U_{20} = \frac{|\,\mathbf{D}'\,|}{|\,\mathbf{D}\,|}$, kde $|\,\mathbf{D}'\,|$

$$|\,\mathbf{D}'\,| = I_1\,|\,\mathbf{D}'_1\,| + I_2\,|\,\mathbf{D}'_2\,| + I_3\,|\,\mathbf{D}'_3\,| + I_q\,|\,\mathbf{D}'_q\,| \qquad (22)$$

kde $|\,\mathbf{D}'_x\,|$ jsou subdeterminanty prvků I_1, I_2, I_3, a I_q jestliže druhý sloupec determinantu (21) nahradíme sloupcem z pravé strany rovnice (20). Když takto určíme potenciály všech uzlů vůči uzlu referenčnímu, můžeme již určit proudy jednotlivých větví podle Ohmova zákona. Proud v obecné větvi $I_{jk} = \frac{U_{j0} - U_{k0}}{R_{jk}}$. Tím je řešení provedeno.

b) Poměry v sítích

Sítě se v tomto případě liší od obvodů jen nepatrně. Platí opět vše, co bylo řečeno ve stati Cb, zatěžovací proudy je nutno předem redukovat do uzlů a impedance větví převést na jejich admitance, což je proti metodě obvodových proudů práce navíc. Řešení tří základních možných případů je podáno obdobně jako v předešlém případě.

c) Aplikace maticového počtu na jednotlivé případy

Soustavě rovnic (19) i (20) odpovídá v maticovém počtu jednoduchá rovnice

$$\mathbf{M} \,.\, \mathbf{I} = \mathbf{I}_z, \qquad (23)$$

kde $\mathbf{M}$ je incidenční matice větví i proudů, směřujících v síti do jednotlivých uzlů. Je to matice typu $(q - 1, m)$, jestliže je q počet uzlů a m počet větví sítě; $\mathbf{I}$ je sloupcová matice proudů ve větvích typu $(m, 1)$, I_z je sloupcová matice proudů, které se uzlů odebírají, nebo v některých případech do nich tekou, typu $(q, 1)$. Všechny prvky této matice jsou známy. Odběrové proudy jsou dány a napájecí proudy, které tvoří jejich součet, jsou rovněž známy. Ze srovnání jednotlivých členů rovnic s jejich maticovým přepisem vyplývá, že

$$\mathbf{I} = \mathbf{U}_{xy}\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1T}\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{U} \qquad (24)$$

kde $\mathbf{Z}^{-1}$ je čtvercová matice admitancí jednotlivých větví typu (m, m). Matice $\mathbf{Z}$ je diagonální a proto i inversní matice $\mathbf{Z}^{-1}$ je opět diagonální s prvky $\frac{1}{Z}$ je to tedy diagonální matice admitancí $\mathbf{Y}$.

${}^T\mathbf{M}$ je incidenční matice uzlových potenciálů příslušejících jednotlivým větvím. Je to matice transponovaná k matici $\mathbf{M}$ a je typu $(m, q - 1)$. $\mathbf{U}_{xy}$ je sloupcová matice napětí větví, tj. rozdílů $(U_x - U_y)$: $\mathbf{U}$ je sloupcová matice uzlových potenciálů proti uzlu referenčnímu typu $(q - 1,1)$.

Dosazením z rovnice (24) do (23) obdržíme rovnici

$$\mathbf{M}\mathbf{Z}^{-1T}\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}_z = \mathbf{M}\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{U} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{I}_z = \mathbf{B}\mathbf{U} \qquad (25)$$

Z této rovnice můžeme určit napětí (potenciály proti uzlu referenčnímu) jednotlivých uzlů:

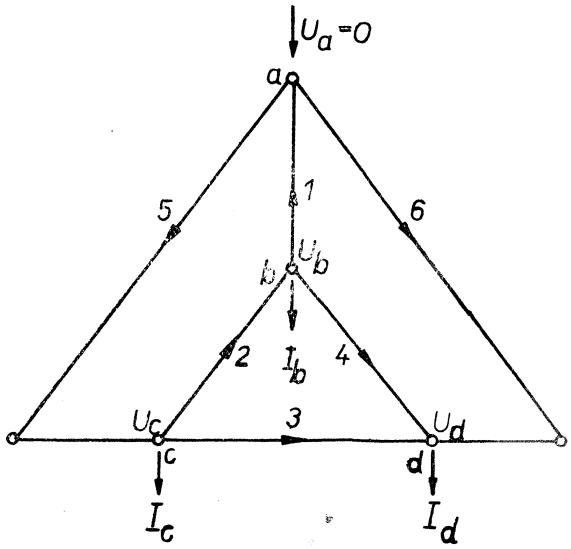
$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}^{-1T}\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{I}_z = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{I}_z = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}_z \tag{26}$$

Matice $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}^{-1T}\boldsymbol{M}$ je čtvercová matice typu $(q-1, q-1)$. Dosazením do rov. (24) získáme rovnici pro hledané proudy ve větvích:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Z}^{-1T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z}^{-1T}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}^{-1T}\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{I}_z = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{I}_z = \\ = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}_z = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} \tag{27}$$

α) Síť napájená v jednom uzlu.

Podle tohoto postupu budeme řešit síť, jejíž schéma je na obr. 15. Je to tatáž síť jako na obr. 10, řešená již metodou obvodových proudů. Tak budou nejlépe zřejmé rozdíly obou metod.



Obr. 15.

Incidenční matice $\boldsymbol{M}$ určuje, které proudy tekou do jednotlivých uzlů sítě. Orientaci proudů na obr. 15 ponecháme stejnou, jako na obr. 10.

Napětí jednotlivých uzlů vůči referenčnímu uzlu napájecímu a dostaneme dosazením do rov. (26). Vektor uzlových proudů má sice 4 členy, avšak nezávislé jsou pouze 3, neboť napájecí proud je součtem proudů odběrových. Nezávislé jsou pouze proudy I_b, I_c a I_d. Avšak také matice $\boldsymbol{B}$ má hodnost pouze $(q-1) = 3$, neboť se týká pouze 3 samostatných uzlů, čtvrtý uzel je referenční, jehož potenciál je roven 0 a jehož proud je součtem proudů odebíraných. Proto operujeme dále jen maticemi třetího řádu, neboť řádky a sloupce, týkající uzlu referenčního vynecháme.

Rovnici (26) píšeme nyní ve formě $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{I}$, kde $\boldsymbol{B}_k^{-1}$ je matice inversní ke zkrácené matici $\boldsymbol{B}_k$. Jako první krok výpočtu určíme součin $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}$;

$$\left\|\begin{array}{rrrrrr} +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{cccccc} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{cccccc} +Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_5 & -Y_6 \\ -Y_1 & +Y_2 & 0 & +Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 & -Y_3 & 0 & +Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_3 & -Y_4 & 0 & +Y_6 \end{array}\right\|$$

Admitanční matice $\boldsymbol{Y}$ větví je čtvercová a diagonální za předpokladu, že mezi větvemi není ani indukční ani jiné vazby.

V další fázi výpočtu přistoupíme k určení součinu $\boldsymbol{MY^TM} = \boldsymbol{B}$. Z matice $\boldsymbol{B}$ vyplyne i zkrácené matice $\boldsymbol{B}_k$

$$\left\|\begin{array}{cccccc} +Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_5 & -Y_6 \\ -Y_1 & +Y_2 & 0 & -Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 & -Y_3 & 0 & +Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_3 & +Y_4 & 0 & +Y_6 \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{rrrr} +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{array}\right\| =$$

$$= \begin{array}{c} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \\ \mathrm{d} \end{array} \left\|\begin{array}{c|ccc} Y_1 + Y_5 + Y_6 & -Y_1 & -Y_5 & -Y_6 \\ \hline -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_4 & -Y_2 & -Y_4 \\ -Y_5 & -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_5 & -Y_3 \\ -Y_6 & -Y_4 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_6 \end{array}\right\|$$

Zkrácená matice $\boldsymbol{B}_k$ je orámována.

Prvky matice $\boldsymbol{B}$ odpovídají členům determinantu $|\boldsymbol{D}|$ z rov. (21). Tuto matici bychom proto mohli sestavit přímo buďto z této rovnice (resp. soustavy rovnic) nebo také přímo ze schématu sítě.

Inverse matice $\boldsymbol{B}$ se provádí opět zpravidla po numerickém dosazení hodnot admitancí větví Y. Provedením těchto operací obdržíme sloupcovou matici uzlových napětí $\boldsymbol{U}$.

Matice $\boldsymbol{I}_z$ $\left\|\begin{array}{c} I_a \\ \hline I_b \\ I_c \\ I_d \end{array}\right\|$

Orámovaná je zkrácená matice $\boldsymbol{I}_z$.

Proudy v jednotlivých větvích můžeme určit podle Ohmova zákona — např. proud ve větvi 2 je určen vzorcem $I_2 = Y_2(U_b - U_c)$.

Můžeme také pokračovat maticovým počtem do důsledku když sloupcovou matici uzlových napětí násobíme podle rov. (27) maticí $\boldsymbol{Y^TM}_k$. Tuto matici

dostaneme z matice $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}$ vypustíme-li první sloupec, který odpovídá referenčnímu uzlu.

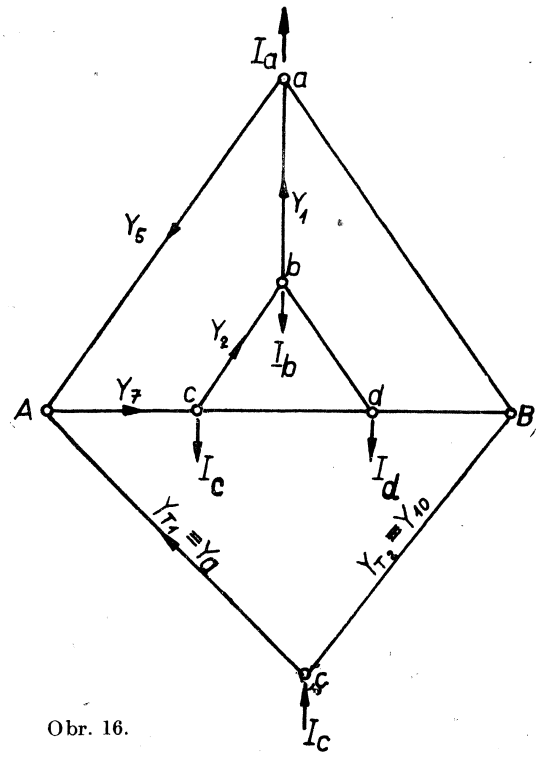
Součin $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}_r =$

$$= \begin{Vmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -Y_1 & 0 & 0 \\ Y_2 & -Y_2 & 0 \\ 0 & -Y_3 & X_3 \\ -Y_4 & 0 & X_4 \\ 0 & Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & Y_6 \end{Vmatrix}$$

Matice proudů ve větvích $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}_r\boldsymbol{U}$:

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -Y_1 & 0 & 0 \\ Y_2 & -Y_2 & 0 \\ 0 & -Y_3 & Y_2 \\ -Y_4 & 0 & Y_4 \\ 0 & Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & Y_6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_b \\ U_c \\ U_d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -U_b Y_1 \\ (U_b - U_c)\, Y_2 \\ (U_d - U_c)\, Y_3 \\ (U_d - U_b)\, Y_4 \\ U_c Y_5 \\ U_d Y_6 \end{Vmatrix}$$

β) Síť napájená v několika uzlech o neregulovaném zatížení napáječů. Mějme nyní síť podle obr. 11, jejíž náhradní schéma je na obr. 16. Napájecí uzel náhradního schématu je bod C a proto ho považujeme za uzel referenční, jehož potenciál je roven 0. Potenciály uzlů A, B, a, b, c, d, jsou předběžně neznámé a vyplynou z řešení. Proti dřívějšímu případu, kdy tatáž síť byla napájena v jediném bodě a, máme nyní o 3 uzly a 2 větve více. Incidenční matice $\boldsymbol{M}$, která určuje, které proudy tekou do jednotlivých uzlů sítě je napsána za předpokladu, že orientace proudů je podle obr. 16. Matice admitancí větví Y je napsána opět za předpokladu, že není mezi větvemi vzájemného působení.



