

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum
Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Oldřich Lepil

Příspěvek k metodice výkladu rezonančních jevů ve vázaných oscilátorech

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol.
5 (1964), No. 1, 95--116

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/119814>

Terms of use:

© Palacký University Olomouc, Faculty of Science, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

*Katedra experimentální fyziky a metodiky fyziky přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. Paed. Dr. Josef Fuka*

PŘÍSPĚVEK K METODICE VÝKLADU REZONANČNÍCH JEVŮ VE VÁZANÝCH OSCILÁTORECH

OLDŘICH LEPIL

(Došlo dne 21. října 1963)

Rezonce je jedním z nejvýznamějších jevů v učivu fyziky na střední škole. Práce vychází z požadavku využití obecných souvislostí mezi rezonančními jevy v mechanice a elektřině, přičemž se klade důraz na výklad dějů ve vázaných oscilátorech. Jsou popsány demonstrace a metodika výkladu dějů ve vázaných oscilátorech souhlasného vlastního kmitočtu v nauce o elektromagnetických kmitcích.

1. Rezonanční jevy v učivu střední školy

Význam učiva o rezonanci je určen především závažnými technickými aplikacemi tohoto jevu v praxi. Na střední škole se s rezonančními jevy setkáme především v nauce o mechanických kmitcích a vlnění a v nauce o elektřině, kde je pojem rezonance dále rozšiřován. V souvislosti s modernizací obsahu učiva fyziky, při níž je zdůrazňováno hlubší pronikání do podstaty fyzikálních jevů a do nitra hmoty, bude dále narůstat význam rezonance ve vztahu k výkladu dějů v mikrosvětě — v molekulách, atomech a jádrech atomů.

Proto je třeba věnovat dostatečnou pozornost především těm částem učiva, v nichž žák získává základní poznatky o rezonanci, a hledat takové vyučovací postupy, které by dávaly předpoklady pro zobečnění a novou aplikaci tohoto učiva v jiných kapitolách středoškolské fyziky. Tento požadavek zdůrazňuje co nejšířší využití obecných souvislostí mezi rezonančními jevy, zařazenými do témat *Kmitavý pohyb a Elektrické kmity a elektromagnetické vlnění*.

Výstavba výkladu rezonance mechanických oscilátorů proto musí být taková, aby bylo možné provést analogickým způsobem i výklad rezonance elektrických oscilátorů. V podstatě je třeba již v mechanice vytvořit nebo připravit podmínky pro vytváření pojmů: *vlastní kmity, nucené kmity, vazba — volná a těsná, oscilátor a rezonátor*. Důležitou složkou výkladu v mechanice jsou také demonstrace, jejichž prostřednictvím získá žák potřebné poznatky, které mu pak usnadní hlubší pochopení náročnějších a méně názorných rezonančních jevů v elektřině.

Jak při vytváření základních pojmů, tak v demonstrační technice rozvíjíme výklad v obou uvedených tématech od izolované kmitající soustavy ke dvojici vázaných oscilátorů a přes řadu vázaných oscilátorů (vlnění v řadě bodů) dospějeme až k vlnění v prostoru. Zvláštní postavení mají při tomto pojetí výkladu rezonančních jevů soustavy vázaných oscilátorů jednak jako spojovací články mezi výkladem o izolovaném oscilátoru a vlněním, jednak při formování představ o vzniku kmitů následkem vzájemného působení těles.

V mechanice se výklad rezonance provádí zpravidla na spřažených kyvadlech. Přitom je pozornost zaměřena na stanovení podmínky rezonance a vznik rázů v soustavě spřažených kyvadel s těsnou vazbou. V analogicky vybudovaném výkladu rezonance kmitavých obvodů bychom měli postupovat obdobně. Pojetí většiny středoškolských učebnic je však takové, že tuto obdobu mezi ději ve spřažených kyvadlech a vázaných oscilačních obvodech nezdůrazňuje.

Jednou z příčin proč není analogie se spřaženými kyvadly dostatečně využito k hlubšímu studiu dějů ve vázaných elektrických oscilátorech je zřejmě i to, že tuto analogii nelze demonstrovat tak jednoduchým způsobem, jakým byla demonstrována spřažená kyvadla. Je tedy vhodné zvolená demonstrace vázaných elektrických oscilátorů podmínkou prohloubení výkladu o rezonančních jevech v elektrických oscilátorech.

Metodika výkladu i demonstrační technika izolovaných kmitajících soustav jak mechanických, tak elektrických je v metodické literatuře dostatečně rozpracována. Podobně je tomu i v případě mechanických vázaných oscilátorů. Zaměříme se proto v další části práce na elektrické vázané oscilátory a techniku demonstrace dějů, které v nich probíhají, s cílem dalšího prohloubení spojitosti učiva o mechanických a elektrických rezonančních jevech.

2. Děje ve vázaných oscilátorech

Rozeborem dějů ve vázaných oscilátorech se podrobně zabývá Košťál [1] a dospívá k některým obecným závěrům pro případ, kdy je spřažení vyjádřeno jako funkce y — spřažení výchylkou, \dot{y} — spřažení první derivací a \ddot{y} — spřažení druhou derivací. Pro naše účely má největší význam spřažení výchylkou nebo druhou derivací, které vystihuje nejčastější případy spřažených oscilátorů, s nimiž se setkáváme při výkladu rezonančních jevů na střední škole.

Uvažujeme-li soustavu dvou vázaných oscilátorů, konajících netlumené kmity, můžeme psát pohybové rovnice obecně ve tvaru

$$a_1 \ddot{y}_2 + (c_1 + c_{11}) \dot{y}_1 + c_{12} y_2 = 0 \quad (1)$$

$$a_2 \ddot{y}_1 + (c_2 + c_{22}) \dot{y}_2 + c_{12} y_1 = 0, \quad (1')$$

kde členy $c_{12} y_2$ a $c_{12} y_1$ přistupují do rovnice kmitavého pohybu vlivem spřažení výchylkou. Z řešení těchto rovnic vyplývá, že v soustavě vzniknou netlumené

kmity o dvou různých úhlových kmitočtech

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{a_2(c_1 + c_{11}) + a_1(c_2 + c_{22}) \pm \sqrt{[a_2(c_1 + c_{11}) - a_1(c_2 + c_{22})]^2 + 4a_1a_2c_{12}^2}}{2a_1a_2}}$$

Poněvadž $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $c_{12}^2 > 0$, nemůže nastat při spřažení případ, že by vznikly kmity pouze jediného kmitočtu. Všimněme si proto, jaké budou úhlové kmitočty ω_1 a ω_2 v případě rezonance, tj. v případě, že platí

$$\omega_0^2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}.$$

Jestliže bude rezonance splněna podmínkou $a_1 = a_2 = a$, $c_1 = c_2 = c$ a spřažení bude symetrické ($c_{11} = c_{22}$), najdeme pro jednotlivé úhlové kmitočty

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c_{11} + c_{12}}{a}} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{c_{11} - c_{12}}{a}}. \quad (2)$$

Ve zvláštním případě, když $c_{11} = c_{12}$ resp. $c_{11} = -c_{12}$ vychází z rovnic (2)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{c_{12}}{a}}; \quad \omega_2 = \omega_0 \quad (3)$$

resp.

$$\omega_1 = \omega_0; \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{c_{12}}{a}}. \quad (3')$$

Z rovnic (3) a (3') vyplývá, že při vzájemném spřažení dvou oscilátorů se jediný rezonanční kmitočet nespřaženého oscilátoru rozpadá na dva rezonanční kmitočty, z nichž jeden je roven původnímu kmitočtu samostatného (nespřaženého) oscilátoru, kdežto druhý je vyšší. Přitom rozdíl obou kmitočtů závisí na velikosti vazby.

