Jan Peřina

Integrální rovnice v teorii optického zobrazení

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 6 (1965), No. 1, 49--(60)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119833

1965 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 18.

Katedra teoretické fyziky a astronomie přírodovědecké fakulty.
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Bedřich Havelka, doktor věd.

INTEGRÁLNÍ ROVNICE V TEORII OPTICKÉHO ZOBRAZENÍ

JAN PEŘINA

(Předloženo 4. června 1964)

1. Úvod

V této práci rozvedeme některé výsledky, které jsou obsaženy v pracích [1], [2].

Základní úlohou teorie optického zobrazení je určení předmětu popsaného neznámou funkcí $u(x, y)$, je-li znám obraz, vytvořený optickou soustavou, který je popsán funkcí $U(x, y)$. Vzniká otázka, zda je vůbec možno určit funkci $u(x, y)$, tj. určit jemnou strukturu předmětu z pozorované funkce $U(x, y)$, která se obyčejně velmi málo podobá předmětové funkci $u(x, y)$. Odpověď na tuto otázku je těsně svázána se studiem spektrálního rozkladu funkce $u(x, y)$. Nechť $u(x, y)$ popisuje rozdělení amplitudy v předmětu. Potom funkce $u(x, y)$ v případě konečného předmětu bude vně jistého konečného intervalu rovna nule, tj. bude finitní funkcí. Označme Fourierovu transformaci funkce $u(x, y)$ jako $\tilde{u}(k, l)$; tedy funkce $u(x, y)$ je inversní Fourierovou transformací funkce $\tilde{u}(k, l)$. Protože přímá a inversní transformace jsou vzájemné, můžeme za výchozí považovat funkci $\tilde{u}(k, l)$, takže její Fourierův obraz je funkce finitní. Funkce $\tilde{u}(k, l)$ je tedy funkce s finitním spektrem.

Takovéto funkce jsou charakteristické pro problémy v optice. Ukazuje se, že tyto funkce těsně souvisejí s celistvými funkcemi komplexní proměnné (věta Paleyova—Wienerova).

Matematická formulace výše uvedené základní úlohy teorie optického zobrazení vede na integrální rovnici. V případě zobrazení ideálně koherentním nebo ideálně nekoherentním světlem obdržíme Fredholmovu rovnici a v případě zobrazení částečně koherentním světlem obdržíme algebraickou nelineární integrální rovnici. Takže řešitelnost základní úlohy je určena podmínkami existence řešení příslušné integrální rovnice.

Zvláštní úlohou teorie optického zobrazení je nalézt takovou předmětovou funkci $u(x, y)$, která se zobrazuje optickou soustavou podobně s koeficientem podobnosti $\frac{1}{\lambda}$, tj. $U(x, y) = \frac{1}{\lambda} u(x, y)$. Pro případ ideálně koherentního a ideálně nekoherentního světla byla tato úloha řešena pro jednorozměrné funkce v pracech [3], [4], [5].

Zde si všimneme hlavně případu zobrazení částečně koherentním světlem.

2. Zobrazovací integrální rovnice pro zobrazení v ideálně koherentním a ideálně nekoherentním světle

Mějme optickou soustavu, která je charakterizována rozptylovou funkcí K. Uvažujme v předmětovém prostoru spojitou reálnou strukturu $u(x', y')$, definovanou na obdélníku $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Amplituda paprsků vycházejících z elementu struktury $\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$ je $u(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$ a rozdělení amplitudy v obrazovém prostoru bude

$$u(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' K(\xi - x, \eta - y), \tag{1}$$

kde (ξ, η) je bod sdružený s bodem (x', y'). Nechť pro jednoduchost je příčné zvětšení rovno jedné, takže $\xi = x'$, $\eta = y'$. Celá předmětová struktura dává v obrazovém prostoru amplitudu

$$U(x, y) = \int_a^b \int_c^d K(x' - x, y' - y)\, u(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{2}$$

To je Fredholmova integrální rovnice 1. druhu pro určení předmětové struktury $u(x', y')$, je-li známa obrazová struktura $U(x, y)$ a probíhá-li zobrazení při ideálně koherentním osvětlení.

Požadujeme-li, aby se předmětová struktura zobrazovala podobně, musí platit

$$U(x, y) = \frac{1}{\lambda}\, u(x, y), \tag{3}$$

kde $\frac{1}{\lambda}$ je koeficient podobnosti (reálné číslo). Dosazením (3) do (2) obdržíme Fredholmovu rovnici 2. druhu (homogenní) ($x \in \langle a, b\rangle$, $y \in \langle c, d\rangle$)

$$u(x, y) = \lambda \int_a^b \int_c^d K(x' - x, y' - y)\, u(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{4}$$

Řešením této rovnice (pokud bude existovat) budou struktury $u(x, y)$, které se zobrazí ideálně ve smyslu (3).