Obr. 16.

Jako v dřívějším případě určíme nejprve součin $\boldsymbol{MY}$:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{T1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{T2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{T1} & -Y_{T2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +Y_5 & 0 & -Y_7 & 0 & +Y_{T1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +Y_6 & 0 & -Y_8 & 0 & +Y_{T2} \\ +Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_5 & -Y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & +Y_2 & 0 & +Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 & -Y_3 & 0 & 0 & 0 & +Y_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_3 & -Y_4 & 0 & 0 & 0 & +Y_8 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Součin $\boldsymbol{MY}$ je incidenční maticí admitancí oněch větví, které ústí do jednotlivých uzlů. Znaménka se řídí podle orientace proudů v oněch větvích.
Dále určíme součin $\boldsymbol{MY}^T\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_{T1} & -Y_{T2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +Y_5 & 0 & -Y_7 & 0 & +Y_{T1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +Y_6 & 0 & -Y_8 & 0 & +Y_{T2} \\ +Y_1 & 0 & 0 & 0 & -Y_5 & -Y_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & +Y_2 & 0 & +Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 & -Y_3 & 0 & 0 & 0 & +Y_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_3 & -Y_4 & 0 & 0 & 0 & +Y_8 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|cccccc} Y_1 + Y_2 & -Y_{T1} & -Y_{T2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -Y_{T1} & Y_5+Y_7+Y_{T1} & 0 & -Y_5 & 0 & -Y_7 & 0 \\ -Y_{T2} & 0 & Y_6+Y_8+Y_{T2} & -Y_6 & 0 & 0 & -Y_8 \\ 0 & -Y_5 & -Y_6 & Y_1+Y_5+Y_6 & -Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_1 & Y_1+Y_2+Y_4 & -Y_2 & -Y_4 \\ 0 & -Y_7 & 0 & 0 & -Y_2 & Y_2+Y_3+Y_7 & -Y_3 \\ 0 & 0 & -Y_8 & 0 & -Y_4 & -Y_3 & Y_3+Y_4+Y_8 \end{array} \right\|$$

Matice $\boldsymbol{B}_k$ je orámovaná. Mechanika matematického řešení maticovým počtem je stále stejná. S přihlédnutím k tomu, že uzel C je referenční, můžeme dále opět operovat se zkrácenou maticí $\boldsymbol{B}$, kterou jsme obdrželi vynecháním sloupce i řádku, které v matici $\boldsymbol{B}$ přináleží uzlu C. Matice zatěžovacích proudů je $\boldsymbol{I}_z$.

Poněvadž potenciály uzlů jsou dány maticí $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{I}_z$, musíme provést inversi matice $\boldsymbol{B}_k$. Ta je 6tého řádu, kdežto při řešení téhož případu metodou obvodových proudů jsme invertovali matici $\boldsymbol{Z}_0$ řádu 4-tého. Celý průběh řešení je zcela obdobný, jako v předešlém případě. Matici B_k je opět možno vypsat přímo ze schématu, nebo podle rovnic (21) a (22)

$$\boldsymbol{I}_z = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{Vmatrix}$$

Poněvadž inverse matic patří k nejobtížnějším úkonům, snažíme se zásadně pracovati oněmi metodami, které vedou k maticím nižšího řádu. Proto bychom v podobném případě dali přednost metodě obvodových proudů.

γ) Síť napájená v několika uzlech pri regulovaném zatížení napáječů.

Třetí možný případ je opět podle obr. 11, tedy případ obdobný stati $\boldsymbol{C}$dγ. Abychom mohli schéma sítě řešit podle obr. 13 metodou obvodových proudů, museli jsme v onom případě uskutečnit předpoklad, že můžeme regulovat velikost napájecích proudů v uzlech A, B a že nám takto jsou velikosti těchto proudů známy.

I řešení metodou uzlových napětí je možné buďto za tohoto předpokladu, nebo za předpokladu, že napětí napaječů jsou buďto známa, nebo totožna. To je opět možno uskutečnit pouze tehdy, jsou-li napájecí transformátory v uzlech A, B regulační. Orientaci proudů ponecháme jako dříve, podle ní píšeme incidenční matici proudů $\boldsymbol{M}$. Větví je nyní 8, uzlů 6, z toho 2 referenční A, B, jejichž potenciály jsou rovny 0.

Součin $\boldsymbol{MY}$:

$$\begin{Vmatrix} 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & Y_2 & -Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 & -Y_7 & 0 \\ Y_1 & -Y_2 & 0 & 0 & -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & Y_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & -Y_4 & 0 & 0 & 0 & -Y_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_6 & Y_7 & Y_8 \end{Vmatrix}.$$

Součin $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}$:

$$\begin{Vmatrix} 0 & Y_2 & -Y_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 & -Y_7 & 0 \\ Y_1 & -Y_2 & 0 & 0 & -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & Y_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & -Y_4 & 0 & 0 & 0 & -Y_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_6 & Y_7 & Y_8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc|cccc} Y_2 + Y_3 & 0 & -Y_2 & 0 & -Y_3 & 0 \\ 0 & Y_5 + Y_7 & -Y_5 & 0 & 0 & -Y_7 \\ \hline -Y_2 & -Y_5 & Y_1 + Y_2 + Y_5 & -Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_1 & Y_1 + Y_4 + Y_6 & -Y_4 & -Y_6 \\ -Y_3 & 0 & 0 & -Y_4 & Y_3 + Y_4 + Y_8 & -Y_8 \\ 0 & -Y_7 & 0 & -Y_6 & -Y_8 & Y_6 + Y_7 + Y_8 \\ \hline A & B & a & b & c & d \end{array} \right\|.$$

Poněvadž $U_A = U_B = 0$, můžeme řádky a sloupce, příslušející těmto dvěma uzlům vynechat. Zjednodušená matice $\boldsymbol{B}$ je orámována. Je to matice čtvrtého řádu, stejně jako matice zatěžovacích proudů v uzlech. Napětí v uzlech a, b, c, d obdržíme opět vynásobením inversní matice $\boldsymbol{B}_k^{-1}$ a matice $\boldsymbol{I}_z$: $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{I}_z$.

$$\boldsymbol{I}_z = \begin{Vmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{Vmatrix}$$

Proudy ve větvích můžeme opět vypočísti podle Ohmova zákona — např. $I_z = \dfrac{U_a}{R_z}$, resp. $I_2 = U_a \,.\, Y_2$, nebo pokračujeme maticovým počtem: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}_a\boldsymbol{U}$, kde součin je tento:

$$\begin{Vmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 \\ -Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_3 & 0 \\ 0 & +Y_4 & -Y_4 & 0 \\ -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +Y_6 & 0 & -Y_6 \\ 0 & 0 & 0 & +Y_7 \\ 0 & 0 & -Y_8 & +Y_8 \end{Vmatrix}$$

Matici ${}^T\boldsymbol{M}_k$ obdržíme z matice ${}^T\boldsymbol{M}$, vynecháme-li sloupce příslušné oběma referenčním uzlům A, B. Matice proudů ve větvích: $\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{U}$:

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 \\ -Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_3 & 0 \\ 0 & +Y_4 & -Y_4 & 0 \\ -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 Y_6 & 0 & -Y_6 \\ 0 & 0 & 0 & +Y_7 \\ 0 & 0 & -Y_8 & -Y_8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (U_a - U_b)\, Y_1 \\ -U_a Y_2 \\ U_c Y_3 \\ (U_b - U_c)\, Y_4 \\ -U_a Y_5 \\ (U_b - U_d)\, Y_6 \\ U_d Y_7 \\ (U_d - U_c)\, Y_8 \end{Vmatrix}$$

Podobně bychom postupovali, kdyby v síti byly 3 nebo i více napájecích bodů o stejném napětí.

Předpokládejme nyní, že napětí v uzlech A a B nejsou sice stejná, že však můžeme regulovat jejich zatížení, t. j. rozdělit podle programu napájecí proudy jako ve stati **C**dγ. Samozřejmě platí, že $I_A + I_B = I_a + I_b + I_c + I_d$, tj. součet proudů napájcích rovná se součtu proudů odebíraných. Potom uzel A je jediný uzel referenční, známe však všechny uzlové proudy.

Matice $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{Y}$, součin $\boldsymbol{MY}$, matice $^T\boldsymbol{M}$ zůstávají beze změny a proti i matice $\boldsymbol{B}$ se nemění. Zvolíme-li určitý napájecí proud I_B, určíme tím i napájecí proud I_B a proto můžeme řádek i sloupec, příslušející uzlu A vynechat. Zjednodušená matice $\boldsymbol{B}$ je nyní o stupeň vyššího řádu, nežli dříve. Je označena opět orámováním.

$$\boldsymbol{B} = \left\| \begin{array}{c|cccc} Y_2+Y_3 & 0 & -Y_2 & 0 & -Y_3 & 0 \\ \hline 0 & Y_5+Y_7 & -Y_5 & 0 & 0 & -Y_7 \\ -Y_2 & -Y_5 & Y_1+Y_2+Y_5 & -Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_1 & Y_1+Y_4+Y_6 & -Y_4 & -Y_6 \\ -Y_3 & 0 & 0 & -Y_4 & Y_3+Y_4+Y_8 & -Y_8 \\ 0 & -Y_7 & 0 & -Y_6 & -Y_8 & Y_6+Y_9+Y_8 \\ \hline A & B & a & b & c & d \end{array} \right\|, \quad \boldsymbol{I}_z = \begin{Vmatrix} I_B \\ I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \end{Vmatrix}.$$

Napětí v uzlech B, a, b, c, a d jsou dány součinem $U = B_k^{-1} I_z$. Proudy ve větvích můžeme již vypočítat přímo, neboť známe potenciály uzlů i vodivosti větví. Můžeme také pokračovat maticovým počtem, kdy $\boldsymbol{I}_v = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M}_k \boldsymbol{U}$,

Dílčí součin $\boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M}_k$:

$$\begin{Vmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8 \end{Vmatrix} \cdot \left\| \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{array} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & Y_4 & -Y_4 & 0 \\ Y_5 & -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_6 & 0 & -Y_6 \\ -Y_7 & 0 & 0 & 0 & Y_7 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_8 & Y_8 \end{Vmatrix}.$$

Matici ${}^{T}\boldsymbol{M}_{\xi}$ obdržíme z matice ${}^{T}\boldsymbol{M}$, vynecháme-li sloupec příslušející napájecímu bodu A jako bodu referenčnímu. Další postup je známý: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}\,{}^{T}\boldsymbol{M}_{\xi}\boldsymbol{U}$:

$$\begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_4 & -Y_4 & 0 \\ +Y_5 & -Y_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +Y_6 & 0 & -Y_6 \\ -Y_7 & 0 & 0 & 0 & Y_7 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_8 & Y_8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_B \\ U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (U_a - U_B)\,Y_1 \\ -U_a Y_2 \\ U_a Y_3 \\ (U_b - U_c)\,Y_4 \\ (U_B - U_a)\,Y_5 \\ (U_B - U_d)\,Y_6 \\ (U_B - U_d)\,Y_7 \\ (U_d - U_c)\,Y_8 \end{Vmatrix}$$

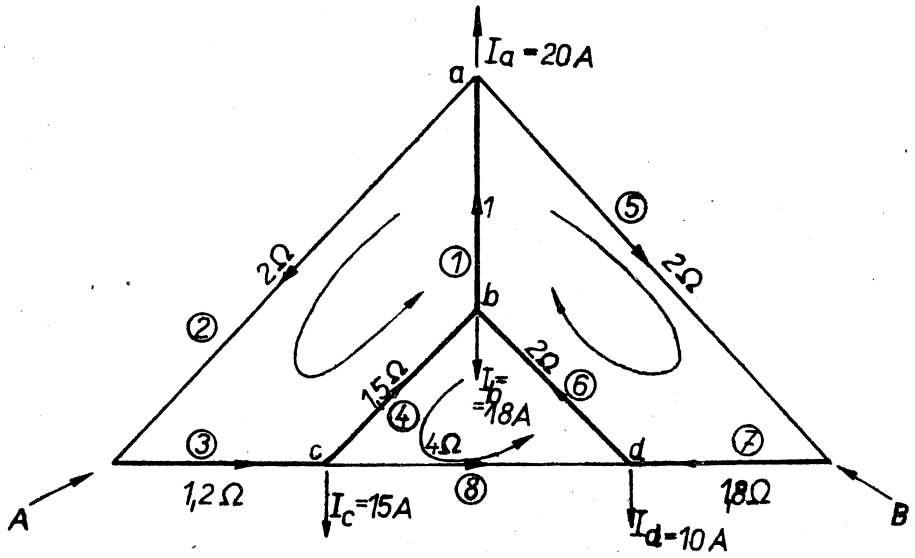
Početně je toto řešení poněkud složitější, nežli za předpokladu, že $U_A = U_B$.