Celý děj si pak můžeme představit tak, jakoby v soustavě vázaných oscilátorů vznikaly při rezonanci kmity dvojího úhlového kmitočtu ω_1 a ω_2 . Oba kmitavé pohyby jsou však fázově posunuty o π . Kmity kruhového kmitočtu rovného ω_0 probíhají v obou oscilátorech se stejnou fází, kmity vyššího kmitočtu probíhají s fází opačnou. Jestliže je v počátečním okamžiku jeden oscilátor v klidu, vzniknou v soustavě rázy.

Tyto poznatky o vázaných oscilátorech platí zcela obecně. Proto se v dalším omezíme jen na ty jevy a poznatky, které jsou důležité pro aplikaci dějů v soustavě spřažených kyvadel při výkladu vázaných oscilačních obvodů.

Vazba spřažených kyvadel stejného vlastního kmitočtu se projeví tím, že kyvadla na sebe působí stejně velikými, ale opačnými silami $F_1 = -F_2$, úměrnými rozdílu výchylek y_1 a y_2 kyvadel z rovnovážné polohy. Zrychlení, které je těmito silami uděleno kyvadlům, bude

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = -\frac{K}{m}(y_1 - y_2); \quad a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{K}{m}(y_1 - y_2),$$

kde m je hmota oscilátoru a K tuhost vazby mezi oscilátory. Výraz $\frac{K}{m}$ označíme jako číselník vazby $-k$.

Pohybové rovnice spřažených kyvadel pak budou

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \omega_0^2 y_1 + k(y_1 - y_2) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \omega_0^2 y_2 - k(y_1 - y_2) = 0. \quad (4')$$

Po úpravě dostaneme rovnice

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + k) y_1 - k y_2 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + k) y_2 - k y_1 = 0. \quad (5')$$

Srovnáním rovnic (5) a (5') s rovnicemi (1) a (1') najdeme přímo, že $a_1 = a_2 = 1$; $c_1 = c_2 = \omega_0^2$; $c_{11} = c_{22} = -c_{12} = k$. Z rovnice (3') plyne pro úhlové kmitočty ω_1 a ω_2

$$\omega_1 = \omega_0; \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k}. \quad (6)$$

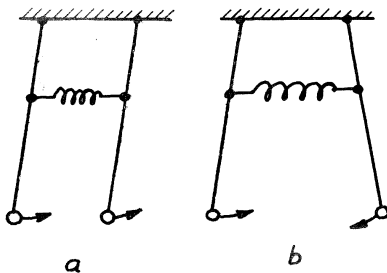
Vznik dvojích kmitů v soustavě spřažených kyvadel si můžeme představit tak, jakoby kyvadla konala současně dva druhy kmitů:

1. *kmitů stejnosměrných* (obr. 1a), kdy se vlastně vazba neprojevuje a soustava kmitá s úhlovým kmitočtem $\omega_1 = \omega_0$;
2. *kmitů protisměrných* (obr. 1b), kdy vzniká síla úměrná vzájemné vzdálenosti kyvadel, doba kmitu se zkracuje a kmitočty narůstá na hodnotu $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k}$.

Spřažená kyvadla demonstrujeme tak, že v počátečním okamžiku je první kyvadlo vychýleno do největší výchylky, kdežto druhé kyvadlo je v klidu. Tyto počáteční podmínky určují celkový průběh kmitů, který dále vyšetříme.

Sečtením a odečtením rovnic (4) a (4') dostaneme

$$\frac{d^2}{dt^2} (y_1 + y_2) + \omega_0^2 (y_1 + y_2) = 0$$



Obr. 1. Stejnosměrné a protisměrné kmity spřažených kyvadel

$$\frac{d^2}{dt^2} (y_1 - y_2) + \omega_0^2 (y_1 + y_2) + 2k(y_1 - y_2) = 0.$$

Označíme-li

$$y_1 + y_2 = x_1 \quad \text{a} \quad y_1 - y_2 = x_2, \quad (7)$$

dostaneme

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2k) x_2 = 0, \quad (8')$$

což jsou rovnice pro kmitavý pohyb, jejichž řešení je

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A'_1 \cos \omega_1 t \quad (9)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t + A'_2 \cos \omega_2 t, \quad (9')$$

kde $\omega_1 = \omega_0$ a $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k}$.

Výchozí stav spřažených kyvadel je stanoven počátečními podmínkami, takže pro $t = 0$ můžeme psát: $y_1 = A$, $\frac{dy_1}{dt} = 0$, $y_2 = 0$, $\frac{dy_2}{dt} = 0$, kde A je největší výchylka prvního kyvadla. Z těchto počátečních podmínek určíme konstanty A_1 , A'_1 , A_2 , A'_2 v rovnicích (9) a (9').

Vzhledem k rovnicím (7) platí, že $x_1 = x_2 = A$, $dx_1 dt = dx_2 dt = 0$. Z rovnic (9) a (9') pak plyne

$$A = A_1 \sin \omega_1 t + A'_1 \cos \omega_1 t$$

$$A = A_2 \sin \omega_2 t + A'_2 \cos \omega_2 t$$

$$0 = A_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - A'_1 \omega_1 \sin \omega_1 t$$

$$0 = A_2 \omega_2 \cos \omega_2 t - A'_2 \omega_2 \sin \omega_2 t.$$

Pro $t = 0$ je potom $A'_1 = A$, $A'_2 = A$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, takže

$$x_1 = A \cos \omega_1 t \quad (10)$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t. \quad (10')$$

Poněvadž podle rovnic (7) je

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{a} \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2},$$

vychází pro okamžité výchylky spřažených kyvadel rovnice

$$y_1 = \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (11)$$

$$y_2 = \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \quad (11')$$

Podle rovnic (11) a (11') koná každé kyvadlo současně kmity stejnosměrné a proti-

směrné, jejichž amplituda je rovna polovině amplitudy největší výchylky prvního kyvadla v čase $t = 0$. S rostoucím t se člen $\cos \omega_0 t$ mění rychleji, takže y_1 se zmenšuje a y_2 roste. Dosáhne-li rozdíl fází stejnosměrných a protisměrných kmitů hodnoty π , bude naopak $y_1 = 0$ a $y_2 = A$. Tento děj se bude neustále opakovat a kyvadla budou konat rázy.