Pro případ zobrazení ideálně nekoherentním světlem obdržíme ($x \in \langle a, b\rangle$, $y \in \langle c, d\rangle$)

$$u^2(x, y) = \lambda^2 \int_a^b \int_c^d K^2(x' - x, y' - y)\, u^2(x', y')\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{5}$$

V tomto případě budou mít fyzikální smysl jen ta řešení, pro něž platí $u^2(x, y) > 0$.

Rovnice (4) a (5) nazveme zobrazovací integrální rovnice. Jejich řešení lze provést Fredholmovými metodami.

3. Zobrazovací integrální rovnice pro zobrazení v částečně koherentním světle

Uvažujme v předmětové rovině dva body o souřadnicích $(x', y') = \vec{r}'$, $(x'', y'') = \vec{r}''$. První bod přispívá do bodu o souřadnicích $(x, y) = \vec{r}$ v obrazové rovině amplitudou

$$\mathrm{d}U(\vec{r}; t) = K(\vec{r}' - \vec{r})\, u(\vec{r}'; t)\,\mathrm{d}^2\vec{r}', \tag{6}$$

a druhý bod přispívá amplitudou

$$dU(\vec{r}; t) = K(\vec{r}'' - \vec{r})\, u(\vec{r}''; t)\, d^2\vec{r}'', \tag{7}$$

kde $d^2\vec{r} = dx\, dy$. Tyto amplitudy budou obecně záviset na čase. Celková intenzita v bodě $\vec{r}$ bude

$$U^2(\vec{r}; t) = \int_a^b \int_c^d K(\vec{r}' - \vec{r})\, K(\vec{r}'' - \vec{r})\, u(\vec{r}'; t)\, u(\vec{r}''; t)\, d^2\vec{r}'\, d^2\vec{r}''. \tag{8}$$

Pro pozorování bude mít význam časová střední hodnota intenzity. Zaveďme veličinu:

$$\gamma(\vec{r}', \vec{r}'') = \frac{\langle u(\vec{r}'; t)\, u(\vec{r}''; t)\rangle}{\sqrt{\langle u^2(\vec{r}'; t)\rangle}\sqrt{\langle u^2(\vec{r}''; t)\rangle}}, \tag{9}$$

kterou nazveme koeficient částečné koherence (viz např. [6]). Ve výrazu (9) závorky označují časovou střední hodnotu.

Jestliže provedeme ve výrazu (8) časovou střední hodnotu, použijeme výrazu (9) a zavedeme-li efektivní veličiny

$$\langle U^2(\vec{r}; t)\rangle = U^2(\vec{r}),$$
$$\langle u^2(\vec{r}; t)\rangle = u^2(\vec{r}), \tag{10}$$

obdržíme

$$U^2(\vec{r}) = \int_a^b \int_c^d K(\vec{r}' - \vec{r})\, K(\vec{r}'' - \vec{r})\, \gamma(\vec{r}', \vec{r}'')\, u(\vec{r}')\, u(\vec{r}'')\, d^2\vec{r}'\, d^2\vec{r}''. \tag{11}$$

Klademe-li

$$U(\vec{r}) = \frac{u(\vec{r})}{\lambda},$$

obdržíme zobrazovací integrální rovnici (algebraickou nelineární integrální rovnici) ($\vec{r} \in \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$)

$$u^2(\vec{r}) = \lambda^2 \int_a^b \int_c^d K(\vec{r}' - \vec{r})\, K(\vec{r}'' - \vec{r})\, \gamma(\vec{r}', \vec{r}'')\, u(\vec{r}')\, u(\vec{r}'')\, d^2\vec{r}'\, d^2\vec{r}''. \tag{12}$$

Z rovnice (12) můžeme jako zvláštní případ odvodit rovnice (4) a (5). Pro ideálně koherentní světlo je pro všechny body

$$\gamma(\vec{r}', \vec{r}'') = 1, \tag{13}$$

a tedy po odmocnění rovnice (12) obdržíme rovnici (4). Pro ideálně nekoherentní světlo je až na konstantu

$$\gamma(\vec{r}', \vec{r}'') = \delta(\vec{r}' - \vec{r}''), \tag{14}$$

kde δ označuje Diracovu funkci a z rovnice (12) obdržíme rovnici (5).