E. Ukázky numerického řešení

a) Sítě quasistejnosměrné (ukázkové příklady bez komplexních čísel)

α) Síť podle stati **C**dγ.

Máme vyřešit síť zatíženou v uzlech podle obr. 17. Napájecí body jsou uzly A, B a zatížení transformátorů možno vyregulovat tak, že každý z nich



Obr. 17.

dodává do sítě polovinu celkového zatížení (polovinu maximálního zatížení). Pro výpočet předpokládáme, že každý z odebíraných proudů v uzlech je napájen z poloviny z uzlu A a z poloviny z uzlu B. Příklad řešíme dosazením

numerických hodnot příkladu do rovnic (10), (11) a (12). Nejprve určíme matici obvodových impedancí $\mathbf{Z}_0 = {}^T\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{C} = ({}^T\mathbf{C}\mathbf{Z})\,\mathbf{C}$:

$$\mathbf{Z}_0 \cdot \begin{Vmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1{,}2 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}5 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5{,}7 & 1 & -1{,}5 \\ 1 & 7{,}8 & 2 \\ -1{,}5 & 2 & 7{,}5 \end{Vmatrix} .$$

$$\frac{\boldsymbol{I}_z}{2} = \begin{Vmatrix} 10 \\ 9 \\ 7{,}5 \\ 5 \end{Vmatrix}$$

Výraz ${}^T\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{C}_{ZA}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2}$ obdržíme postupným vynásobením matic takto:

$$({}^T\mathbf{C}\mathbf{Z})\,\mathbf{C}_{ZA} = {}^T\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{C}_{ZA}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1{,}2 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}5 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & 1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 2{,}7 & 1{,}2 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}5 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

a potom $({}^T\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{C}_{ZA})\frac{\boldsymbol{I}_z}{2}$

$$\begin{Vmatrix} 2 & 2{,}7 & 1{,}2 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1{,}5 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 10 \\ 9 \\ 7{,}5 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 16{,}3 \\ 0 \\ 6{,}5 \end{Vmatrix}$$

Výraz ${}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2}$ obdržíme postupem zcela obdobným:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1{,}2 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}5 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3{,}8 & 1{,}8 & 1{,}8 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3{,}8 & 1{,}8 & 1{,}8 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 10 \\ 9 \\ 7{,}5 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 86{,}7 \\ -12 \end{Vmatrix}$$

Inverse matice $\boldsymbol{Z}_0$: $\boldsymbol{Z}_0^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{Z}_0|}\tilde{\boldsymbol{Z}}_0$, kde $|\boldsymbol{Z}_0|$ je determinant matice $\boldsymbol{Z}_0$ a $\tilde{\boldsymbol{Z}}_0$ je matice adjungovaná.

$$|\boldsymbol{Z}_0| = \begin{vmatrix} 5{,}7 & 1 & -1{,}5 \\ 1 & 7{,}8 & 2 \\ -1{,}5 & 2 & 7{,}5 \end{vmatrix} = 279{,}6, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}}_0 = \begin{Vmatrix} 54{,}5 & -10{,}5 & 13{,}7 \\ -10{,}5 & 40{,}55 & -12{,}9 \\ 13{,}7 & -12{,}9 & 44{,}24 \end{Vmatrix},$$

Nyní můžeme již dosadit do rovnice (11):

$$\boldsymbol{I}_0 = \boldsymbol{Z}_d^{-1}\left({}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2} + {}^{T}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZB}\frac{\boldsymbol{I}_z}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{279{,}6}\begin{Vmatrix} 54{,}5 & -10{,}5 & 13{,}7 \\ -10{,}5 & 40{,}55 & -12{,}9 \\ 13{,}7 & -12{,}9 & 44{,}24 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 16{,}3 \\ 0 \\ 6{,}5 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{279{,}6}\begin{Vmatrix} 54{,}5 & -10{,}5 & 13{,}7 \\ -10{,}5 & 40{,}55 & -12{,}9 \\ 13{,}7 & -12{,}9 & 44{,}24 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 86{,}7 \\ -12 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{279{,}6}\begin{Vmatrix} 54{,}5 & -10{,}5 & 13{,}7 \\ -10{,}5 & 40{,}5 & -12{,}9 \\ 13{,}7 & -12{,}9 & 44{,}24 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 16{,}3 \\ 86{,}7 \\ -12 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{279{,}6}\begin{Vmatrix} 100{,}5 \\ -3610 \\ -1139 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}386 \\ -12{,}9 \\ -4{,}1 \end{Vmatrix},$$

Obvodové proudy jsou tedy $I_{\mathrm{I}} = 0{,}386$, $I_{\mathrm{II}} = -12{,}9$ a $I_{\mathrm{III}} = -4{,}1$ Amp. Proudy ve větvích možno určit maticovým počtem podle (12) nebo přímou superposicí takto: (proudy v obvodech II a III byly špatně orientovány.

$I_1 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} = 0{,}386 - 12{,}9 = -12{,}514$ A
(podle orientace obvodu I)

$I_2 = I_{\mathrm{I}} - I_{Aa} = 0{,}386 - 10 = -9{,}614$ A
(podle orientace obvodu I)

$I_3 = I_{\mathrm{I}} + I_{Ab} + I_{Ac} + I_{Ad} = 0{,}386 + 9 + 7{,}5 + 5 = 21{,}886$ A
(podle orientace obvodu I)

$I_4 = I_{\mathrm{I}} + I_{Ab} + I_{\mathrm{III}} = 0{,}386 + 9 + 4{,}1 = 13{,}486$ A
(podle orientace obvodu I)

$I_5 = I_{\mathrm{II}} + I_{Ba} = 12{,}9 + 10 = 22{,}9$ A
(podle oprav. orient. obv. II)

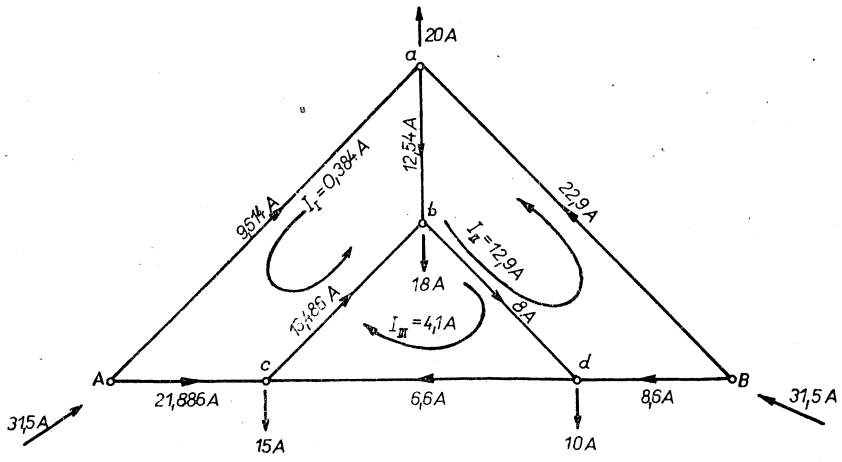
$I_6 = I_{\mathrm{II}} + I_{\mathrm{III}} - I_{Bb} = 12{,}9 + 4{,}1 - 9 = 8$ A
(podle oprav. orient. obv. II)

$I_7 = I_{\mathrm{II}} - I_{Bb} - I_{Bc} - I_{Bd} = 12{,}9 - 9 - 7{,}5 - 5 + -8{,}6$ A
(podle oprav. orient. obv. II)

$I_8 = I_{\mathrm{III}} + I_{Bc} - I_{Ad} = 4{,}1 + 7{,}5 - 5 = 6{,}6$ A
(podle oprav. orient. obv. III)

Velikost a směr proudů jsou patrny z obr. 18. Kontrola je snadná, neboť pro každý uzel sítě musí platit druhý Kirchhoffův zákon. Např. pro uzel *b* platí: $13{,}486 + 12{,}514 - 18 - 8 = 0$ Amp.

Napájecí transformátor *A* dodává proud do větví 2 a 3, tj. $9{,}614 + 21{,}886$ A, dohromady 31,5 A. Transformátor *B* dodává proud do větví 5 a 7, tj. 22,9 a 8,6 A, tedy dohromady rovněž 31,5 A. Je tedy dodržen předpoklad, že oba transformátory mají být stejně zatíženy. Proud, který oba dodávají, je 63 A a je roven součtu odběrových proudů v uzlech.



Obr. 18.

Kdyby zatížení transformátorů bylo rozděleno v jiném poměru, obecně na proudy I_{ZA} a I_{ZB}, postup výpočtu by se nezměnil. V každém případě musí však zatížení být předem známo, resp. jeho rozdělení na transformátory zvoleno. Napájecí proudy se rozdělí v tomto poměru. Matice zatěžovacích proudů budou jiné, ostatní je beze změny, zvláště invertovaná matice $\boldsymbol{Z}_0^{-1}$ podle rovnice (11) zůstává. Po vynásobení novými hodnotami $^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZA}\boldsymbol{I}_{ZA}$ a $^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_{ZI}\boldsymbol{I}_{ZB}$ by byl ovšem jiný výsledek.

β) Síť podle stati Dc*γ*.

Mějme opět síť podle obr. 17 jako v předcházejícím případě. Budeme ji však řešit metodou uzlových napětí za předpokladu, že napětí obou transformátorů A i B jsou stejná. Pro řešení jsou tedy oba tyto uzly referenční a jejich potenciál je roven nule.