V obecném případě, kdy nejsou splněny počáteční podmínky pro které byl případ řešen, budou rovněž vznikat rázy, avšak amplituda kmitů nikdy neklesne na nulu. Ve zvláštním případě kdy $x_2 = 0$ ($y_1 = y_2$) resp. $x_1 = 0$ ($y_1 = -y_2$) kmitají obě kyvadla jen s kruhovým kmitočtem ω_1 resp. ω_2 a rázy nevznikají. Kyvadla konají pouze základní (stejnoseměrné a protisměrné) kmitů.

Pro analogii kmitů mechanických a elektrických vázaných oscilátorů je také důležitý případ, kdy jeden z oscilátorů kmitá při zamezeném kmitání druhého oscilátoru. U spřažených kyvadel toho dosáhneme např. tím, že jedno kyvadlo držíme v klidu v rovnovážné poloze.

Rovněž tento případ je obecně řešen v práci [1]. Polyhové rovnice pro uvedený případ budou mít tvar

$$\begin{aligned} A_1 y_1' + C_1 y_1 + c_{12} y_2 &= 0 \\ A_2 y_2' + C_2 y_2 + c_{12} y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic byl nalezen výraz pro oba kmitočty soustavy

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{A_2 C_1 + A_1 C_2 \pm \sqrt{[A_2 C_1 - A_1 C_2]^2 + 4 A_1 A_2 c_{12}^2}}{2 A_1 A_2}}$$

V případě rezonance, je-li určena podmínkami $A_1 = A_2 = A$ a $C_1 = C_2 = C$, bude

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{C}{A} + \frac{c_{12}}{A}} = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{c_{12}}{A}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{C}{A} - \frac{c_{12}}{A}} = \sqrt{\Omega_0^2 - \frac{c_{12}}{A}}, \end{aligned}$$

kde Ω_0 je kruhový kmitočet prvního nebo druhého vázaného oscilátoru, zabráníme-li v kmitání druhému nebo prvnímu oscilátoru. Jestliže opět v případě spřažených kyvadel $A = 1$ a $c_{12} = -k$, platí

$$\omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 - k}; \quad \omega_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + k}.$$

To znamená, že čtverce úhlových kmitočtů ω_1 a ω_2 jsou souměrně rozloženy kolem čtverce úhlového kmitočtu Ω_0 , který má jedno nebo druhé kyvadlo, zamezíme-li kmitání druhého nebo prvního kyvadla. Z teorie však současně vyplývá, že v případě, kdy platí pro nespřažené oscilátory i spřažené oscilátory při zamezení kmitům v jednom z nich stejné rovnice, je $\Omega_0 = \omega_0$ a rozpad nastane kolem kmitočtu nespřažených oscilátorů.

Dále se budeme zabývat obdobnými jevy v elektrických oscilátorech vázaných induktivně (obr. 2). Tento druh vázaných elektrických oscilátorů se jeví jako nejvhodnější pro výklad jednak z hlediska metodického, jednak vzhledem k požadavkům demonstrační techniky (možnost plynulé změny činitele vazby).

V případě induktivně vázaných oscilátorů jde o spřažení druhou derivací. Pro rozpad rezonančních kmitočtů však vycházejí obdobné výsledky jako pro spřažení výchylkou.

Poněvadž pro analogii s mechanickými oscilátory je vhodnější uvažovat změnu náboje na deskách kondenzátoru (odpovídá výchylce kyvadla), sestavíme rovnice kmitů vázaných kmitavých obvodů pro tento případ.

Neuvažujeme-li vazbu, je v určitém časovém okamžiku napětí na deskách kondenzátoru u rovno elektromotorickému napětí na cívice e . Při induktivní vazbě však působí druhý oscilátor na první, v němž se indukuje napětí e_1 , které se k napětí e přičítá, poněvadž

$$u = \frac{q_1}{C_1}; \quad e = -L \frac{di_1}{dt} = -L \frac{d^2q_1}{dt^2}; \quad e_1 = -M \frac{di_2}{dt} = -M \frac{d^2q_2}{dt^2},$$

můžeme pro případ zanedbatelného činného odporu ($R = 0$) psát podle II. Kirchhoffova zákona

$$L_1 \frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_1} + M \frac{d^2q_2}{dt^2} = 0$$

a po úpravě

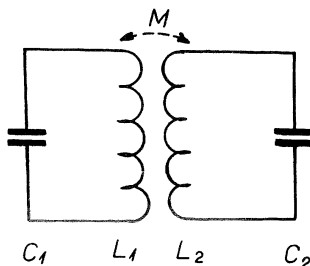
$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{L_1 C_1} + \frac{M}{L_1} \frac{d^2q_2}{dt^2} = 0. \quad (12)$$

Podobně pro druhý obvod

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{L_2 C_2} + \frac{M}{L_2} \frac{d^2q_1}{dt^2} = 0. \quad (12')$$

Ve zvláštním případě, který požadujeme pro demonstraci rezonanční křivky, volíme $L_1 = L_2$ a $C_1 = C_2$, takže $\omega_{01} = \omega_{02}$. Současně také platí, že $\frac{M}{L_1} = \frac{M}{L_2}$ a tento podíl můžeme označit jako činitel vazby $-k$. Rovnice (12) a (12') nabudou tvaru

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 + k \frac{d^2q_2}{dt^2} = 0 \quad (13)$$



Obr. 2. Induktivně vázané oscilační obvody

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_0^2 q_2 + k \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0. \quad (13')$$

Sečteme a odečteme rovnice (13) a (13'), takže

$$(1+k) \frac{d^2}{dt^2} (q_1 + q_2) + \omega_0^2 (q_1 + q_2) = 0 \quad (14)$$

a

$$(1-k) \frac{d^2}{dt^2} (q_1 - q_2) + \omega_0^2 (q_1 - q_2) = 0. \quad (14')$$

Označíme-li $q_1 + q_2 = Q_1$, $q_1 - q_2 = Q_2$ a $\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1+k}$, $\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1-k}$, dostaneme z rovnice (14) a (14') rovnice

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} + \omega_1^2 Q_1 = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dt^2} + \omega_2^2 Q_2 = 0, \quad (15')$$

kteří jsou zcela obdobné rovnicím (8) a (8').

