Ladislav Sedláček

Univerzální algebry

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 5 (1964), No. 1, 39--68

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119810`

1964 — Acta Universitatis Palackinae Olomucensis
Facultas Rerum Naturalium. Tom 15.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Josef Metelka

UNIVERZÁLNÍ ALGEBRY

LADISLAV SEDLÁČEK

(Došlo dne 10. července 1963)

Úvod

Zobecněním známých pojmů jako je grupoid, pologrupa, grupa, okruh, svaz atd. docházíme k pojmu univerzální algebry, jež bývá také často nazývána abstraktní algebrou nebo prostě algebrou. Teorie univerzálních algeber v sobě tedy zahrnuje to, co je všem těmto algebraickým strukturám společné. Specifikací podmínek dostáváme pak známé věty týkající se grupoidů, grup, okruhů atd. O významu vybudování teorie univerzálních algeber viz např. [4], str. 7 nebo [8], str. 108.

Na rozdíl od jiných prací o univerzálních algebrách, které jsou založeny na pojmu ekvivalence a kongruence, je v této práci budována teorie algeber na základě teorie rozkladů v množině a řetězců rozkladů, jak je uvedena v pracích [1], [2] a [3]. Proto se také v práci používá pojmů, výsledků a až na nepatrné výjimky i označení z uvedených prací. Nejčastěji budou uváděny výsledky z práce [1], a proto si zavedeme označení např. B.7.1, což znamená odstavec 7.1 z práce [1]. V práci jsou věty označovány písmenem **V** a definice písmenem **D**.

Grupoid, jak je známo, je nejobecnější univerzální algebra s pouze jednou binární operací. Poněvadž v práci [1], [2] a [3] jsou dokazovány vlastnosti rozkladů a řetězců, jež jsou potřebné pro teorii grupoidů, nezávisle na operaci, je možno těchto výsledků použít bez jakéhokoliv omezení. Důkazy vět o univerzálních algebrách jsou pak zobecněním důkazů vět o grupoidech.

1. Základní pojmy

Úmluva 1/1: V celé práci uvažujeme jen neprázdné množiny, není-li výslovně řečeno něco jiného.

D 1/1: Nechť G je daná množina a Ω množina operací, pro které platí: každé operaci $\omega \in \Omega$ je jednoznačně přiřazeno přirozené číslo $\nu = \nu(\omega)$ tak, že operace ω přiřazuje každé ν-členné posloupnosti prvků $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ z G určitý prvek $a = a_1a_2 \ldots a_\nu\omega$ z množiny G. Množinu G s daným systémem operací Ω nazýváme univerzální algebrou a označujeme ji $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. O operaci ω říkáme, že je *ν-ární* nebo *typu ν*. Množinu G nazýváme *polem univerzální algebry* $\mathbf{G}$.

Protože názvosloví je nejednotné, byl název univerzální algebra zvolen ve shodě s prací [8]. Poněvadž nemůže dojít k omylu, *budeme místo názvu univerzální algebra užívat pouze název algebra.*

V naší definici by bylo možno připustit i $\nu = 0$ a mluvit pak o *nulární operaci* (viz např. [8]). Stejně tak je možno připustit, že ν je ordinální číslo a v případě $\nu \geqq \omega_0$ uvažovat *infinitární operace* (viz např. [12]). Rozšíření definice v tomto smyslu nečiní v podstatě žádných potíží.

Na algebry přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole. Tak například mluvíme o prvcích algebry a píšeme $a \in \mathbf{G}$ místo $a \in G$. Podobně mluvíme o podmnožinách v algebře a píšeme např. $B \subset \mathbf{G}$ nebo $\mathbf{G} \supset B$, mluvíme o rozkladech v algebře a na algebře, o zobrazení algebry do nějaké množiny, algebry atd.

D 2/1: Nechť $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ je daná algebra, ω libovolná ν-ární operace z Ω, $\{A_1, A_2, A_3 \ldots\}$ systém podmnožin v $\mathbf{G}$. Pak symbolem $A_1 A_2 \ldots A_\nu \omega = A$ označujeme množinu A všech prvků tvaru $a_1 a_2 \ldots a_\nu \omega = a$, kde $a_\mu \in A_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$.