Napětí uzlů a, b, c, d určíme podle rovnice 26a $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{I}$, a proudy ve větvích podle rovnice 27a $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{U}$. Matematické operace s hodnotami příkladu, kde hodnoty admitancí $\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}}$ ($\boldsymbol{Z}$ jsou známy) a kde jsou známy zatěžovací proudy v uzlech, jsou tyto: (obr. 17)

$$Z_1 = 1\Omega, \quad Y_1 = 1\ \mathrm{S}$$
$$Z_2 = 2\Omega, \quad Y_2 = \frac{1}{2}\ \mathrm{S}$$
$$Z_3 = 1{,}2\Omega, \quad Y_3 = \frac{5}{6}\ \mathrm{S}$$
$$Z_4 = 1{,}5\Omega, \quad Y_4 = \frac{2}{3}\ \mathrm{S}$$
$$Z_5 = 2\Omega, \quad Y_5 = \frac{1}{2}\ \mathrm{S}$$
$$Z_6 = 2\Omega, \quad Y_6 = \frac{1}{2}\ \mathrm{S}$$
$$Z_7 = 1{,}8\Omega, \quad Y_7 = \frac{5}{9}\ \mathrm{S}$$
$$Z_8 = 4\Omega, \quad Y_8 = \frac{1}{4}\ S$$

$$\boldsymbol{B}_k = \begin{Vmatrix} \frac{72}{36} & \frac{-36}{36} & 0 & 0 \\ \frac{-36}{36} & \frac{78}{36} & \frac{-24}{36} & \frac{-18}{36} \\ 0 & \frac{-24}{36} & \frac{63}{36} & \frac{-9}{36} \\ 0 & \frac{-18}{36} & \frac{-9}{36} & \frac{36}{36} \end{Vmatrix} \quad |\boldsymbol{B}_k| = \begin{Vmatrix} \frac{72}{36} & \frac{-36}{36} & 0 & 0 \\ \frac{-36}{36} & \frac{78}{36} & \frac{-24}{36} & \frac{-18}{36} \\ 0 & \frac{-24}{36} & \frac{63}{36} & \frac{-9}{36} \\ 0 & \frac{-18}{36} & \frac{-9}{36} & \frac{36}{36} \end{Vmatrix} = 7{,}26 - 2{,}22 = 5{,}04.$$

Prvky adjungované matice jsou doplňky příslušných prvků v determinantu transponované matice. Vzhledem k tomu, že v našem případě jde o matici souměrnou, je matice transponovaná totožna s maticí původní. Vypočtené prvky jsou tyto:

$$B'_{11} = 3{,}63 \quad B'_{13} = 0{,}99 \quad B'_{22} = 4{,}44 \quad B'_{24} = 2{,}08$$
$$B'_{12} = -2{,}22 \quad B'_{14} = -1{,}04 \quad B'_{23} = -1{,}99$$
$$B'_{33} = 3{,}85 \quad B'_{44} = 4{,}94$$
$$B'_{34} = -1{,}5$$

Ostatní prvky jsou souměrné.

Inversní matice $\mathbf{B}_k^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}_k|}\,\mathbf{B}_k$, kde $\tilde{\mathbf{B}}_k$ je matice adjungovaná. Vypočteme nyní potenciály uzlů podle rovnice $\mathbf{U} = \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{I}'$.

$$\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{B}_k|}\tilde{\mathbf{B}}_k\mathbf{I}_z = \frac{1}{5{,}04}\begin{Vmatrix} 3{,}63 & 2{,}22 & 0{,}99 & 1{,}04 \\ 2{,}22 & 4{,}44 & 1{,}99 & 2{,}08 \\ 0{,}99 & 1{,}99 & 3{,}85 & 1{,}50 \\ 1{,}04 & 2{,}08 & 1{,}50 & 4{,}94 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 20 \\ 18 \\ 15 \\ 10 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5{,}04}\begin{Vmatrix} 72{,}60 + 39{,}96 + 14{,}85 + 10{,}40 \\ 44{,}40 + 79{,}92 + 29{,}85 + 20{,}80 \\ 19{,}80 + 35{,}82 + 57{,}75 + 15{,}00 \\ 20{,}80 + 37{,}44 + 22{,}50 + 49{,}40 \end{Vmatrix} = \frac{1}{5{,}04}\begin{Vmatrix} 137{,}81 \\ 175{,}17 \\ 128{,}30 \\ 130{,}10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 27{,}3\ \mathrm{V} \\ 34{,}7\ \mathrm{V} \\ 25{,}4\ \mathrm{V} \\ 25{,}8\ \mathrm{V} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \\ U_d \end{Vmatrix}.$$

Potenciály uzlů U_a, U_b, U_c, U_d jsou ve skutečnosti úbytky napětí proti uzlům referenčním. Proudy ve větvích jsou:

$$I_1 = (U_a - U_b)\,Y_1 = (27{,}3 - 34{,}7)\,.\,1 = -7{,}4\ \mathrm{A}$$

$$I_2 = -U_a Y_2 = 27{,}3\,.\,\frac{1}{2} = -13{,}65\ \mathrm{A}$$

$$I_3 = U_c Y_3 = 25{,}4\,.\,\frac{5}{6} = 21{,}10\ \mathrm{A}$$

$$I_4 = (U_b - U_c)\,Y_4 = (34{,}7 - 25{,}4)\,\frac{2}{3} = 6{,}2\ \mathrm{A}$$

$$I_5 = -U_a Y_5 = -27{,}3\,.\,\frac{1}{2} = -13{,}65\ \mathrm{A}$$

$$I_6 = (U_b - U_d)\,Y_6 = (34{,}9 - 25{,}8)\,\frac{1}{2} = 4{,}45\ \mathrm{A}$$

$$I_7 = U_d Y_7 = 25{,}8\,.\,\frac{5}{9} = 14{,}3\ \mathrm{A}$$

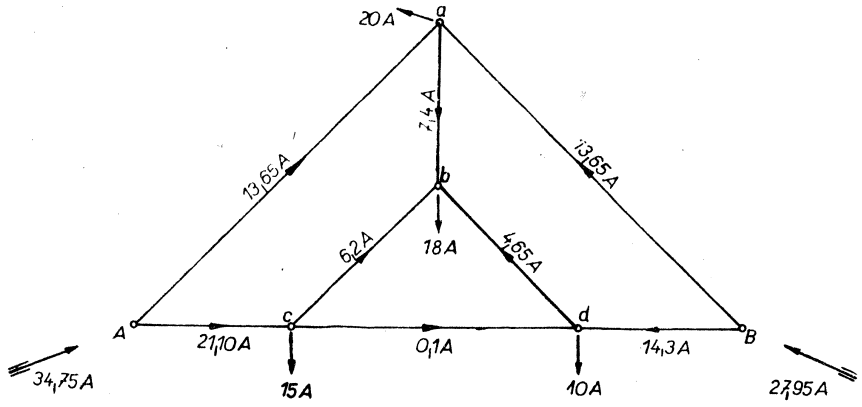
$$I_8 = (U_d - U_c)\,Y_8 = (25{,}8 - 25{,}4)\,\frac{1}{4} = 0{,}1\ \mathrm{A}$$

Zatížení napájecího transformátoru A (součet proudů $I_2 + I_3$) = 13,65 + + 21,1 = 34,75 A. Zatížení napájecího transformátoru B (součet proudů $I_5 + I_7$) = 13,65 + 14,3 = 27,95 A dohromady 62,7 A*), což je součet odebíraných proudů.

Největší úbytek napětí nastává v uzlu b ($U' = 34{,}7$ V). Znaménka — u proudů ve větvích 1, 2 a 5 znamenají, že směr proudů je v nich opačný nežli bylo

*) Celková nepřesnost výpočtu 0,3 A je způsobena tím, že výpočet a inverse byly prováděny pomocí logaritmického pravítka.

předpokládáno podle orientace proudů na obr. 13 a 17. Směry a velikost proudů v síti jsou podle obr. 19.



Obr. 19.

b) Sítě střídavé

α) Matice s komplexními čísly.

U střídavých rozvodných sítí nastupují místo prostých odporů větví jejich impedance, vyjádřené komplexními čísly. Jejich reálná část representuje činný odpor, imaginárná část odpor indukční. Rovněž zatížení v uzlech je téměř vždy indukčního rázu a obsahuje složku činnou a složku indukční, což je rovněž vyjádřeno komplexními čísly.

Při matematickém výpočtu nastávají operace s těmito komplexními čísly. Pokud tyto operace provádíme bez pomoci počítacích strojů, můžeme postupovat prostě podle obecných zásad počítání s komplexními čísly. Např. násobíme-li dvě komplexní čísla mezi sebou, obdržíme čtyřčlen, jehož dvě čísla jsou reálná a dvě imaginárná a tyto dvojice musíme spolu sloučit tak, že výsledek se skládá opět z jednoho čísla reálného a jednoho imaginárního.

Při použití počítacích strojů číslicových činí však slučování čísel reálných na jedné straně a čísel imaginárních na druhé straně určité obtíže. Proto zde obvykle aplikujeme poučku, že obecné komplexní číslo $a + jb$ možno nahradit maticí tvaru $\left\| \begin{matrix} a & -b \\ +b & a \end{matrix} \right\|$ nebo součin obecných komplexních čísel

$$(a + jb)(c - jd) = ac + bd - jad + jbc$$

nahrazujeme maticovým součinem

$$\left\| \begin{matrix} a & -b \\ +b & a \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} c & +d \\ -d & c \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (ac + bd) & (ad - bc) \\ (-ad + bc) & (ac + db) \end{matrix} \right\|$$

a dále

$$\left\| \begin{matrix} a & -b \\ +b & a \end{matrix} \right\|^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left\| \begin{matrix} a & +b \\ -b & a \end{matrix} \right\| \text{atp.}$$

Jestliže nahradíme takto komplexní čísla v určité matici, počet sloupců i počet řádků této matice se zdvojnásobí. S těmito maticemi můžeme však operovat dále tak, jakoby jejich členy byly vesměs čísla reálná, což je při užití počítacích strojů výhodné. Výslednou matici převedeme opět na matici čísel komplexních.

Další příklad je počítán s komplexními čísly, s částečným použitím počítacího stroje. Kdybychom chtěli např. matici obvodových impedancí tohoto příkladu $\boldsymbol{Z}_0$ převést na matici vhodnou pro strojně početní zpracování, vypadala by takto:

$$\boldsymbol{Z}_0 = \begin{Vmatrix} 38{,}88 + j32{,}67 & -4{,}32 - j3{,}63 & 12{,}96 + j10{,}89 \\ -4{,}32 - j3.63 & 32{,}40 + j26.5 & 8{,}64 + j7{,}62 \\ 12{,}96 + j10{,}89 & 8{,}64 + j7{,}26 & 32{,}40 + j26{,}50 \end{Vmatrix} =$$

38,88	—32,67	—4,32	3,63	12,96	—10,89
32,67	38,88	—3,63	—4,32	10,89	12,96
—4,32	3,63	32,40	—26,50	8,64	—7,26
—3,63	—4,32	26,50	32,40	7,26	8,64
12,96	—10,89	8,64	—7,26	32,40	—26,50
10,89	12,90	7,26	8,64	26,50	32,40

Výsledný vektor proudů v jednotlivých větvích v tomtéž příkladě by vyšel potom v této formě:

14,6758	—11,6078
11,6078	14,6758
41,4348	—29,96656
29,9666	41,4348
—71,0886	55,3407
—55,3407	—71,0886
26,7591	—18,3588
18,3588	26,7591
112,5234	—85,2873
85,2873	112,5234
97,8476	—73,6995
73,6995	97,8476

To znamená např., že proud $I_{111} = -71{,}0886 - -j55{,}3407$ A. Tento proud jde tedy opačným směrem, nežli bylo předpokládáno při orientaci proudů v nezávislých větvích.

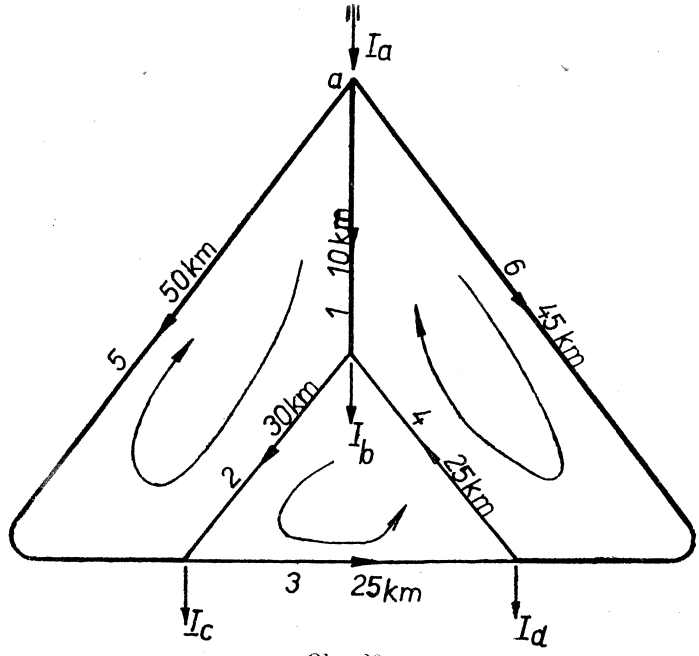
β) Řešení střídavé rozvodné sítě.