To tedy znamená, že i v induktivně vázaných obvodech vznikají při rezonanci současně dvojí kmitů s úhlovými kmitočetmi

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}; \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \quad (16)$$

jak to odpovídá obecnému případu spřažení druhou derivací (viz [1]). Poněvadž v případě induktivní vazby je rovnice pro první oscilátor při zamezení kmitání druhého oscilátoru stejná jako rovnice samostatně kmitajícího obvodu, musejí být četveře kmitočetů ω_1 a ω_2 souměrně rozloženy kolem četveře kmitočetů ω_0 . To také vyplývá z rovnice (16), jestliže v prvním přiblížení píšeme

$$\frac{1}{1+k} \doteq 1-k \quad \text{a} \quad \frac{1}{1-k} \doteq 1+k.$$

Z rovnic (16) dále vyplývá, že oba kmitočetů jsou rozlišitelné jen tehdy, když je k dostatečně veliké, čili při těsné vazbě. Při volné vazbě je $\omega_1 \doteq \omega_2 \doteq \omega_0$ a k rozpadu rezonančního kmitočetů nedojde.

Rovnicím (15) a (15') vyhovuje řešení, vyjádřené rovnicemi (9) a (9'), podle nichž najdeme pro okamžitý náboj na deskách kondenzátorů v kmitavých obvodech rovnice

$$q_1 = \frac{Q}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

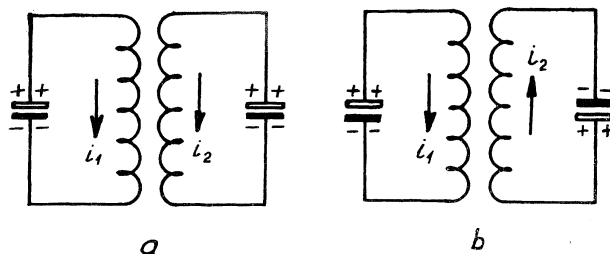
$$q_2 = \frac{Q}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t).$$

To znamená, že i v induktivně vázaných obvodech probíhají stejnosměrné a protisměrné kmity s amplitudou, odpovídající polovině počátečního náboje kondenzátoru oscilátoru. Fáze kmitů se mění a vznikají rázy.

Na základě teoreticky zdůvodněné analogie mezi ději ve vázaných mechanických a elektrických oscilátorech můžeme najít metodicky vhodný postup pro vysvětlení kmitů v oscilátorech vázaných induktivně a kapacitně.

Tak jako v případě spřažených kyvadel uvažujeme dva vázané oscilátory stejných vlastností ($L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$). Při vzájemném působení oscilátoru a rezonátoru sledujeme opět vznik stejnosměrných a protisměrných kmitů (obr. 3).

Má-li náboj na deskách kondenzátoru v oscilačním obvodu určitou polaritu, může mít náboj na deskách kondenzátoru v obvodu rezonančním polaritu souhlasnou



Obr. 3. Stejnosměrné a protisměrné kmity v induktivně vázaných oscilátorech

(obr. 3a) nebo opačnou (obr. 3b). Polarita náboje kondenzátoru v osamoceném kmitavém obvodu nemá na kmitočet vlastních kmitů žádný vliv, avšak u vázaných obvodů tomu tak není.

Vzniknou-li v obou obvodech elektrické kmity současně, pak protékají proudy eivkami v prvním případě souhlasným směrem (obdoba stejnosměrně kmitajících spřažených kyvadel) a ve druhém případě opačným směrem (kyvadla kmitají protisměrně). Podle analogie se spřaženými kyvadly musí být v prvním případě úhlový kmitočet vznikajících kmitů nižší $-\omega_1$ a ve druhém případě vyšší $-\omega_2$ než úhlový kmitočet vlastních kmitů oscilátoru Ω_0 , zamezíme-li kmitání rezonátoru a naopak (při induktivní vazbě však $\Omega_0 = \omega_0$). Oba úhlové kmitočty musejí být rozloženy souměrně kolem úhlového kmitočtu ω_0 .

Tento vzájemný účinek si vyložíme tak, jakoby v prvním případě protékal proud souhlasně indukčností L i vzájemnou indukčností M , takže jsou obě indukovaná napětí ve stejné fázi, L a M se ve svých účincích sčítají a kmitočet klesá. Ve druhém případě je tomu naopak.

Z uvedeného vyplývá, že typ vznikajících kmitů (stejnoseměrných a protisměrných) závisí na počátečním náboji kondenzátorů v obou obvodech (stejně jako u spřažených kyvadel záleží na počáteční výchylce z rovnovážné polohy). Jestliže je v počátečním okamžiku náboj kondenzátoru v oscilátoru $Q_1 = Q$ a náboj kondenzátoru v rezonátoru $Q_2 = 0$ a obvody neteče proud, můžeme si analogicky k rovnicím (11) a (11') představit vznik stejnosměrných a protisměrných kmitů, při nichž náboj kondenzátoru dosahuje největší hodnoty $\pm \frac{Q}{2}$.

V počátečním okamžiku má potom kondenzátor oscilátoru skutečně náboj $Q_1 = Q/2 + Q/2 = Q$, poněvadž stejnosměrné i protisměrné kmity jsou ve stejné fázi a náboj kondenzátoru rezonátoru je $Q = Q/2 - Q/2 = 0$, poněvadž jsou obojí kmity v opačné fázi. Obdobně jako u spřažených kyvadel se fáze stejnosměrných a protisměrných kmitů mění a vznikají rázy.

Celý výklad dějů ve vázaných oscilačních obvodech lze, podobně jako u spřažených kyvadel, provést z hlediska energie. Čím jsou oba obvody slaběji vázány, tím pomaleji přechází energie z jednoho obvodu do druhého a výměna energie mezi obvody probíhá pomaleji — kmitočet rázů je menší. Energie (a tedy i amplituda) jednoho obvodu může klesnout na nulu pouze v případě, že v počátečním okamžiku je jeho potenciální i kinetická energie (energie elektrického i magnetického pole) rovna nule.