K problému zobrazení můžeme přistoupit také z tohoto stanoviska. (Pro ideálně koherentní světlo viz [4]). Optické soustavě můžeme přiřadit operátor, který zobrazuje řešení vlnové rovnice z předmětového prostoru na řešení vlnové rovnice v obrazovém prostoru. Nechť vlny v předmětovém prostoru jsou řešením vlnové rovnice:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \zeta^2} + k^2 E = 0 \tag{15}$$

a v obrazovém prostoru

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 E'}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2 E'}{\partial \zeta'^2} + k'^2 E' = 0, \tag{16}$$

kde $k = \frac{\omega}{c}$, $k' = \frac{\omega}{c'}$, ω je kruhová frekvence a c, c' jsou rychlosti světla v předmětovém a obrazovém prostoru. Označme $(\xi, \eta) = \vec{\varphi}$.

Řešení rovnice (15) můžeme psát ve tvaru

$$E(\vec{\varphi}, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r})\, e^{-i\left(\vec{r}\vec{\varphi} + \sqrt{k^2 - |\vec{r}|^2}\zeta\right)} \mathrm{d}^2\vec{r}, \tag{17}$$

kde $u(\vec{r})$ je reálná váhová funkce. Optické soustavě nechť odpovídá integrální operátor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{r} - \vec{r}') \dots \mathrm{d}^2\vec{r}, \tag{18}$$

který převádí řešení (17) z předmětového prostoru na řešení

$$E'(\vec{\varphi}', \zeta') = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r})\, e^{-i\left(\vec{r}'\vec{\varphi}' + \sqrt{k'^2 - |\vec{r}'|^2}\zeta'\right)} K(\vec{r} - \vec{r}')\, \mathrm{d}^2\vec{r}\, \mathrm{d}^2\vec{r}' \tag{19}$$

rovnice (16) v obrazovém prostoru. Uvažujme speciálně předmětovou rovinu $\zeta = 0$ a ta nechť se zobrazí do obrazové roviny $\zeta' = 0$. Potom místo (17) a (19) máme

$$E(\vec{\varphi}, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r})\, e^{-i\vec{r}\vec{\varphi}} \mathrm{d}^2\vec{r}, \tag{20}$$

$$E'(\vec{\varphi}', 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r})\, e^{-i\vec{r}'\vec{\varphi}'} K(\vec{r} - \vec{r}')\, \mathrm{d}^2\vec{r}\, \mathrm{d}^2\vec{r}'. \tag{21}$$

Uvažujme v předmětovém prostoru dvě řešení vlnové rovnice ($\zeta = \zeta' = 0$)

$$E(\vec{\varphi}_i, 0; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r}_i; t)\, e^{-i\vec{r}_i\vec{\varphi}_i} \mathrm{d}^2\vec{r}_i \qquad (i = 1, 2). \tag{22}$$

Těmto řešením odpovídají v obrazovém prostoru řešení

$$E'(\vec{\varphi}_i', 0; t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r}_i; t)\, e^{-i\vec{r}_i'\vec{\varphi}_i'} K(\vec{r}_i - \vec{r}_i')\, \mathrm{d}^2\vec{r}_i\, \mathrm{d}^2\vec{r}_i', \qquad (i = 1, 2). \tag{23}$$

Střední časové hodnoty vzájemné intenzity v předmětovém a obrazovém prostoru jsou

$$J(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2) = \langle E(\vec{\varphi}_1, 0; t)\, E^*(\vec{\varphi}_2, 0; t)\rangle, \tag{24}$$

$$J'(\vec{\varphi}_1', \vec{\varphi}_2') = \langle E'(\vec{\varphi}_1', 0; t)\, E'^*(\vec{\varphi}_2', 0; t)\rangle.$$

Podmínku podobnosti napíšeme ve tvaru

$$J'(\vec{\varphi}_1', \vec{\varphi}_2') = \frac{1}{\lambda^2} J\left(\frac{\vec{\varphi}_1'}{\beta}, \frac{\vec{\varphi}_2'}{\beta}\right), \tag{25}$$

kde β je příčné zvětšení. Dosadíme-li do (25) užitím (22), (23) a (24), obdržíme

$$\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{r}_1 - \vec{r}_1')\, K(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')\, \langle u(\vec{r}_1; t)\, u(\vec{r}_2; t)\rangle\, e^{-i(\vec{r}_1'\vec{\varphi}_1' - \vec{r}_2'\vec{\varphi}_2')}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2' =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle u(\vec{r}_1; t)\, u(\vec{r}_2; t)\rangle\, e^{-i\frac{1}{\beta}(\vec{r}_1\vec{\varphi}_1' - \vec{r}_2\vec{\varphi}_2')}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2. \tag{26}$$