D 3/1: Neprázdnou podmnožinu A algebry $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ nazýváme *podalgebrou* algebry $\mathbf{G}$, když pro každou ν-ární operaci $\omega \in \Omega$ a každou ν-člennou posloupnost prvků $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ z A také $a_1 a_2 \ldots a_\nu \omega$ je prvek z A. Pak A nazýváme *polem podalgebry* $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$ a píšeme $\mathbf{A} \subset \mathbf{G}$.

V 1/1: *Neprázdná podmnožina A algebry $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ je polem podalgebry $\mathbf{A}$ tehdy a jen tehdy, když pro každou ν-ární operaci $\omega \in \Omega$ a pro $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$ platí $A_1 A_2 \ldots A_\nu \omega \subset A$.*

Důkaz věty je zřejmý.

V 2/1: *Nechť M je množina indexů, A_i, $i \in M$, podalgebry v $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ a nechť průnik $A = \cap A_i$, $i \in M$, jejich polí není prázdný. Pak A je polem podalgebry $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$.*

Důkaz: Prvky $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ leží v A právě tehdy, když patří do každé A_i, $i \in M$. Protože A_i je polem podalgebry $\mathbf{A}_i$, pak pro každou ν-ární operaci ω platí $a_1 a_2 \ldots a_\nu \omega = a \in A_i$ pro každé $i \in M$, a tedy $a_1 a_2 \ldots a_\nu \omega = a \in A = \cap A_i$, $i \in M$. Tím je dokázáno, že A je polem podalgebry $\mathbf{A}$ v algebře $\mathbf{G}$.

2. Faktorové algebry

D 1/2: Nechť $\bar{A}$ je rozklad v algebře $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ a $\omega \in \Omega$ libovolná ν-ární operace. Když ke každé ν-členné posloupnosti prvků $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu$ z rozkladu $\bar{A}$ existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že platí

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega \subset \bar{a}, \tag{1.2}$$

pak rozklad $\bar{A}$ nazýváme *vytvořující*.

V 1/3: *Největší rozklad $\bar{G}_{\max}$ a nejmenší rozklad $\bar{G}_{\min}$ algebry* **G** *jsou vytvořující.*

Důkaz je zřejmý.

D 2/2: Nechť $\bar{A}$ je vytvořující rozklad v algebře $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Algebru, jejímž polem je vytvořující rozklad $\bar{A}$ a jejíž ν-ární operace $\bar{\omega}$ jsou dány pravidlem, že každé ν-členné posloupnosti prvků $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu \in \bar{A}$ je operací $\bar{\omega}$ přiřazen ten prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, pro nějž platí vztah (1.2) a což zapisujeme

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\bar{\omega} = \bar{a}, \tag{2.2}$$

nazýváme *faktorovou algebrou* a značíme $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$.

V 2/2: *Na každé algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *existují největší faktorová algebra* $\bar{\mathbf{G}}_{\max} = \langle \bar{G}_{\max}, \bar{\Omega} \rangle$ *a nejmenší faktorová algebra* $\bar{\mathbf{G}}_{\min} = \langle \bar{G}_{\min}, \bar{\Omega} \rangle$.

Důkaz plyne z V 1/2 a D 2/2.

Všimněme si, že pro faktorovou algebru $\bar{\mathbf{G}}_{\min}$ a pro každou operaci $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ platí $\bar{\omega} = \omega \in \Omega$. Této vlastnosti podle potřeby použijeme.

V 3/2: Nechť $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$ je faktorová algebra v $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. Pak součet s$\bar{\mathbf{A}}$ prvků algebry $\bar{\mathbf{A}}$ je podalgebra v **G** a $\bar{\mathbf{A}}$ je faktorová algebra na s$\bar{\mathbf{A}} = \langle \mathrm{s}\bar{A}, \Omega \rangle$.