3. Demontrace dějů v induktivně vázaných oscilátorech

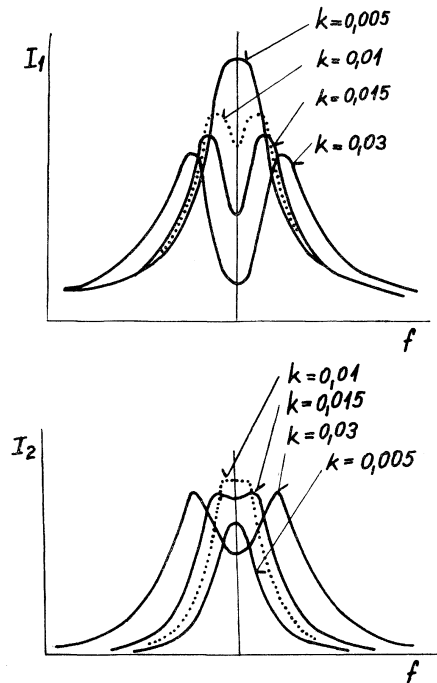
Při výkladu rezonančních jevů v elektrických obvodech, založeném na obdobě mechanických a elektrických vázaných oscilátorů, klademe značný důraz na demonstrace. Správně zvolené demonstrace jsou, vzhledem k menší názornosti rezonančních jevů v elektrických oscilátorech, rozhodující pro efektivnost výkladu. Tento požadavek je zcela splněn dvěma demonstracemi, v nichž jsou zahrnuty základní analogie se spřaženými kyvadly — *rozštěpení kmitočtu při těsné vazbě a vznik rázů*. První poznatek je demonstrován zjištěním tvaru rezonanční křivky vázaných oscilátorů. Druhý je demonstrován osciloskopickým studiem vznikajících rázů.

A. Rezonanční křivka induktivně vázaných oscilátorů

Tvar rezonanční křivky je podstatně ovlivněn činitelem vazby, jak je patrné z obr. 4 [6]. Při velmi malém činiteli vazby ($k = 0,005$) se tvar rezonanční křivky blíží rezonanční křivce samostatného oscilátoru. Proud v rezonančním obvodu je malý a mění se s kmitočtem podle křivky, dané přibližně součinem rezonančních křivek samostatného oscilátoru i rezonátoru.

Zvětšuje-li se činitel vazby, začíná se křivka proudu v oscilátoru rozšiřovat a maximální hodnota tohoto proudu se zmenšuje. Současně roste proud v rezonátoru

a ostrost rezonanční křivky rezonátoru se zmenšuje. Proud v rezonátoru dosahuje stále větší hodnoty, až do okamžiku, kdy činný odpor, převáděný rezonátorem do oscilátoru, dosahuje při rezonanci hodnoty činného odporu oscilátoru (na obr. 4 pro $k = 0,01$).

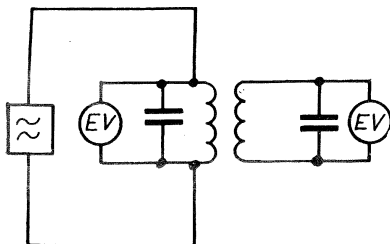


Obr. 4. Rezonanční křivky oscilátoru a rezonátoru při různých číselných vazbách

Při této tzv. *kritické vazbě* je rezonanční křivka rezonátoru v okolí rezonančního kmitočtu poněkud širší než rezonanční křivka samostatného oscilátoru. Křivka oscilátoru se při kritické vazbě rozděluje ve dvě maxima, rozložená souměrně kolem maxima při velmi volné vazbě. Roste-li dále číselná vazba, jsou maxima rezonanční

křivky oscilátoru stále výraznější a vzájemně vzdálenější. Zároveň se objevují dvě maxima i na křivce sekundárního proudu.

Popsané změny rezonanční křivky induktivně vázaných oscilátorů byly sledovány v zapojení podle obr. 5. Oscilátor i rezonátor byl sestaven z cívky z rozkladného transformátoru (1200 závitů) s krátkým jádrem a z kondenzátoru kapacity 1 μF .



Obr. 5. Měření rezonanční křivky vázaných oscilátorů

sinusového napětí je ideálním zdrojem bez vlastní impedance. Poněvadž tento předpoklad není ve skutečnosti splněn, musíme uvažovat rovněž vliv vnitřní impedance zdroje napětí na obvod oscilátoru. To se projeví tak, jakoby byl obvod oscilátoru zatížen velkou, paralelně připojenou impedancí. Tato impedance způsobí mírné rozladění oscilátoru, které musíme vhodným způsobem vykompenzovat. U popsaného zařízení bylo doladění do rezonance provedeno změnou indukčnosti cívky oscilátoru. Vzhledem k tomu, že je impedance zdroje dostatečně velká, neprojevil se její vliv na útlum obvodu.

Měření rezonanční křivky bylo prováděno při stálém proudu a elektronkovým voltmetrem bylo indikováno napětí na kondenzátoru v oscilačním a rezonančním obvodu.

Hodnoty jednotlivých součástí byly předběžně zjištěny pomocí RLC měřiče Tesla. U kondenzátorů byl proveden vhodný výběr tak, aby bylo dosaženo co nejmenšího rozdílu kapacit. Naměřené hodnoty jsou v tabulce I.

Tabulka I

| | L [H] | $R_{\text{cívky}}$ [Ω] | C [μF] | vlastní kmitočet f [kHz] |
|-----------|----------------------|---------------------------------|---------------------|--------------------------|
| Oscilátor | $1,52 \cdot 10^{-1}$ | 1,23 | 1,08 | 394 |
| Rezonátor | $1,62 \cdot 10^{-1}$ | 1,28 | 1,02 | 396 |

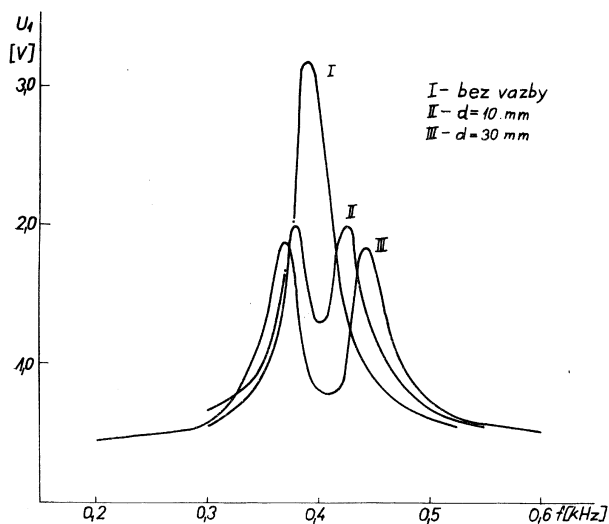
Induktivní vazba byla provedena tak, že cívky ležely volně vedle sebe na společné ose procházející středem cívek a činitel vazby byl nastaven změnou vzdálenosti mezi cívkami.

Kmitočet různého kmitočtu byly v soustavě buzeny pomocným generátorem sinusového napětí Tesla BM 365.

Aby bylo dosaženo shody s teorií, museli bychom předodkládat, že budicí generátor

Z naměřených hodnot (viz tabulku II) byly sestrojeny jednotlivé rezonanční křivky (obr. 6 a 7). Veličina d znamená vzdálenost mezi cívkami při měření. Proud byl při měření konstantní $I = 1,0 \text{ mA}$.