Zavedeme-li koeficient částečné koherence a efektivní hodnoty, obdržíme

$$\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{r}_1 - \vec{r}_1')\, K(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')\, \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_1)\, u(\vec{r}_2)\, e^{-i(\vec{r}_1'\vec{\varphi}_1' - \vec{r}_2'\vec{\varphi}_2')}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2' =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_1)\, u(\vec{r}_2)\, e^{-i\frac{1}{\beta}(\vec{r}_1\vec{\varphi}_1' - \vec{r}_2\vec{\varphi}_2')}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2. \tag{27}$$

Zaměňme nyní vlevo $\vec{\varphi}_i' \to \vec{\varphi}_i\beta$, $\vec{r}_i' \to \frac{\vec{r}_i}{\beta}$, $\vec{r}_i \to \vec{r}_i'$ a vpravo $\vec{\varphi}_i' \to \vec{\varphi}_i\beta$ $(i = 1, 2)$, potom

$$\frac{1}{\beta^4} \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\vec{r}_1' - \frac{\vec{r}_1}{\beta}\right)$$

$$K\left(\vec{r}_2' - \frac{\vec{r}_2}{\beta}\right) \gamma(\vec{r}_1', \vec{r}_2')\, u(\vec{r}_1')\, u(\vec{r}_2')\, e^{-i(\vec{r}_1\vec{\varphi}_1 - \vec{r}_2\vec{\varphi}_2)}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2' =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_1)\, u(\vec{r}_2)\, e^{-i(\vec{r}_1\vec{\varphi}_1 - \vec{r}_2\vec{\varphi}_2)}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2 \tag{28}$$

a odtud až na množinu míry nula platí

$$u(\vec{r}_1)\, \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_2) = \frac{\lambda^2}{\beta^4} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} K\left(\vec{r}_1' - \frac{\vec{r}_1}{\beta}\right) K\left(\vec{r}_2' - \frac{\vec{r}_2}{\beta}\right) .$$

$$.\, u(\vec{r}_1')\, \gamma(\vec{r}_1', \vec{r}_2')\, u(\vec{r}_2')\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2'. \tag{29}$$

Z této rovnice obdržíme rovnici (11), jestliže klademe $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$ a $\beta = 1$ [neboť $\gamma(\vec{r}, \vec{r}) = 1$].

Podle (24) můžeme psát

$$J(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{r}_1)\, \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_2)\, e^{-i(\vec{r}_1\vec{\varphi}_1 - \vec{r}_2\vec{\varphi}_2)}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2, \tag{30}$$

$$J'(\vec{\varphi}_1', \vec{\varphi}_2') = \int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{r}_1 - \vec{r}_1')$$

$$K(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')\, u(\vec{r}_1)\, \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_2)\, e^{-i(\vec{r}_1'\vec{\varphi}_1' - \vec{r}_2'\vec{\varphi}_2')} d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2'.$$

Odtud vyloučením veličiny $u(\vec{r}_1)\, \gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, u(\vec{r}_2)$ plyne integrální vztah

$$J'(\vec{\varphi}_1', \vec{\varphi}_2') = \int\int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{\varphi}_1', \vec{\varphi}_2'; \vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2)\, J(\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2)\, d^2\vec{\varphi}_1\, d^2\vec{\varphi}_2, \tag{31}$$

kde

$$A(\vec{\varphi}_1', \vec{\varphi}_2'; \vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} K(\vec{r}_1 - \vec{r}_1')$$

$$K(\vec{r}_2 - \vec{r}_2')\, e^{i(\vec{r}_1\vec{\varphi}_1 - \vec{r}_2\vec{\varphi}_2 - \vec{r}_1'\vec{\varphi}_1' + \vec{r}_2'\vec{\varphi}_2')}\, d^2\vec{r}_1\, d^2\vec{r}_2\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2'. \tag{32}$$

4. Dispersní vztahy v teorii optického zobrazení

V úvodu jsme upozornili na významnou roli finitnosti zobrazovaných předmětů. Na základě této okolnosti bylo v práci [5] zavedeno nové pojetí rozlišovací schopnosti, které značně zobecňuje klasické pojetí a které odpovídá současným experimentálním možnostem. Toto pojetí se opírá o vlastnosti existence, jednoznačnosti a tzv. korektnosti řešení zobrazovací integrální rovnice. Pro třídu L_2 funkcí, pro které $u(x) = 0$, $x \notin (a, b)$ (konečný předmět) podle tohoto pojetí neexistuje hranice rozlišovací schopnosti.