Důkaz: Předně je s$\bar{\mathbf{A}} \subset \mathbf{G}$. Nechť $\omega \in \Omega$ je libovolná ν-ární operace $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ libovolná ν-členná posloupnost prvků z s$\bar{\mathbf{A}}$. Pak k ní existuje ν-členná posloupnost prvků $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu \in \bar{\mathbf{A}}$ taková, že $a_\mu \in \bar{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$. Podle předpokladu platí $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\bar{\omega} = \bar{a}$, a proto $a_1a_2 \ldots a_\nu\omega = a \in \bar{a}$, a tedy $a \in$ s$\bar{\mathbf{A}}$. Pak $\bar{\mathbf{A}}$ je zřejmě faktorová algebra na algebře s$\bar{\mathbf{A}}$.

Také na faktorové algebry přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole.

D 3/2: Nechť **C** je podalgebra, $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ faktorové algebry v algebře **G**.

a) *Obalem podalgebry* **C** ve faktorové algebře $\bar{\mathbf{A}}$ rozumíme množinu všech prvků v $\bar{\mathbf{A}}$ incidentních s **C** a píšeme $\mathbf{C} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$ nebo $\bar{\mathbf{A}} \sqsupset \mathbf{C}$. *Průsekem podalgebry* **C** s faktorovou algebrou $\bar{\mathbf{A}}$ rozumíme množinu neprázdných průniků jednotlivých prvků z $\bar{\mathbf{A}}$ s podalgebrou **C** a píšeme $\mathbf{C} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$ nebo $\bar{\mathbf{A}} \sqcap \mathbf{C}$.

b) *Obalem faktorové algebry* $\bar{\mathbf{B}}$ ve faktorové algebře $\bar{\mathbf{A}}$ rozumíme množinu všech prvků z $\bar{\mathbf{A}}$ incidentních s některým prvkem v $\bar{\mathbf{B}}$ a označujeme jej $\bar{\mathbf{B}} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$ nebo $\bar{\mathbf{A}} \sqsupset \bar{\mathbf{B}}$. *Průsekem faktorové algebry* $\bar{\mathbf{B}}$ s faktorovou algebrou $\bar{\mathbf{A}}$ rozumíme množinu všech neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\bar{\mathbf{B}}$ s prvky v $\bar{\mathbf{A}}$ a značíme $\bar{\mathbf{A}} \sqcap \bar{\mathbf{B}}$.

V 4/2: *Nechť* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$, $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \bar{\Omega} \rangle$ *jsou faktorové algebry v algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a nechť* s$\bar{A} \cap$ s$\bar{B} \neq \emptyset$. *Pak*

a) *obal* $\bar{\mathbf{B}} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$ *faktorové algebry* $\bar{\mathbf{B}}$ *ve faktorové algebře* $\bar{\mathbf{A}}$ *a*

b) *průsek* $\bar{\mathbf{B}} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$ *faktorové algebry* $\bar{\mathbf{B}}$ *s faktorovou algebrou* $\bar{\mathbf{A}}$ *jsou faktorové algebry v* **G** *a je* $\bar{\mathbf{B}} \sqsubset \bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{B} \sqsubset \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$, $\bar{\mathbf{B}} \sqcap \bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{B} \sqcap \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$.

Důkaz: a) Poněvadž platí $\bar{B} \sqsubset \bar{A} =$ s$\bar{B} \sqsubset \bar{A}$, stačí dokázat, že rozklad s$\bar{B} \sqsubset \bar{A}$ je vytvořující. Nechť $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu$ jsou prvky z s$\bar{B} \sqsubset \bar{A}$. Protože $\bar{A}$ je vytvořující rozklad, existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že pro ν-ární operaci ω platí $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a} \in \bar{A}$. Zvolme libovolné body $a_\mu \in$ s$\bar{B} \cap \bar{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$. Bod $a_1a_2 \ldots a_\nu\omega = a$

je tedy jednak v množině s$\bar{B}$, neboť s$\mathbf{B}$ je podalgebra v $\mathbf{G}$, a jednak v prvku $\bar{a}$ rozkladu $\bar{A}$. Je tedy prvek $\bar{a}$ incidentní s podmnožinou s$\bar{B}$, a proto $\bar{a} \in$ s$\bar{B} \sqsubset \bar{A} = \bar{B} \sqsubset \bar{A}$. Obal $\bar{B} \sqsubset \bar{A}$ je vytvořující a tedy polem faktorové algebry $\mathbf{B} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$.