Z grafu na obr. 6 je dobře patrné rozštěpení rezonančního kmitočtu. Při demonstraci postačí, abychom plynule měnili kmitočet budícího oscilátoru a z výchylek



Obr. 6. Rezonanční křivka oscilátoru

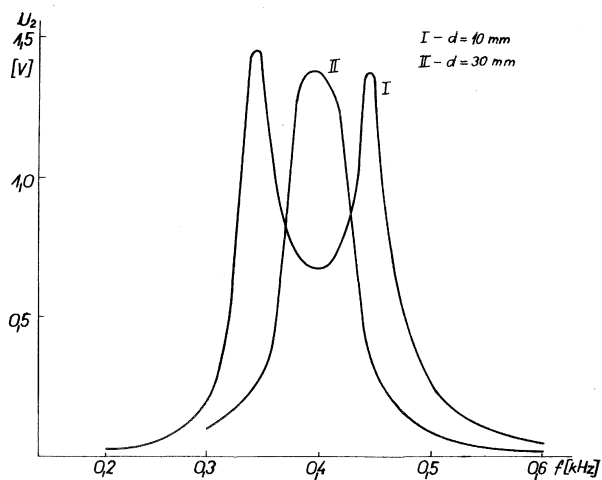
měřicích přístrojů je dostatečně patrný tvar křivky. Soustředíme se na vyhledání obou maxim napětí a určení příslušného rozdílu kmitočtů. K této demonstraci je však třeba připomenout, že již při velmi malém rozladění oscilátoru a rezonátoru se tvar rezonanční křivky podstatně mění.

Pokud by oba obvody měly při rozladění stejný činitel jakosti $\left(Q = \frac{\omega L}{R}\right)$, projevil by se rozladění tak, jakoby se zvětšil činitel vazby. Výška maxim napětí by zůstala při obou rezonančních kmitočtech stejná. Poněvadž používáme při

demonstraci cívky z rozkladného transformátoru s volně zasunutými jádry, projeví se každá změna polohy jádra také změnou činitele jakosti obvodu.

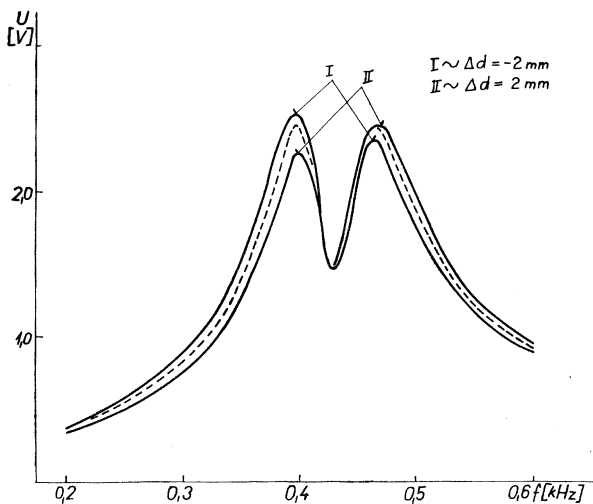
Tabulka II

| f [kHz] | U_0 [V] bez vazby | U_1 [V] d = 10 mm | U_1' [V] d = 30 mm | U_2 [V] d = 10 mm | U_2' [V] d = 30 mm |
|---------|------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| 0,20 | 0,46 | 0,45 | 0,45 | 0,02 | 0,02 |
| 0,25 | 0,50 | 0,48 | 0,48 | 0,05 | 0,03 |
| 0,30 | 0,68 | 0,57 | 0,56 | 0,20 | 0,10 |
| 0,35 | 0,98 | 1,20 | 0,93 | 1,40 | 0,29 |
| 0,36 | 1,22 | 1,60 | 1,13 | 1,03 | 0,42 |
| 0,37 | 1,58 | 1,88 | 1,50 | 0,83 | 0,78 |
| 0,38 | 2,16 | 1,45 | 1,98 | 0,72 | 1,30 |
| 0,39 | 3,12 | 0,98 | 1,62 | 0,68 | 1,37 |
| 0,40 | 3,00 | 0,79 | 1,28 | 0,68 | 1,37 |
| 0,41 | 2,70 | 0,78 | 1,39 | 0,70 | 1,32 |
| 0,42 | 1,58 | 0,80 | 1,92 | 0,80 | 1,27 |
| 0,43 | 1,22 | 1,25 | 2,00 | 0,93 | 0,83 |
| 0,44 | 1,00 | 1,84 | 1,53 | 1,36 | 0,50 |
| 0,45 | 0,89 | 1,75 | 1,20 | 1,18 | 0,30 |
| 0,50 | 0,60 | 0,72 | 0,67 | 0,22 | 0,07 |
| 0,60 | 0,49 | 0,50 | 0,50 | 0,05 | 0,02 |



Obr. 7. Rezonanční křivka rezonátoru

Není-li splněna podmínka stejného činitele jakosti oscilátoru a rezonátoru ($Q_1 \neq Q_2$), není již rezonanční křivka souměrná podle středního kmitočtu a také výška maxim je při obou rezonančních kmitočtech různá. Je-li rezonátor naladěn na vyšší kmitočet a $Q_1 > Q_2$, nebo je-li rezonátor naladěn na nižší kmitočet a $Q_1 < Q_2$, je maximum napětí při nižším kmitočtu menší. V opačném případě je menší maximum



Obr. 8. Resonanční křivka oscilátoru při nestejném Q obvodů

při vyšším kmitočtu. Na obr. 8 jsou rezonanční křivky induktivně vázaných oscilátorů při zasunutí (A) a při vysunutí (B) jádra v cívice oscilátoru o 2 mm (obvody byly předem vyladěny na stejné f_0 i Q při částečně vysunutých jádrech).

Před demonstrací je tedy nutné nejprve naladit oscilátor i rezonátor tak, aby činitel jakosti obou obvodů byl stejný. Postupujeme tak, že vyhledáme nižší maximum a jemným nastavením polohy jádra dosáhneme zvýšení nižšího maxima asi o polovinu rozdílu mezi nižším a vyšším maximumem. Tento postup opakujeme až nastane přesné vyladění.

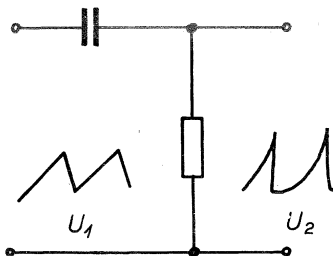
B. Osciloskopie rázů ve vázaných oscilátorech

Aby bylo dosaženo při demonstraci co nejpřesnější analogie se spřaženými kyvadly, konajícími tlumené kmity, demonstrujeme vznik rázů v induktivně vázaných oscilátorech, konajících rovněž tlumené kmity. Rázy sledujeme pomocí osciloskopu.