V tomto článku si všimneme analytických vlastností rozptylových funkcí, přitom využijeme toho faktu, že Fourierovy obrazy těchto funkcí jsou finitní funkce, tj. že rozptylové funkce jsou funkce s finitním Fourierovým spektrem.

Výchozím bodem bude pro nás věta:

Věta (Paleyova—Wienerova). *Aby funkce $f(x)$, integrovatelná v kvadrátu, se dala psát ve tvaru*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-ikx} \tilde{f}(k)\, dk, \tag{33}$$

kde $\tilde{f}(k)$ leží v prostoru $L_2(-\alpha, +\alpha)$, tj. aby $f(x)$ byla funkcí s finitním a v kvadrátu integrace schopným spektrem na intervalu $(-\alpha, +\alpha)$, je nutné a stačí, aby mohla být prodloužena do celé komplexní roviny jako celistvá funkce stupně $\leqq \alpha$.

Tuto větu lze snadno zobecnit na libovolný počet rozměrů.

Omezme se pro jednoduchost na případ jednorozměrné integrální rovnice:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x' - x)\, u(x')\, \mathrm{d}x'. \tag{34}$$

Zavedeme-li integrální rozptylový operátor

$$C(x' - x) = \lambda \int K(x' - x) \ldots \mathrm{d}x', \tag{35}$$

můžeme psát

$$u(x) = C(x' - x)\, u(x'). \tag{36}$$

Předpokládejme, že $C(x' - x)$ je komplexní operátor. Fyzikální smysl tohoto předpokladu je v tom, že optická soustava ovlivňuje jak fázově, tak amplitudově obraz předmětové struktury.

Označme $x' - x = z$ a předpokládejme, jak už bylo řečeno, že operátor $C(z)$ má finitní Fourierovo spektrum a je v kvadrátu integrace schopen. Potom tento operátor můžeme prodloužit do celé komplexní roviny z na základě Paley—Wienerovy věty; můžeme na něj tedy aplikovat Cauchyho integrální formuli a odtud odvodit dispersní vztah. Možnost využití Paley—Wienerovy věty velmi usnadňuje zavedení dispersních vztahů do teorie optického zobrazení ve srovnání se zavedením těchto vztahů do kvantové teorie pole, kde je obtížné dokázat, že operátor rozptylu $S(E)$ lze prodloužit jako funkci energie do horní poloroviny (viz např. [7]) a kde je nutno odstranit z integrační oblasti oblast záporných energií a oblast nefyzikální. Tyto obtíže v teorii optického zobrazení odpadají.

Nechť $C(z)$ splňuje dále tyto předpoklady:
Pro libovolné číslo $\delta > 0$ existuje konstanta $\varepsilon(\delta)$ tak, že

$$|\, C(z)\, | \leqq \frac{\varepsilon(\delta)}{|\, z\, |}, \qquad \mathrm{Im}\, z > \delta. \tag{37}$$

V případě zobecněných funkcí by bylo ještě třeba přidat určitý předpoklad o integraceschopnosti $C(z)$ pro $\mathrm{Im}\, z \to 0$.

Sestrojme uzavřenou křivku z úsečky $(i\delta - R,\ i\delta + R)$ a polokružnice o poloměru R v horní polorovině. Vzhledem k (37) bude

$$\int \frac{C(z')}{z' - z}\, \mathrm{d}z'$$

po této polokružnici při $R \to \infty$ konvergovat k nule a z Cauchyho věty máme

$$C(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\delta - \infty}^{i\delta + \infty} \frac{C(z')}{z' - z}\, \mathrm{d}z', \qquad \mathrm{Im}\, z > \delta > 0. \tag{38}$$

Provedeme-li přechod $\delta \to 0$ a užijeme-li identity ($\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im} z' = 0$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{z' - z - i\varepsilon} = P \frac{1}{z' - z} + \pi i \delta(z' - z), \tag{39}$$

kde P označuje hlavní hodnotu integrálu v Cauchyho smyslu, dostáváme

$$C(z) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(z')}{z' - z} dz' \qquad (-\infty < z < + \infty) \tag{40}$$

a odtud

$$\operatorname{Re} C(z) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} C(z')}{z' - z} dz' \qquad (-\infty < z < +\infty). \tag{41}$$