Mějme dánu síť podle obr. 20. Předpokládáme, že vodiče jsou Alfe 6, jejich vzájemná vzdálenost je 150 cm, průřez 70 mm². Napětí sítě 22 kV.
Konstanty vedení:

$$R_k = 0{,}432\,\Omega/\text{km},\quad X_k = 0{,}363\,\Omega/\text{km},\quad Z_k = 0{,}432 + j0{,}363\,\Omega/\text{km}$$

Při udaných vzdálenostech jsou impedance větví:

$$Z_1 = 4{,}32 + j3{,}63\,\Omega,\quad Z_2 = 12{,}96 + j10{,}89\,\Omega,\quad Z_3 = 10{,}8 + j8{,}35\,\Omega,$$
$$Z_4 = 8{,}64 + j7{,}26\,\Omega,\quad Z_5 = 21{,}60 + j18{,}15\,\Omega,\quad Z_6 = 19{,}44 + j15{,}61\,\Omega.$$



Obr. 20.

Odběry redukované do uzlů: uzel *b* 2000 kVA, uzel *c* 6300 kVA, uzel *d* 5500 kVA. Ve všech uzlech předpokládáme odběr s průměrným $\cos\varphi = 0{,}8$ ($\sin\varphi = 0{,}6$)

$$I_č = \frac{P\cos\varphi}{U\sqrt{3}} \qquad I_j = \frac{P\sin\varphi}{U\sqrt{3}}.$$

V uzlech jsou tedy proudové odběry:

Uzel *b*:

$$I_č = \frac{2000\,.\,0{,}8}{22\,.\,1{,}73} = 42\text{ A}, \qquad I_j = \frac{2000\,.\,0{,}6}{22\,.\,1{,}73} = 31{,}5\text{ A},$$

Uzel *c*:

$$I_č = \frac{6300\,.\,0{,}8}{22\,.\,1{,}73} = 132{,}5\text{ A}, \qquad I_j = \frac{6300\,.\,0{,}6}{22\,.\,1{,}73} = 99{,}4\text{ A},$$

Uzel *d*:

$$I_č = \frac{5500\,.\,0{,}8}{22\,.\,1{,}73} = 115{,}5\text{ A}, \qquad I_j = \frac{5500\,.\,0{,}6}{22\,.\,1{,}73} = 86{,}8\text{ A}.$$

Celkové proudové odběry jsou tedy:

$$I_b = 42 + j31{,}5 \text{ A}, \quad I_c = 132{,}5 + j99{,}4 \text{ A}, \quad I_d = 115{,}5 + j86{,}8 \text{ A}$$

a celkové zatížení transformátoru v uzlu a $290 + j217{,}7$ A.

Příklad řešíme metodou obvodových proudů podle rovnic (10) až (12), neboť při této metodě invertujeme matici nejnižšího řádu.

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z + \boldsymbol{C}_z\boldsymbol{I}_z, \qquad \text{kde} \qquad \boldsymbol{Z}_0 = {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}.$$

S přihlédnutím k orientaci proudů v obvodech podle obr. 20 jsou příslušné matice sestaveny takto:

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}_z = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$$\text{Součin } {}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & -Z_5 & 0 \\ -Z_1 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & Z_6 \\ 0 & Z_2 & Z_3 & Z_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Součin ${}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Z}_0$:

$$\begin{Vmatrix} Z_1 & Z_2 & 0 & 0 & -Z_5 & 0 \\ -Z_1 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & Z_6 \\ 0 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_5 & -Z_1 & Z_2 \\ -Z_1 & Z_1 + Z_4 + Z_6 & Z_4 \\ Z_2 & Z_4 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{Vmatrix}.$$

Dosadíme numerické hodnoty a provedeme matematické operace:

$$\boldsymbol{Z}_0 = \begin{Vmatrix} 38{,}88 + j32{,}67 & -4{,}32 - j3{,}63 & 12{,}96 + j10{,}89 \\ -4{,}32 + j3{,}63 & 32{,}40 + j26{,}50 & 8{,}64 + j7{,}26 \\ 12{,}96 + j10{,}89 & 8{,}64 + j7{,}26 & 32{,}40 + j26{,}50 \end{Vmatrix} = {}^T\boldsymbol{Z}_0$$

Inverse této matice, provedená na číslicovém počítacím stroji *ZUSE* 11 v Ústavu pro výzkum optiky a jemné mechaniky v Přerově, přinesla následující výsledek:

$$\mathbf{Z}_0^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}0186191 - j0{,}0155196 & 0{,}0049815 - j0{,}0039757 & -0{,}0089698 + j0{,}0072301 \\ 0{,}0049816 - j0{,}0039758 & 0{,}0213078 - j0{,}0172865 & -0{,}0078420 + j0{,}0061651 \\ -0{,}0089698 + j0{,}0072301 & -0{,}0078420 + j0{,}0061650 & 0{,}0242952 - j0{,}0196351 \end{Vmatrix}$$

Součin $\mathbf{C}_z\mathbf{I}_z$ =

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 42 + j31{,}5 \\ 132 + j99{,}4 \\ 115{,}5 + 86{,}8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 42 + j31{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -132 - j99{,}4 \\ 115{,}5 + j86{,}8 \end{Vmatrix}$$

Součin ${}^{T}CZC^{z}I^{z}$ =

$$= \begin{Vmatrix} 4{,}32 + j3{,}63 & 12{,}96 + j10{,}89 & 0 & 0 & -21{,}60 + j18{,}15 & 0 \\ -4{,}32 - j3{,}63 & 0 & 0 & 8{,}64 + j7{,}26 & 0 & 19{,}44 + j15{,}61 \\ 0 & 12{,}96 + j10{,}89 & 10.8 + j8{,}35 & 8{,}64 + j7{,}26 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$\cdot \begin{Vmatrix} 42 + j31{,}5 \\ . \\ 0 \\ 0 \\ -132 - j99{,}4 \\ 115{,}5 + j86{,}8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1114 + j4835{,}59 \\ 819 + j3202{,}91 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Součin $\mathbf{C}\mathbf{Z}_0^{-1+}\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{C}_z\mathbf{I}_z^{\cdot}$:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}0186 - j0{,}0155 & 0{,}0050 - j0{,}0040 & -0{,}0090 + j0{,}0072 \\ 0{,}0050 - j0{,}0040 & 0{,}0213 - j0{,}0173 & -0{,}0078 + j0{,}0062 \\ -0{,}0090 + j0{,}0072 & -0{,}0078 + j0{,}0062 & 0{,}0243 - j0{,}0196 \end{Vmatrix}.$$

$$\cdot \begin{Vmatrix} 1114 + j4830{,}5 \\ 823 + j3203{,}8 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 14{,}6758 + j11{,}6078 \\ 41{,}4348 + j29{,}96656 \\ -71{,}0886 - j55{,}3407 \\ 26{,}7591 + j18{,}3588 \\ 112{,}5234 + j85{,}2873 \\ 97{,}84764 + j73{,}6995 \end{Vmatrix}.$$

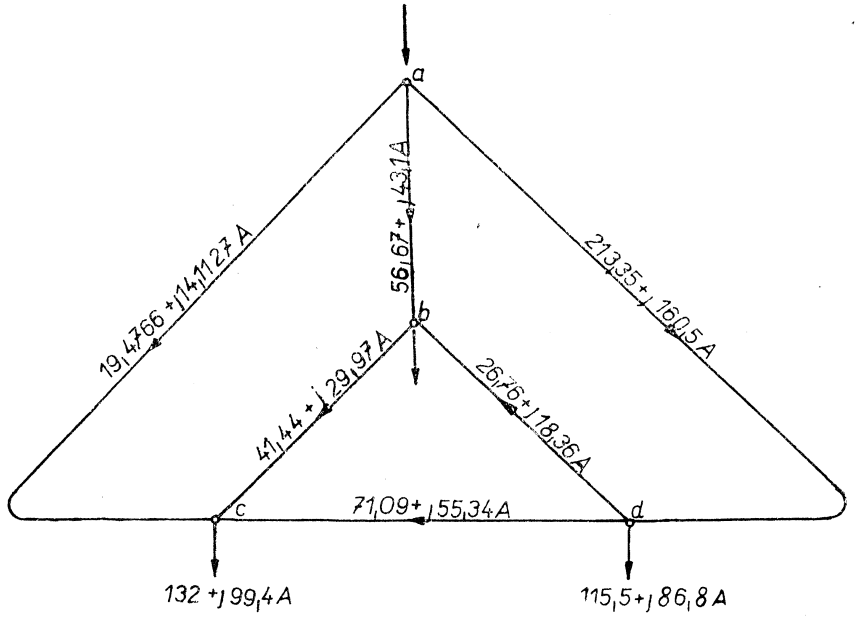
Výsledek: $\mathbf{C}\mathbf{Z}_z^{-1T}\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{C}_z\mathbf{I}_z + \mathbf{C}_z\mathbf{I}_z$:

$$\begin{matrix} \\ \\ I_{III} \\ \\ I_I \\ I_{II} \end{matrix} \begin{Vmatrix} 14{,}6758 + j11{,}6078 \\ 41{,}4348 + j29{,}96656 \\ -71{,}0886 - j55{,}3407 \\ 26{,}7591 + j18{,}3588 \\ 112{,}5234 + j85{,}2873 \\ 97{,}84764 + j73{,}6995 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 42 + j31{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -132 - j99{,}4 \\ 115{,}5 + j86{,}8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 56{,}6758 + j43{,}1078 \\ 41{,}43484 + j29{,}96656 \\ -71{,}0886 - j55{,}3407 \\ 26{,}7591 + j18{,}3588 \\ -19{,}4766 - j14{,}1127 \\ 213{,}34764 + j160{,}4995 \end{Vmatrix}$$

Proudy ve vytažených rámečcích jsou proudy smyčkové (obvodové). Je zřejmé, že obvodový proud $I_{III} = -71{,}0886 - j55{,}3407$ byl původně špatně orientován, teče ve skutečnosti obráceným směrem. Proudy v obvodech II a I tekou správně, jak bylo předpokládáno.

V matici výsledné má samozřejmě proud ve větvi 3 stejný směr a znaménko —, jako obvodový proud III. obvodu. Proud I_s, vzniklý superposicí obvodového proudu I_1 a zátěžného proudu I_z teče proti směru smyčky I.

Celkové rozvržení proudů v síti je patrno z obr. 21.



Obr. 21.

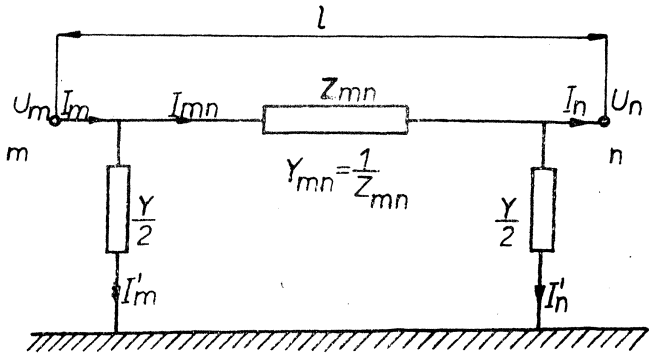
F. Sítě vvn

U dlouhých vedení vvn musíme uvažovat nejen podélné impedance větví, ale i jejich příčné admitance. Zpravidla je možno vedení např. mezi uzly m a n považovat zjednodušeně za článek π podle obr. 22.