Osciloskopické studium tlumených kmitů bývá zpravidla prováděno tak, že se kondenzátor kmitavého obvodu nabije ze zdroje stejnosměrného napětí a pak se mechanickým přepínačem spojí s cívkou obvodu. Vzniklé tlumené kmity se pak pozorují na stínítku osciloskopu, jehož vstup je připojen k deskám kondenzátoru. Pro naše účely však potřebujeme získat konstantní oscilogram tlumených kmitů, abychom

mohli studovat také změny charakteru rázů při plynulé změně činitele vazby mezi oscilátorem a rezonátorem.

Z toho důvodu bylo třeba sestavit zařízení, které by s konstantním kmitočtem nabíjelo kondenzátor oscilátoru, přičemž zařízení musí splňovat požadavek, že působení na oscilátor bude trvat velmi krátkou dobu ve srovnání s dobou mezi dvěma nabitími kondenzátoru. V podstatě bylo tedy třeba sestavit zařízení, které by dávalo na výstupu velmi krátké napětové impulsy konstantního kmitočtu a amplitudy.



Obr. 9. Derivační člen

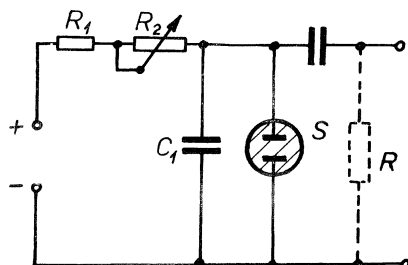
Takové požadavky splňuje relaxační generátor pilových kmitů ve spojení s derivačním členem. Derivační člen (obr. 9) byl vytvořen obvodem RC, jehož časová konstanta byla zvolena tak, aby byla zlomkem periody derivovaného napětí. Jestliže má napětí relaxačního generátoru (U_1) pilový průběh, pak na počátku periody, ve vzestupné části kmitu napětí, se kondenzátor nabíjí až na maximální hodnotu a napětí na odporu je vzhledem k jeho hodnotě nepatrné. V okamžiku, kdy napětí U_1 prudce poklesne, vybije se kondenzátor přes odpor a napětí na odporu velmi prudce vzroste.

Poněvadž pro proud v obvodu kondenzátoru platí

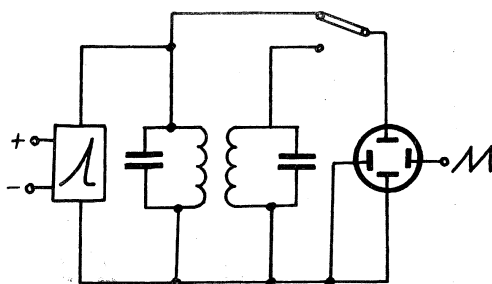
$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

a napětí na odpor R je podle Ohmova zákona určeno proudem, který odporem protéká, je vlastně napětí na výstupu derivačního členu obrazem derivovaného napětí na kondenzátoru. Napětová špička bude tím strmější, čím více se bude $dt \rightarrow 0$,

to znamená, čím menší bude odpor R . Současně však se bude zmenšovat amplituda napětí U_2 ve srovnání s amplitudou vstupního napětí U_1 . Aby bylo dosaženo velmi strmého impulsu, musí být výstupní napětí zesíleno (v našem případě vertikálním zesilovačem osciloskopu).



Obr. 10. Relaxační generátor napěťových impulsů

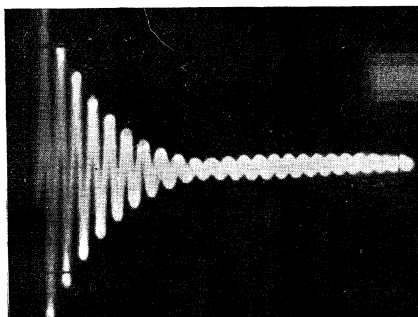


Obr. 11. Zapojení pro osciloskopické studium rázů

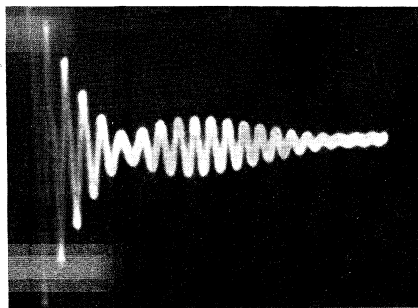
Celkové zapojení relaxačního generátoru napěťových impulsů, použitého při studiu rázů, je na obr. 10. Hodnoty součástí: $R_1 - 0,1 \text{ M}\Omega$, $R_2 -$ potenciometr $1 \text{ M}\Omega/2 \text{ W}$, $C_1 - 0,1 \mu\text{F}/500 \text{ V}$, $C_2 - 0,05 \mu\text{F}/500 \text{ V}$, $S -$ stabilizátor STV 150/80. Odpor derivačního členu je nahrazen celkovým odporem kmitavého obvodu oscilátoru, připojeného k výstupním svorkám relaxačního generátoru.

Regulační potenciometr R_2 umožňuje nastavení kmitočtu generátoru tak, aby napěťový impuls vznikl v okamžiku, kdy se kmity v oscilátoru zcela utlumí. Generátor je napájen stejnosměrným napětím 130 V.

Na obr. 11 je schéma zapojení soustavy oscilátor—rezonátor pro studium rázů při induktivní vazbě. Cívky kmitavých obvodů byly opět položeny volně vedle sebe na společné ose procházející jejich středem. Aby bylo možné sledovat několik rázů mezi dvěma pulzy relaxačního generátoru, musejí mít cívky co nejmenší činný

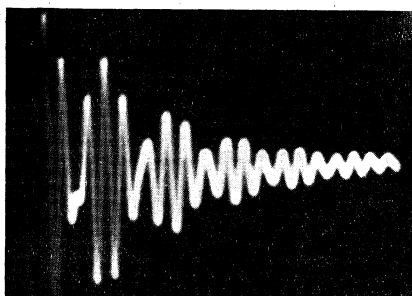


Obr. 12. Oscilogram rázů — volná vazba

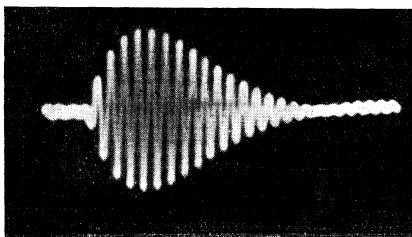


Obr. 13. Oscilogram rázů — středně těsná vazba

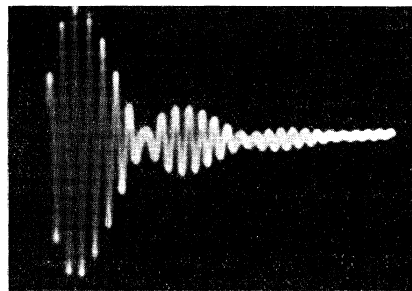
Obr. 14. Oscilogram rázů —
velmi těsná vazba



Obr. 15. Rázy v rezonátoru —
volná vazba



Obr. 16. Rázy v rezonátoru —
středně těsná vazba

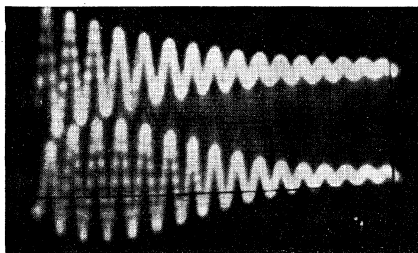


odpor. Proto byly nahrazeny cívky s 1200 závitů cívkami s 300 závitů. Kondenzátory byly stejné jako při měření rezonanční křivky.