Dispersní vztah lze odvodit za slabšího předpokladu, než je předpoklad (37): Nechť existuje takové přirozené číslo $n > 0$, že pro libovolné reálné číslo $\delta > 0$ existují reálné konstanty $\varepsilon_j(\delta)$ takové, že

$$| C(z) | \leqq \varepsilon_0(\delta) \, | z |^n + \ldots + \varepsilon_n(\delta), \ \operatorname{Im} z > \delta. \tag{42}$$

Tento případ lze převést na předcházející, jestliže budeme místo $C(z)$ uvažovat

$$G(z) = \frac{C(z)}{(z - z_0 + i\varepsilon)^{n+1}}. \tag{43}$$

$G(z)$ splňuje předpoklad (37) pro libovolné reálné z_0 a $\varepsilon > 0$.

Píšeme-li pro $G(z)$ vztah (40), obdržíme

$$C(z) = \frac{(z - z_0 + i\varepsilon)^{n+1}}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(z') \, dz'}{(z' - z)(z' - z_0 + i\varepsilon)^{n+1}},$$

$$(-\infty < z, \ z_0 < + \infty). \tag{44}$$

Užitím identity ($\operatorname{Im} z' = \operatorname{Imt} z_0 = 0$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{(z' - z_0 + i\varepsilon)^{n+1}} = P \frac{1}{(z' - z_0)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \pi i}{n!} \delta^{(n)}(z' - z_0), \tag{45}$$

obdržíme

$$C(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(z') \, dz'}{(z' - z)(z' - z_0)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} C^{(k)}_{(z_0)} \frac{(z - z_0)^k}{k!}. \tag{46}$$

Takže platí dispersní vztah

$$\operatorname{Re} C(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} C(z') \, dz'}{(z' - z)(z' - z_0)^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re} C^{(k)}_{(z_0)} \frac{(z - z_0)^k}{k!}. \tag{47}$$

Tento dispersní vztah je splněn až na libovolný polynom stupně n a nazývá se dispersní vztah s odečítáním.

Odvozený dispersní vztah platí pro operátor závislý na jedné proměnné. Tento předpoklad je splněn v isoplanatické oblasti. Jestliže operátor závisí na dvou proměnných, můžeme odvodit dvojný dispersní vztah.

Předpokládejme, že operátor $C(z_1; z_2)$ má vzhledem k oběma proměnným finitní Fourierovo spektrum a že je podle těchto proměnných v kvadrátu integrace schopen. Potom je možno jej podle obou proměnných prodloužit na základě Paley—Wienerovy věty do celé komplexní roviny. Nechť dále existují taková přirozená čísla $m, n > 0$, že pro libovolné reálné číslo $\delta > 0$ existují reálná čísla $\varepsilon_i(\delta)$ taková, že platí

$$|C(z_1, z_2)| \leq \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{ik}(\delta) |z_1|^i |z_2|^k, \quad \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 > \delta. \tag{48}$$

Na základě těchto předpokladů lze psát

$$C(z_1, z_2) = \frac{(z_1 - z_{10})^{m+1}}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(z_1', z_2)\, dz_1'}{(z_1' - z_1)(z_1' - z_{10})^{m+1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \frac{(z_1 - z_{10})^i}{i!} \frac{\partial^i [C(z_{10}, z_2)]}{\partial z_1^i} \tag{49}$$

($-\infty < z_1, z_{10} < +\infty$, z_2 fixováno na reálné ose).
Dále

$$C(z_1', z_2) = \frac{(z_2 - z_{20})^{n+1}}{\pi i} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(z_1', z_2')\, dz_2'}{(z_2' - z_2)(z_2' - z_{20})^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \frac{(z_2 - z_{20})^k}{k!} \frac{\partial^k [C(z_1', z_{20})]}{\partial z_2^k} \tag{50}$$

($-\infty < z_2, z_{20} < +\infty$, z_1' fixováno na reálné ose).
Dosadíme-li do (49) z (50) a analogický vztah pro $C(z_{10}, z_2)$, obdržíme po oddělení reálných a imaginárních částí dispersní vztah

$$\operatorname{Re} C(z_1, z_2) =$$

$$= \frac{(z_1 - z_{10})^{m+1}(z_2 - z_{20})^{n+1}}{(\pi i)^2} P \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} C(z_1', z_2')\, dz_1'\, dz_2'}{(z_1' - z_1)(z_2' - z_2)(z_1' - z_{10})^{m+1}(z_2' - z_{20})^{n+1}} +$$