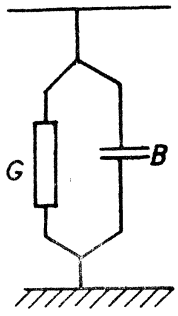
Příčná admitance, tj. admitance izolovaného vedení proti zemi se opět skládá ze dvou složek: z činných svodů G a kapacitních svodů B podle obr. 23: $Y = G + jB = G + j\omega C$. Působením této admitance procházejí z vedení do země proudy, které zvětšují zatížení sítě a které musíme připočítat k užitkovým proudům odebíraných v uzlech. Podle obr. 22 je to u uzlu m proud $I'_m = U_m \frac{Y}{2}$, u uzlu n $I'_n = U_n \frac{Y}{2}$, kde Y je admitance celého vedení mezi uzly m a n. $Y = Y_k l$, kde Y_k je konstanta vedení, tj. impedance 1 km délky vedení, jehož celá délka mezi uzly m a n je l.

Poněvadž do každého uzlu ústí nejméně 3 větve, jde u uzlů do země součet těchto proudů. Jestliže v uzlu m se např. stýkají větve 1, 2 a 3, je

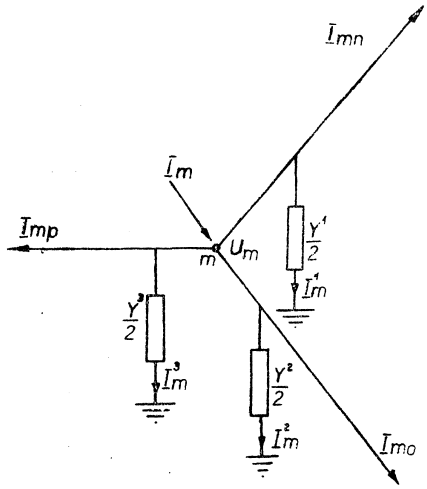
$$\Sigma I^x = I_m^1 + I_m^2 + I_m^3 = U_m \left(\frac{Y^1}{2} + \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{2} \right) \text{(obr. 24).}$$



Obr. 22.



Obr. 23.



Obr. 24.

Tento proud musíme připočíst k zatěžovacímu proud uzlu m, tedy k proudu I_m, a to opět činnou složku ke složce činné a jalovou složku k jeho složce jalové. Pokud není na vedení korona, můžeme proudy jsoucí do země činnými svody — tedy nedokonalou izolací — zanedbat. Potom připočítáváme pouze kapacitní složky, které jsou vektorově orientovány proti jalovým složkám indukčním a proto celkový jalový proud se tím zmenší. U vedení nezatížených tvoří tyto kapacitní zemní proudy jedinou zátěž redukovanou do uzlů.

Uvažujeme-li také ztráty koronou, tedy se potom k činným složkám proudů zatěžovacích připočítávají i proudy, kryjící ztráty koronou.

I když tento způsob řešení ve velké části případů by svojí přesností dostačoval, musíme si uvědomit, že se dopouštíme při tom té chyby, že za uzlová napětí U_m, U_n jsme nuceni pokládat jmenovité napětí sítě. Ve skutečnosti v zatížené síti jsou v uzlech úbytky napětí a proudy, které působením admitancí vedení jdou do země, jsou ve skutečnosti menší.

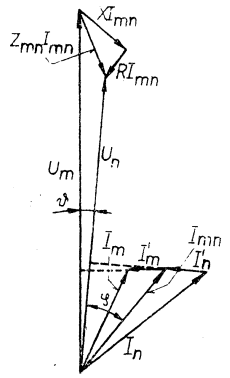
Při metodě uzlových napětí bychom se mohli přesnému řešení přiblížit tím, že bychom nejdříve vyřešili síť podle daných odběrových proudů. Tím bychom zjistili i napětí v uzlech — resp. úbytky napětí v uzlech, (jak bylo provedeno např. v příkladu Eaβ), a na základě těchto vypočítali zemní proudy v uzlech. Řešení je ovšem dvojnásob pracné, neboť nejprve řešíme síť podle odebíraných proudů a potom znovu podle proudů zemních. Přes to však není ještě zcela přesné, neboť nemůžeme brát zřetel na úbytky napětí v uzlech, které jsou způsobeny také vlivem zemních proudů.

Proto byla vypracována pro řešení sítí vvn další metoda, podobná metodě uzlových napětí a logicky vyplývající z předchozích úvah. Nazývá se metoda iterační, použitelná speciálně pro číslicové počítače.

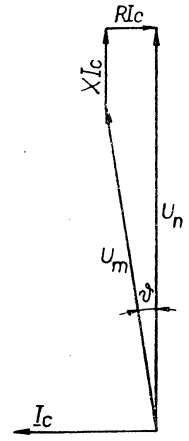
G. Metoda uzlových iterací

a) Teoretický úvod

Jednotlivé větve sítě „vvn" pokládáme zjednodušeně za články π podle obr. 22. Vektorový diagram úbytků napětí větve mezi uzly m, n je podle obr. 25a při zatížení a podle obr. 25b naprázdno. V obou případech nastává



Obr. 25a.



Obr. 25b.

v uzlu n proti uzlu m nejen změna napětí, tj. $U_m \neq U_n$, ale i jeho fázový posun o úhel ϑ. Jestliže jsme dříve operovali pouze s absolutní hodnotou veličiny U (s absolutní velikostí napětí) ve všech uzlech, bereme nyní zřetel

na fázové úhly ϑ. Všechny elektrické veličiny vyjadřujeme symbolickou metodou, tedy čísly komplexními:

$$U = e + jf, \quad \text{absolutní hodnoty } |U| = \sqrt{e^2 + f^2} \text{ a } \vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{f}{e} \tag{28}$$

Jeden z napájecích uzlů je uzlem referenčním v tom smyslu, že jeho úhel $\vartheta = 0$ a $U = e$, takže fázové úhly uzlových napětí se vztahují k napětí tohoto uzlu, který se také nazývá volná přípojnice. Je to přípojnice, v níž se vyrovnávají činné výkony sítě a jeho napětí U s fázovým odklonem $\vartheta = 0$ je předepsáno.

Veličina e je tedy soufázová složka ostatních uzlových napětí s napětím uzlu referenčního, f je složka k němu kolmá.

Z uzlu m (obr. 22) odtéká směrem k uzlu n proud:

$$-(I_{mn} + I'_m) = -(U_m - U_n) \cdot Y_{mn} - U_m \frac{Y^m}{2} \tag{29}$$

Znaménka (—) v rov. 29 a rov. 30 mají ten význam, že se takto označují proudy, které z uzlů odtékají. Proudy, které přitékají označujeme jako (+).

Podélná vodivost Y_{mn} větve má složku činnou a složku jalovou a vyjádříme ji jako: $Y_{mn} = g_{mn} - jh_{mn}$ a podobně i příčnou vodivost poloviny větve $\frac{Y}{2}$: $\frac{Y^m}{2} = d_m + jc_m$ u uzlu m a $\frac{Y^n}{2} = d_n + jc_n$ u uzlu n. Ve výrazech je $d = G$, je to příčná vodivost činná (svody) a $c = j\omega C$ je příčná vodivost kapacitní. Naproti tomu je h podélná vodivost indukční.

Z uzlu m (obr. 24) odtékají do sousedních uzlů n, o a p proudy I_{mn}, I_{mo} a I_{mp}. Do země jdou kapacitní proudy těchto větví I^1_m, I^2_m a I^3_m. Přitéká proud I_m, jde o uzel napájecí.

V uzlech se stýká vždy několik větví, např. v uzlu m obr. 24 tři větve a do každé může odtékat proud podle rovnice (29). Platí zde ovšem I. zákon Kirchhoffův a proto můžeme např. pro uzel m napsat:

$$-\left(\sum I_{mx} + \sum I^x_m\right) = I_m = -\sum (U_m - U_x)\, Y_{mx} - U_m \sum \frac{Y^m}{2} \tag{30}$$

Rovnici (30) možno uspořádat podle členů U_m a U_x takto:

$$I_m = -U_m \left(\sum Y_{mx} + \sum \frac{Y^m}{2}\right) + \sum U_x Y_{mx} = -U_m Y_m + \sum U_x Y_{mx}, \tag{31}$$

kde výraz $Y_m = \sum Y_m + \sum \frac{Y^m}{2}$ znamená celkovou vodivost větví, ústících do uzlu m.

Uzlový proud $I_m = a + jb$ a admitance vyjádříme takto:

$$Y_m = \sum Y_{mx} + \sum \frac{Y^m}{2} = \frac{1}{\sum Z_{mx}} + \sum \frac{Y^m}{2} = \frac{1}{\sum (R_{mx} + j\omega L_{mx})} +$$
$$+ \sum \frac{G_m + j\omega l_m}{2} = \left(\sum \frac{R_{mx}}{(R^2_{mx} + \omega^2 L^2_{mx})} + \sum \frac{G_m}{2}\right) -$$
$$- j\left(\sum \frac{\omega L_{mx}}{R^2_{mx} + \omega^2 L^2} - \sum \frac{\omega C_m}{2}\right) = G_m - jH_m \tag{32}$$

dále

$$Y_{mx} = \frac{R_{mx}}{R_{mx}^2 + \omega^2 L_{mx}^2} - j\frac{\omega L_{mx}}{R_{mx}^2 + \omega^2 L_{mx}^2} = g_{mx} - jh_{mx} \tag{33}$$

a

$$\sum Y_{mx} = \sum g_{mx} - j\sum h_{mx} = G_{mx} - jH_{mx}. \tag{34}$$

Rovnici 31 můžeme nyní vyjádřit ve formě rozvedené:

$$I_m = a_m + jb_m = -[(e_m + jf_m)(G_m - jH_m)] + \sum (e_x + jf_x)(g_{mx} - jh_{mx}) \tag{35}$$

Převládá-li v rovnici (35) velikost prvního, záporného členu nad členem druhým, je zřejmé, že energie z uzlu m odplývá do uzlů sousedních. Je to potom uzel napájecí a proud I_m by byl při implicitním tvaru této rovnice označen jako (+). To značí, že jde o proud přiváděný zvenčí.

Naopak, kdyby převládala velikost druhého, kladného členu rovnice (35), energie ze sousedních uzlů by proudila do uzlu m, který by byl uzlem odběrovým, proud I_m by z uzlu odcházel.