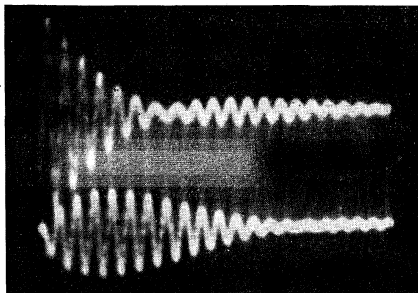
Charakter rázů v oscilátoru je patrný z oscilogramů na obr. 12, 13 a 14. Postupným přibližováním cívky rezonátoru k cívce oscilátoru můžeme měnit plynule činitel vazby a současně pozorujeme narůstání kmitočtu rázů, až při velmi těsné vazbě je kmitočet rázů tak velký, že se projeví deformací tvaru tlumených kmitů (obr. 14). Obdobné oscilogramy získáme z rezonančního obvodu (obr. 15 a 16), kde pozorujeme postupné narůstání amplitudy indukovaných kmitů.

Současné studium rázů lze provést pomocí elektronkového přepínače (obr. 17 a 18).

Nestejně vlastní kmitočty obou obvodů se projeví tím, že amplituda rázů neklesá až na nulu. Doladění provedeme opět jemným nastavením jednoho jádra cívky.



Obr. 17. Oscilogram rázů — volná vazba



Obr. 18. Oscilogram rázů — středně těsná vazba

LITERATURA

- [1] *Koštál*, Kmity spřažených soustav, Spisy přírodovědecké fakulty Brno 1931.
- [2] *Šaovik*, Základy fyziky I, SNTL Praha 1962.
- [3] *Horák*, Technická fyzika, SNTL Praha 1961.
- [4] *Fuka, Havelka*, Elektromagnetické pole, SPN Praha 1958.
- [5] *Chajkin*, Elektromagnitnyje kolebanija i volny, Gosenergoizdat Moskva 1959;
- [6] *Smirenin*, Radiotechnická příručka, SNTL Praha 1955.
- [7] *Vašek*, Studium dějů ve vázaných oscilátorech, Gottwaldov 1963 (nepubl.).

Резюме

ВКЛАД К МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА В СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРАХ

ОЛЕДРЖИХ ЛЕПИЛ

Явление резонанса принадлежит к самым значительным знаниям в курсе физики средней школы. Чтобы глубоко узнать это явление, надо применить при изложении общих связей между резонансом механических и электрических систем. Этих связей мало используют в настоящих учебниках физики. Поэтому в этой статье изложен анализ методики изучения явления резонанса в механике и подчеркнуто значение общего направления этого изложения. Тема Механические колебания, волны и акустика должна начинаться с самостоятельной колеблющей системы и продолжаться к двум связанным осцилляторам, к ряду связанных осцилляторов (возмущение в ряду точек) до волнения в пространстве. Самыми важными при этом являются эти понятия: собственные колебания, вынужденные колебания, связь тесная и свободная, осциллятор и резонатор.

При изучении электрических колебаний пользуемся этими общими знаниями в аналогической последовательности. До сих пор в методике мало разработана аналогия между связанными механическими и электрическими осцилляторами, особо в технике демонстраций. Так как с точки зрения методики самыми подходящими являются индуктивно связанные электрические осцилляторы, мы подробно описали теорию этих связанных осцилляторов и предложим демонстрации явления резонанса.

Демонстрации направлены на аналогию между связанными маятниками и индуктивно связанными колебательными контурами. В первой демонстрации измерением резонанционной кривой проверено расщепление резонанционной частоты при тесной связи. Вторая демонстрация при помощи осциллоскопа исследует возникновение биения и зависимость его частоты от фактора связи.

Zusammenfassung

BEITRAG ZUR METHODIK DER ERLÄUTERUNG DER RESONANZERSCHEINUNGEN IN DEN GEBUNDENEN OSZILLATOREN

OLDŘICH LEPIŠ

Die Resonanzerscheinungen gehören zu den bedeutendsten Erkenntnissen in der Physik auf der Mittelschule. Zum tiefen Begreifen dieser Erscheinungen ist es nötig, dass man bei der Erläuterung die allgemeinen Zusammenhänge zwischen der Resonanz mechanischer und elektrischer Systeme ausnützt. Diese Zusammenhänge werden aber in den bisherigen Lehrbüchern der Physik wenig ausgenützt. Deshalb wird in dieser Arbeit die Analyse der Methodik der Erläuterung der Resonanz in der Mechanik vorgelegt und es wird die allgemeine Richtung dieser Erläuterung hervorgehoben. Der Aufbau des Themen „Mechanische Schwingungen, Wellen und Akustik“ muss von dem selbständigen schwingenden System zu zwei gebundenen Oszillatoren, zu einer Reihe von gebundenen Oszillatoren (das Wellen in einer Reihe von Punkten) bis zum Wellen im Raum vorgehen. Die folgenden Begriffe werden dabei hervorgehoben: die eigenen Schwingungen, die erzwungenen Schwingungen die Bindung — frei und dicht, der Oszillator und der Resonator.

In der Lehre über die elektrischen Schwingungen werden diese allgemeinen Erkenntnisse im analogischen Vorgang ausgenützt. In der bisherigen Methodik ist die Analogie zwischen den mechanischen und elektrischen Oszillatoren, vor allem in der Demonstrationstechnik, wenig entwickelt. Weil aus dem methodischen Standpunkt die induktiv gebundenen elektrischen Oszillatoren vor allem geeignet sind, wird hier näher die Theorie dieser gebundenen Oszillatoren beschrieben und werden die Demonstrationen der entsprechenden Resonanzerscheinungen vorgeschlagen.

Die Demonstrationen werden auf die Analogie zwischen den gekoppelten Pendeln und den induktiv gebundenen Schwingskreisen gerichtet. In der ersten Demonstration wird durch die Messung der Resonanzkurve die Zerspaltung der Resonanzfrequenz bei der dichten Bindung nachgeprüft. In der zweiten Demonstration wird mittels eines Oszilloskops die Entstehung der Stöße und die Abhängigkeit deren Frequenz auf dem Bindungsfaktor studiert.