$$+ \frac{(z_1 - z_{10})^{m+1}}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(z_2 - z_{20})^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} C(z_1', z_{20})\, dz_1'}{(z_1' - z_1)(z_1' - z_{10})^{m+1}} +$$

$$+ \frac{(z_2 - z_{20})^{n+1}}{\pi} \sum_{i=0}^{m} \frac{(z_1 - z_{10})^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z_1^i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} C(z_{10}, z_2')\, dz_2'}{(z_2' - z_2)(z_2' - z_{20})^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{(z_1 - z_{10})^i}{i!} \frac{(z_2 - z_{20})^k}{k!} \frac{\partial^{i+k}}{\partial z_1^i \partial z_2^k} \operatorname{Re} C(z_{10}, z_{20}), \tag{51}$$

který je splněn až na libovolný polynom stupně $m + n$.

Zatím jsme odvodili dispersní vztahy na základě Cauchyho integrální formule. Existují však obecnější integrální representace, např. Weilova—Bergmannova

$$(2\pi i)^2 f(z_1, z_2) = \sum_{i<j} \int\int \frac{(P_i Q_j - Q_i P_j) f(z_1', z_2') \, dz_1' \, dz_2'}{[Z_i(z_1', z_2') - Z_i(z_1, z_2)][Z_j(z_1', z_2') - Z_j(z_1, z_2)]}, \tag{52}$$

kde P, Q jsou analytické funkce proměnných z_1, z_2, z_1', z_2' a platí

$$Z_i(z_1', z_2') - Z_i(z_1, z_2) = (z_1' - z_1) P_i + (z_2' - z_2) Q_i. \tag{53}$$

Z těchto representací lze odvodit obecnější dispersní vztahy.

Fyzikální smysl dispersních vztahů je ten, že amplitudový a fázový zásah optické soustavy při zobrazení nejsou libovolné na sobě nezávislé, ale souvisí spolu dispersním vztahem. V této práci se nebudeme zabývat konkretním použitím dispersních vztahů při výpočtech. Jen poznamenejme, že amplitudový zásah optické soustavy je určen veličinou $G(x) = \sqrt{A^2(x) + B^2(x)}$ a fázový zásah veličinou $\varphi(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{B(x)}{A(x)}$, kde $A(x) = \operatorname{Re} C(x)$ a $B(x) = \operatorname{Im} C(x)$. Pro případ jednoduchého dispersního vztahu bez odečítání lze úlohu o souvislosti veličin $G(x)$ a $\varphi(x)$ převést na homogenní singulární integrální rovnici a obecná souvislost mezi těmito veličinami je určena vztahy

$$G(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\pi} P \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x')}{x'-x} \mathrm{d}x'} \cdot Q_{\varkappa-1}(x)$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} P \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(x') - \ln Q_{\varkappa-1}(x')}{x' - x} \mathrm{d}x',$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je libovolný polynom stupně nejvýše $(\varkappa - 1)$ a $\varkappa > 0$ je index singulární integrální rovnice. Tento fakt je tedy důsledkem finitnosti spektra rozptylového operátoru.

Poznámka 1. Dispersní vztah lze psát místo pro rozptylový operátor $C(z)$ také pro komplexní funkci přenosu kontrastu $D(R)$. To je pochopitelné, neboť operátor $C(z)$ nebo komplexní funkce přenosu kontrastu $D(R)$ jsou jen různé representace vlnového děje.

Poznámka 2. Finitnost spektra rozptylového operátoru $C(z)$ je určitým vyjádřením „principu kausality" v teorii optického zobrazení. Uvažujme nejprve funkci $f(t)$ závislou na čase t. Pro Fourierův obraz v komplexní rovině E platí

$$f(E) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) \, e^{iEt} \, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t) \, e^{-\operatorname{Im} E \cdot t} \, \mathrm{e}^{i \operatorname{Re} E \cdot t} \, \mathrm{d}t.$$

Tento integrál bude konvergentní pro $f(t) = 0$, $t < 0$. Potom platí

$$f(E) = \int\limits_{0}^{\infty} \tilde{f}(t) \, \mathrm{e}^{iEt} \, \mathrm{d}t.$$

Tato okolnost je vyjádřením principu kausality. Je třeba poznamenat, že v moderní fyzice má větší význam a opodstatnění princip analytičnosti než princip kausality. V teorii optického zobrazení je výše uvedená podmínka nahrazena podmínkou $\tilde{C}(k) = 0$, $|k| > a$, kde a je reálné číslo, která zaručuje konvergenci integrálu

$$C(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(k)\, e^{izk}\, dk = \int_{-a}^{+a} \tilde{C}(k)\, e^{izk}\, dk.$$

O skutečné kausalitě však nelze mluvit, neboť proměnnou není čas.