Vyjádříme z rovnice (35) jednotlivé složky proudu I_m:

$$a_m = -(e_m G_m + f_m H_m) + \sum_{x \neq m} (e_x g_{mx} + f_x h_{mx}),$$

$$b_m = -(f_m G_m - e_m H_m) + \sum_{x \neq m} (f_x g_{mx} - e_x h_{mx}). \tag{36}$$

Výkon, který se do uzlu přivádí, je $S_m = P_m + jQ_m = U_m I_m^* = (e_m + jf)_m \times (a_m + jb_m)$. Z toho vyplývá, že výkon činný

$$P_m = (a_m e_m - b_m f_m)$$

a výkon jalový

$$Q_m = (a_m f_m + b_m e_m). \tag{37}$$

U nezatíženého uzlu je proud $I_m = 0$ a rovnice 30 a 31 nabývají tvaru

$$\sum (U_x - U_m) Y_{mx} = U_m \sum \frac{Y^m}{2} \tag{30a}$$

$$U_m Y_m = \sum U_x Y_{mx} \tag{31a}$$

Rovněž složky proudu I_m jsou nulové a samozřejmě i

$$P_m = 0 \text{ a } Q_m = 0 \tag{37a}$$

Změní-li se za předpokladu, že napětí sousedních uzlů U_x zůstává nezměněno, napětí uzlu U_m o hodnotu

$$\Delta U_m = \varepsilon_m + j\xi_m, \tag{38}$$

změní se podle rovnice 31 proud I_m o hodnotu ΔI_m. Poněvadž druhý člen rovnice (31) zůstává konstantní, je

$$\Delta I_m^* = \Delta U_m Y_m. \tag{39}$$

Změněný výkon je

$$S_m + \Delta S_m = (P_m + \Delta P_m) + j(Q_m + \Delta Q_m) = (U_m + \Delta U_m) \cdot (I_m + \Delta I_m^*).$$

Dosadíme-li nyní do této rovnice komplexní výrazy podle (28) a (38), dále podle (32), (33) a (39), obdržíme:

$$[(e_m + jf_m) + (\varepsilon_m + j\xi_m)] \cdot [(a_m + jb_m) + (\varepsilon_m + j\xi_m)(G_m + jH_m)] =$$
$$= (e_m + jf_m + \varepsilon_m + j\xi_m) \cdot (a_m + jb_m + \varepsilon_m G_m + j\xi_m G_m + j\varepsilon_m H_m - \xi_m H_m).$$

Zanedbáme členy druhého řádu ΔP a členy výrazu P, je ΔP:

$$\Delta P = \varepsilon_m(a_m + e_m G_m + f_m H_m) - \xi_m(b_m + f_m G_m + e_m H_m). \tag{40a}$$

Zanedbáním členů druhého řádu ΔQ a členů výrazu Q zůstává pro ΔQ:

$$\Delta Q = \varepsilon_m(b_m + f_m G_m + e_m H_m) + \xi_m(a_m + e_m G_m - f_m H_m). \tag{40b}$$

Napětí $U_m + \Delta U_m$ je napětí korigované. Učiníme nyní porovnání čtverců absolutní velikosti napětí původního $U_m = e_m + jf_m$ a napětí korigovaného

$$(U_m + \Delta U_m) = (e_m + \varepsilon_m) + j(f_m + \xi_m).$$

I zde zanedbáváme členy druhého řádu ε_m^2 a ξ_m^2, takže rozdíl

$$| U_m + \Delta U_m |^2 - | U_m |^2 = | \Delta U_m |^2 = 2e_m\varepsilon_m + 2f_m\xi_m. \tag{41}$$

Členy druhého řádu v rovnicích (40a), (40b) a (41) můžeme zanedbat. Počítáme totiž, jak bude dále vysvětleno s hodnotami poměrnými, takže členy druhého řádu mají poměrnou velikost 10^{-4} vůči hodnotám korigovaným. Poněvadž se iterace opakují, nehraje toto zanedbání žádnou úlohu.

Proud, který odtéká z uzlu m směrem k uzlu n, daný rovnicí (29) můžeme rozložit na složky (analogicky jako v rovnici 35)

$$a_{mn} = -[g_{mn}(e_m - e_n) + h_{mn}(f_m - f_n)] - (d_m e_m + c_m f_m)$$
$$b_{mn} = -[h_{mn}(e_m - e_n) + g_{mn}(f_m - f_n)] - (d_m f_n + c_m e_n) \tag{42}$$

a to podle zásady, že reálná složka proudu prochází reálnou složkou vodivostí a imaginární (jalové) složky imaginárními (jalovými) složkami vodivostí.

Elektrický výkon, plynoucí větví mn z uzlu m a do uzlu n, je

$$S_{mn} = P_{mn} + jQ_{mn} = U_m I_m^* \tag{43}$$

a dá se vyjádřit svými složkami

$$P_{mn} = a_{mn} f_m + b_{mn} e_m \tag{44}$$
$$Q_{mn} = a_{mn} f_m + b_{mn} e_m. \tag{44}$$

Naznačený fyzikální rozbor toků výkonů i proudů v uzlech sítě „vvn" se liší od dřívějších metod tím, že zavádí nejen komplexní vyjádření podélných impedancí, resp. admitancí a proudů, ale také komplexní vyjádření napětí v uzlech a příčných admitancí. Proto je vhodný zvláště pro sítě „vvn", u kterých nelze příčnou admitanci zanedbat. Rovněž ohled na fázový posuv vektorů napětí v uzlech je proti dřívějším metodám pokrokem.

b) Princip metody

Vlastní metoda řešení sítě spočívá v těchto operacích:

V uzlech odběrových je vždy znám, resp. dán činný i jalový odběr a proto i odběr zdánlivý. Označme tyto odběry P_{ox}, Q_{ox} a S_{ox}.

Zvolíme nyní podle úvahy napětí ve všech uzlech sítě (vyjma uzlů napájecích) $U_x = e_x + jf_x$ a dosadíme do rovnic (36). Jejich řešením vypočteme činnou složku uzlového proudu a_x i jalovou složku b_x určitého uzlu. To je možno učinit, neboť víme, jaké je vedení a známe tedy i členy

$$G_x = \sum g_{xy} + \sum \frac{d_x}{2}, \quad H_x = \sum h_{xy} + \sum \frac{C_x}{2}, \quad G_{xy} = \sum g_{xy}, \quad H_{xy} = \sum h_{xy}.$$

Potom dosadíme vypočtené hodnoty složek uzlových proudů I_x do rovnic (37) a obdržíme vypočítané velikosti výkonů, jež podle předpokládaného rozvržení napětí v síti do uzlu proudí. Porovnáme nyní tyto vypočtené výkony s výkony skutečnými (danými)

$$\Delta P_x = P_{ox} - P_{vx} \qquad \text{a} \qquad \Delta Q_x = Q_{ox} - Q_{vx}, \tag{45}$$

kde P_{vx} a Q_{vx} jsou vypočtené výkony pro uzel x.

Tyto odchylky ΔP_x a ΔQ_x se dosadí do rovnic (40a), (40b) a jejich řešením se zjistí korekce ε, ξ. Pro uzel x máme nyní dvě rovnice:

$$\Delta P_x = \varepsilon_x(a_x + e_xG_x + f_xH_x) - \xi_x(b_x + f_xG_x + e_xH_x) = \varepsilon_xA_x - \xi_xB_x,$$
$$\Delta Q_x = \varepsilon_x(b_x + f_xG_x + e_xH_x) + \xi_x(a_x + e_xG_x - f_xH_x) = \varepsilon_xB_x + \xi_xA_x.$$

Z toho vychází, že korekce

$$\xi_x = \frac{\Delta Q_xA_x - \Delta P_xB_x}{A_x^2 + B_x^2} \qquad \text{a} \qquad \varepsilon_x = \left(\frac{\Delta Q_xA_x - \Delta P_xB_x}{A_x^2 + B_x^2}\right)\frac{B_x}{A_x} + \frac{\Delta P_x}{A_x}$$

kde $A_x = (a_x + e_xG_x + f\,H_x)$ a $B_x = (b_x + f_xG_x + e_xH_x)$.

Předpokládané napětí uzlu $xU_x = e_x + jf_x$ se musí opravit na

$$U'_x = (e_x + \varepsilon_x) + j(f_x + \xi_x). \tag{46}$$

V uzlech napájecích si dopředu určujeme absolutní velikost napětí napájecího bodu, tj. transformátoru a dále velikost činného výkonu P, který má tento transformátor do sítě dodávat. Dodržet tyto podmínky umožňují regulační transformátory. Nazveme tyto dvě určující veličiny předepsané, tedy P_p a U_p. Ostatní veličiny, příslušející k napájecím uzlům, označme jako U_n, e_n, f_n, ε_x, ξ_n a_n, b_n.

Předepsaná napětí uzlů napájecích jsme vzali v úvahu již při řešení sousedních uzlů odběrových jako příslušné U_x.

Vyřešením všech uzlů odběrových jsme proudy, tekoucí z uzlů napájecích do sítě již určili. Poněvadž však odhadnuté napětí odběrových uzlů nebyla správná, vyšly i pro napájecí proudy jen zatímní nesprávné výsledky ve formě jimi dodávaných složek proudů $a_n + jb_n$. Tyto vypočtené veličiny dosadíme do rovnice (36) a z nich vypočteme tentokrát složky napětí e_n a f_n. Z toho $|\,U_{vn}\,| = e_n + jf_n$, kde U_{vn} je vypočtená absolutní hodnota napětí

napájecího uzlu. Podle rovnice 41 obdržíme nyní první rovnici $|U_p|^2 - |U_{vn}|^2 = \varepsilon_n 2e_n + \xi_n 2f_n$, kde U_p je předepsaná absolutní hodnota napětí napájecího uzlu. Druhá rovnice je stejná jako u uzlů odběrových

$$\Delta P = P_p - P_{vn}.$$

Máme tedy opět dvě rovnice, pomocí nichž určujeme korekce ε_n a ξ_n.

Konečně se mohou vyskytnout v síti i uzly nezatížené, u nichž $P_{ox} = 0$, i $Q_{ox} = 0$. Poněvadž podle předpokládaného rozvržení napětí v uzlech i zde vyjdou podle rovnice (36) složky proudů $a_x \neq 0$, $b_x \neq 0$, tedy i P_{vx} a Q_{vx}, dostáváme i zde podle vztahu (45) dvě rovnice:

$$\Delta P_x = P_{vx}, \quad \Delta Q_x = Q_{vx}. \tag{45a}$$

Tyto odchylky dosadíme opět do rovnic (40a), (40b) a jejich řešením obdržíme korekce ε_x, ξ_x pro nezatížené uzly.

Jeden z uzlů napájecích je referenční. Poněvadž ostatní napájecí uzly mají určen výkon, který mají dodávat do sítě (tzv. předepsaný výkon), zbývá na uzel referenční rozdíl mezi odebíraným činným výkonem v celé síti a součtem činných výkonů ostatních napájecích uzlů. Kromě toho kryje tento napáječ předběžně neznámé ztráty energie v síti. Proto u něj není možné žádné srovnávání výkonů a $\Delta P = 0$. Podobně i napětí u něj nekorigujeme, neboť $U = e$.

Výpočet korekcí pro všechny uzly sítě se nazývá iterace. Iterací provádíme několik a chyby původního odhadu napětí v uzlech se při každé další iteraci postupně opravují. Při tom se pro výpočet používá vždy posledních opravených hodnot napětí sousedních uzlů. Korekce každého dalšího uzlu nesmí přesahovat korekci uzlů předcházejících. Během každé iterace se zjišťuje maximální hodnota korekce $\sigma = \max |\varepsilon|$ a $\max |\xi|$. Tato maximální hodnota se musí rovněž postupně zmenšovat a výpočet končí, klesne-li σ pod zvolenou mez přesnosti.

Hodnoty podélných i příčných impedancí i hodnoty zvolených uzlových napětí se dosazují při strojových početních operacích v hodnotách poměrných, vztažených k určité hodnotě základní. Základní hodnota impedance při jmenovitém fázovém napětí U_{jm} sítě a při zvoleném jednotkovém výkonu S_{zv} (např. 100 kVA), dána je výrazem

$$Z_z = \frac{U_{jm}}{I_{zv}}, \quad \text{kde} \quad I_{zv} = \frac{S_{zv}}{3 \,.\, U_{jm}}; \quad Z_z = \frac{3U_{jm}^2}{S_{zv}} \quad \text{a} \quad Y_z = \frac{S_{zv}}{3U_{jm}^2} \tag{47}$$

U_{jm} je fázové napětí, tj. napětí proti zemi s ohledem na kapacitní proudy, které jsou příčnou admitancí do země.

Poměrné hodnoty jsou

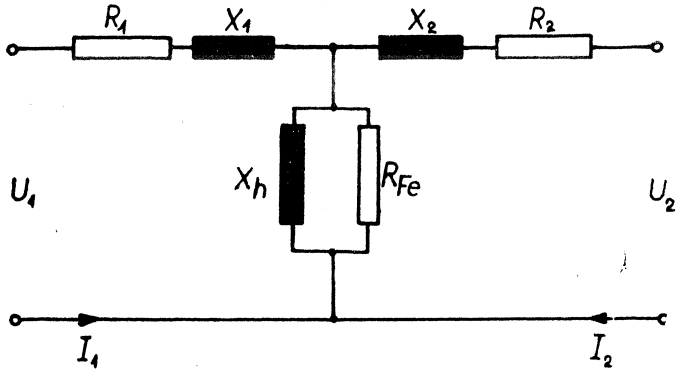
$$\frac{Y_{xy}}{Y_z} \quad \text{nebo} \quad \frac{Y^x}{Y_z}. \tag{48}$$

kde Y_{xy} nebo Y^x jsou podélné nebo příčné admitance větví sítě. Stejně dosazujeme jako hodnoty poměrné i velikosti jejich složek, tedy např.: $\frac{G_{mn}}{Y_z}, \frac{\omega C_m}{Y_z}$

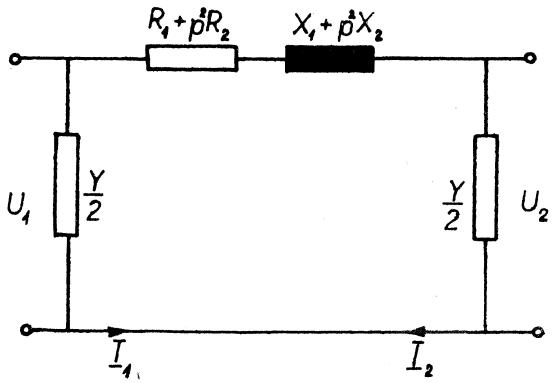
atd. Také zvolená uzlová napětí zavádíme jako hodnoty poměrné, vztažené k napětí jmenovitému, tedy

$$\frac{U_x}{U_{jm}}, \text{ resp. } \frac{e_x}{U_{jm}}, \frac{f_x}{U_{jm}} \text{ atd.} \tag{49}$$

Hodnoty složek uzlových proudů a výkonů podle rovnic (36), (37) rep. (45) vyjdou ovšem rovněž v hodnotách poměrných, vztažených na jmenovité napětí sítě a zvolený jednotkový výkon S_{zn}. Korekce ε a ξ jsou hodnoty



Obr. 26a.



Obr. 26b.

poměrné, vztažené na jmenovité napětí sítě. I když počítací stroj operuje během výpočtů s jednotkami poměrnými, výsledky vyčíslí tabelárně stejně tak, jako byly zavedeny hodnoty vstupní, tedy ve V, kW a kVAr.

Poměrné hodnoty elektrických veličin jsou nazývány v cizí literatuře jednotkami „per unit" (p. u.) a tvoří p. u. systém.

Transformátory, které síť napájejí, můžeme považovat obdobně jako větve za články π, jestliže v náhradním schematu transformátoru podle obr. 26a zanedbáme vliv střední větve, tj. položíme $X_h = R_{Fe} = \infty$. Potom se náhradní schéma zjednoduší podle obr. 26b. Při tom se předpokládá, že všechny transformátory mají jmenovitý převod, daný poměrem jmenovitých napětí obou sítí, které jsou jimi spojeny. Tyto transformátorové větve mají příčné admitance tvořené převážně činnými svody, na rozdíl od větví ostatních, které tvoří vedení, kde převládají vždy příčné admitance kapacitní. Metoda je principiálně jednoduchá, ale vyžaduje mnoho početních operací, které možno zvládnout jedině číslicovým počítacím strojem. Při velkém množství jednoduchých početních úkonů je při strojním propočtu rychlejší a snadnější, nežli metody dřívější, kde obtížné inverze matic výpočty zdržují a komplikují. Její další výhodou je, že není omezena na sítě zauzlené, ale možno tak řešit i sítě stromkové nebo paprskové.

H. Závěr

Pro řešení sítí „vn" a „vvn" byly na počátku jejich vzniku převzaty metody známé z řešení sítí „nn". Nepřihlížíme-li k tzv. metodě rozdělovací, při níž se síť rozdělila myšlenými řezy na úseky, jejichž řešení bylo snadné, používalo se hlavně zmíněné již metody redukční čili transfigurační, při níž se schéma sítě zjednodušovalo, takže se síť původní nahradila ekvivalentní sítí zjednodušenou.

Mezi novější metody náleží řešení sítí pomocí aplikovaných metod obvodových proudů a uzlových napětí v původní formě — tj. pomocí determinantů. Tato metoda byla zdokonalena Kronem zavedením maticového počtu a tenzorů. Nejdůležitější případy podobných řešení jsou v této práci metodicky vyloženy. Na metodu uzlových napětí navazuje konečně nejnovější metoda uzlových iterací.

Řešení elektrických sítí metodou obvodových proudů a uzlových napětí pomocí determinantů (rov. 7) nebylo u nás v praxi aplikováno vůbec, v cizině však ano. Totéž řešení pomocí maticového počtu bylo u nás provedeno pouze ukázkově a užívali jsme raději síťových modelů. Teprve metoda uzlových napětí stane se patrně i u nás po svém propracování metodou v praxi užívanou.

Specifickou vlastností těchto úloh je okolnost, že každá síť má jinou konfiguraci a zatím nelze žádný způsob řešení označit za monopolní. Obtížnost po stránce matematické má základ v tom, že se vždy jedná o mimořádně značná množství veličin nejrůznějších hodnot.

Vývoj sítí vn a vvn jde rychle kupředu, rostou délky jejich větví, roste počet uzlů i počet napájecích míst, ať se již jedná o zdroje energie ve vlastních elektrárnách, nebo o napájení ze sítí sousedních. Přitom jakési paralelní větve tvoří kapacitní proudy, jdoucí do země.

Kromě metod ryze počtářských se pro řešení těchto sítí používá také zařízení analogových. Pro sítě vn stačí i stejnosměrné modely, pro sítě vvn jsou nutné střídavé modely sítí. Modely sítí možno označit jako přímá analogová zařízení. Analogové počítače se označují jako nepřímá analogová zařízení. Rozdělení je v tom, že u přímé analogie přísluší určité fyzikální veličině originálu opět jen jedna určitá veličina v analogovém zařízení. Při nepřímé analogii je však možné, aby různé fyzikální veličiny byly převedeny na jedinou veličinu v analogovém počítači.

Po stránce fyzikálních analogií je jasná výhoda modelů elektrických sítí. Jejich nevýhodou jest však, že jsou to stroje pouze jednoúčelové a dále okolnost, že při nastavování analogických veličin je nebezpečí osobních chyb. Proto se v poslední době vracíme při řešení velkých sítí opět k počtářským metodám, používajíce při tom ovšem služeb moderních číslicových počítacích strojů.

Propočty sítí metodou obvodových proudů nebo uzlových napětí maticovým počtem by byly zřejmě bez použití číslicových počítacích strojů velmi problematické pro svoji neobyčejnou matematickou pracnost a obtížnost (hlavně inverse matic). Poslední uváděná metoda je — možno říci — přímo vykombinována s ohledem na velké možnosti počítacích strojů.

Pořizovací náklady těchto strojů jsou zřejmě konkurenční oněm, které je třeba vynaložit na sestrojení modelu střídavé sítě, doba řešení je kratší a stroj může být samozřejmě použit i pro řešení naprosto jiných úloh a tak může být daleko lépe využit. Proto je metodika moderních řešení a propočtů elektrických sítí, které jsou zaměřeny na využití všech možností číslicových počítacích strojů oborem stále důležitějším.

LITERATURA

[1] *Fässler, E.:* Methoden zur Untersuchung elektrischer Netze. Brown-Boveri Mitteilungen, 1961, č. 5—6, s. 313—320.

[2] *Gillis, D.:* Nodal Iterative Solution of Power Flow Problems. Trans. AIEE III, 1957, s. 803—809.

[3] *Hlavsa, V.:* Řešení elektrických obvodů. ESČ (Praha), 1948.

[4] *Hlavsa, V.:* Praktické základy teorie elektrických lineárních obvodů. Praha, SNTL 1954.

[5] *Horák, K.:* Výpočet složité zauzlené sítě pomocí číslicového počítače. Elektrotechnický obzor, 1962, č. 12.

[6] *Horák, Z.:* Technická fyzika. Praha, 1960.

[7] *Kučera, J.—Horák, Z.:* Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice. Praha, Nakl. ČSAV 1963.

[8] *Matěna, Š.:* Řešení obecně uzavřených a zauzlených sítí elektrovodných. Elektrotechnický obzor, 1936, s. 515, 550.

[9] *Matěna, Š.:* 19. zasedání mezinárodního kongresu o sítích „vvn" CIGRE v Paříži. Elektrotechnický obzor, 1963, s. 303.

[10] *Pavlovský—List:* Technický průvodce IX. Elektrické sítě. Praha, SNTL 1963.

[11] *Štěpina, J.:* Fyzikální podstata řešení elektrických obvodů podle G. Krona. Elektrotechnický obzor, 1954, s. 516.

[12] *Petržílka, V.—Šafrata, S.:* Elektřina a magnetismus. Praha, Nakl. ČSAV 1956.

[13] *Schmidtmayer, J.:* Maticový počet a jeho užití v elektrotechnice. Praha, SNTL 1954.

[14] *Promberger, M.:* Použití matic a tensorů v teoretické elektrotechnice. Praha, SNTL 1955.

[15] *Zaborszky, J.—Rittenhouse, J. W.:* Electric Power Transmission. New York, The ronald Press Company 1964.

[16] *Zeljach, E. V.:* Osnovy obščej teorii linějnych električeskich schem. Moskva, Gosizdat 1951.

[17] *Zimmermann, F.:* Berechnung knotenpunktbelasteter Maschnetze mit Matrizen. Elektrotechnische Zeitschrift, 1953, s. 45—50.

[18] *Mikuláš, J.—Vlček, Z.:* Výpočet chodu elektrické sítě na číslicovém počítači NE 803 B. Elektrotechnický obzor, 1964, s. 1—7.

[19] *Brown, J.—Tinney, W.:* Digital Solution for Large Power Networks Trans. AIEE III, 1947, s. 347.

РЕЗЮМЕ

К ВОПРОСУ О СЕТИ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

ЛАДИСЛАВ ФРАНЦ

Распределение токов и падения напряжения в больших сетях определялось до сих пор главным образом при помощи постоянных и переменных моделей сетей.

С развитием счётно-цифровых вычислительных машин были созданы условия для использования вычислительных методов. Вычислительные методы, основанные на матричном и тензорном исчислениях слишком сложны и кропотливы и их применение в практике стало возможным лишь благодаря счётно-вычислительным машинам.

В настоящее время этим методам уделяется большое внимание. Настоящая работа знакомит с новыми аспектами и приводит объяснение методики этих вычислений. В статье излагаются и определяются различия между электрическими контурами и электрическими распределительными сетями. Приводится приложение числового решения электрических контуров к решению сетей при разных формах их питания. Даются правила этих приложений, главным образом для метода контурных токов и напряжений в концах разветвления.

В заключение автор статьи обращает внимание на специальные проблемы сетей с. в. н. и объясняет принцип и возможности применения новейших методов итерации. В работе помещены иллюстративные нумерические примеры, решённые частично при помощи счётно-цифровой вычислительной машины.

SUMMARY

THE CONTRIBUTION TO SOLVING OF HIGH VOLTAGE NETWORKS

LADISLAV FRANC

The distribution of power — flows and of voltage — decreases in a large network was stated till the present time mainly by means of direct and a—c network — analyzer.

With the development of digital computors the conditions were established for using the numerical methods.

The calculating methods, based on the matrix — and tensor — evaluation are suitable for a network, so complicated and laborious, that its practical use will be enabled only by using digital computors.

At the present time a great deal of attention will be paid to these methods.

This paper carries new views and new explanations with the regard to the methodology of these calculations. It's explaining and defining the differences between the electrical circuits and the electrical network. The numerical calculation of the electrical circuits is suitable for the solution of the network by different ways of their charging.

This method is determining as well the axioms of these applications — mainly for the use of methods of circuit — flows and of the nodal tension.

The conclusion draws a great deal of attention to the special problems of vvn — network and is explaining the principles and possibilities of the iterative method recently evaluated.

The paper will be supplied by illustrating numerical examples that are solved partially by means of a digital computor.