5. Závěr

Úlohu o podobnosti mezi předmětem a obrazem jsme pro konečný předmět formulovali na konečném intervalu ($x \in \langle a, b\rangle$, $y \in \langle c, d\rangle$). Tato úloha je obecně řešitelná. Na základě finitnosti spektra rozptylové funkce lze ukázat, že úloha o podobnosti v celé rovině je pro konečný předmět neřešitelná. Pro vzájemnou intenzitu platí vztah:

$$J'(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_a^b \int_c^d K(\vec{r}_1' - \vec{r}_1)\, K(\vec{r}_2' - \vec{r}_2)\, J(\vec{r}_1', \vec{r}_2')\, d^2\vec{r}_1'\, d^2\vec{r}_2'.$$

Užitím věty o Fourierově transformaci konvoluce vidíme, že jestliže rozptylová funkce je funkce s finitním Fourierovým spektrem, bude i obrazová intenzita mít finitní Fourierovo spektrum. Podle Paley—Wienerovy věty nemůže být na základě toho $J'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ rovna nule v konečné oblasti (na základě Paley—Wienerovy věty lze $J'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ analyticky prodloužit do celé komplexní roviny a kdyby byla rovna nule v konečné oblasti, musela by být na základě jednoznačnosti analytického prodloužení rovna nule v celé rovině). I když je tedy $J(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ různá od nuly v konečné oblasti, $J'(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ je různá od nuly v celé rovině.

Nakonec učiňme ještě některé poznámky o dispersních vztazích. Analytičnost funkcí, majících fyzikální smysl, jest schopna nahradit základní rovnice pole (Lagrangeův nebo Hamiltonův formalismus). Na analytičnosti byla nejprve budována kvantová teorie pole (teorie pole bez rovnic pole), zejména pro silné interakce, kde jsou klasické metody nepoužitelné, ale na principu analytičnosti lze budovat i klasickou elektrodynamiku (viz např. [8]). Protože teorie optického zobrazení se v podstatě opírá o klasickou elektrodynamiku, je možno základní vztahy v teorii optického zobrazení formulovat na základě analytičnosti (např. zobrazovací integrální rovnici).

Závěrem děkuji prof. RNDr. B. Havelkovi, DrSc. za námět k této práci a za cenné rady a připomínky.

LITERATURA

[1] *Peřina, J.:* Les relations de dispersion dans la théorie des images optiques. Optica Acta *10*, 1963, s. 337—340.

[2] *Peřina, J.:* Některé metody teorie pole v teorii optického zobrazení. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis *15*, 1964, s. 87—93.

[3] *Mandelštam, L. I.:* Soč. I, 1948, s. 229—241.
[4] *Mandelštam, L. I.:* Soč. II, 1947, s. 388—394.
[5] *Churgin, J. I.—Jakovlev, V. P.:* Metody teoriji celych funkcij v radiofizike, teoriji svjazi i optike. Moskva, GIFML 1962.
[6] *Born, M.—Wolf, E.:* Principles of Optics. London, 1959.
[7] *Bogoljubov, N. N.—Medvedev, B. V.—Polivanov, M. K.:* Voprosy teoriji dispersionnych sootnošenij. Moskva, GIFML 1958.
[8] *Šapiro, I. S.:* Teorija prjamych jadernych reakcij. Moskva, Gos. Atom. Izdat. 1963.

РЕЗЮМЕ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

ЯН ПЕРЖИНА

В настоящей статье формулируется задача о подобии между объектом и образом для изображения при помощи частично когерентного света в виде алгебраического нелинейного интегрального уравнения. Так как ядро этого уравнения является функцией с ограниченным спектром, можно применить теорему Палея-Винера для продолжения ядра в целую комплексную плоскость и составить для него дисперсионное соотношение. Физическим значением этого соотношения является связность амплитудного и фазового влияния оптической системы при изображении.

SUMMARY

INTEGRAL EQUATIONS IN THE THEORY OF OPTICAL IMAGE

JAN PEŘINA

The task of the similarity between an object and its image is formulated for the imaging with the use of partially coherent light in the form of an algebraic nonlinear integral equation. As the kernel of the integral equation is a function with the finite Fourier spectrum, it is possible to use the Paley—Wiener theorem for extension of the kernel in a whole complex plane and to write a dispersion relation for it. The physical meaning of this dispersion relation is represented by the relation between an amplitude and phase influence of optical imaging system.