b) Nechť $x_\mu \in \bar{A} \sqcap \bar{B}$. Pak existují prvky $\bar{a}_\mu \in \bar{A}$, $\bar{b}_\mu \in \bar{B}$ tak, že $x_\mu = \bar{a}_\mu \cap \bar{b}_\mu$. Poněvadž rozklady $\bar{A}$ i $\bar{B}$ jsou vytvořující, existuje pro každou ν-ární operaci ω prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ a prvek $\bar{b} \in \bar{B}$ takový, že $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}$, $b_1 b_2 \ldots b_\nu\omega \subset b$. Je tedy současně $x_1x_2 \ldots x_\nu\omega \subset \bar{a}$ i $x_1x_2 \ldots x_\nu\omega \subset \bar{b}$, tj. $x_1x_2 \ldots x_\nu\omega \subset \bar{a} \cap \bar{b} \in \bar{A} \sqcap \bar{B}$. Průsek $\bar{A} \sqcap \bar{B}$ je tedy vytvořující rozklad a je polem faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}} \sqcap \mathbf{B}$.

V 5/2: *Nechť* $\mathbf{B} = \langle B, \Omega \rangle$ *je podalgebra,* $\mathbf{A} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$ *faktorová algebra v* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a nechť* $\mathbf{B} \cap$ s$\bar{\mathbf{A}} \neq \emptyset$. *Pak*

a) *obal* $\mathbf{B} \sqsubset \mathbf{A}$ *algebry* $\mathbf{B}$ *ve faktorové algebře* $\bar{\mathbf{A}}$ *a*

b) *průsek* $\mathbf{B} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$ *algebry* $\mathbf{B}$ *s faktorovou algebrou* $\mathbf{A}$

jsou faktorové algebry v $\mathbf{G}$ *a je* $\mathbf{B} \sqsubset \bar{\mathbf{A}} = \langle B \sqsubset \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$, $\mathbf{B} \sqcap \mathbf{A} = \langle B \sqcap \bar{A}, \Omega \rangle$.

Důkaz: Rozklad $B_{\max}$ skládající se z jediného prvku B je vytvořující rozklad v $\mathbf{G}$ a tedy $\mathbf{B}_{\max}$ je faktorová algebra v $\mathbf{G}$. Když $\mathbf{B} \cap$ s$\bar{\mathbf{A}} \neq \emptyset$, pak také s$\mathbf{B}_{\max} \cap$ s$\bar{\mathbf{A}} \neq \emptyset$. Dále je $\mathbf{B} \sqsubset \mathbf{A} = \mathbf{B}_{\max} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} \sqcap \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{B}}_{\max} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$. Podle V 4/2 jsou obal $\mathbf{B} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$ a průsek $\mathbf{B} \sqcap \mathbf{A}$ faktorové algebry v $\mathbf{G}$.

D 4/2: Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou faktorové algebry v algebře $\mathbf{G}$. Pak

a) Faktorová algebra $\bar{\mathbf{A}}$ ($\bar{\mathbf{B}}$) se nazývá *zákryt* (*zjemnění*) faktorové algebry $\mathbf{B}$ ($\bar{\mathbf{A}}$), když každý prvek $b \in \mathbf{B}$ je částí některého prvku z $\bar{\mathbf{A}}$, což zapisujeme $\bar{\mathbf{A}} \geqq \mathbf{B}$ nebo $\mathbf{B} \leqq \mathbf{A}$. Když každý prvek z $\mathbf{A}$ obsahuje jako část prvek z $\bar{\mathbf{B}}$, mluvíme o *normálním zákrytu* (*zjemnění*). Když dokonce každý prvek z $\bar{\mathbf{A}}$ je součtem některých prvků z $\mathbf{B}$, mluvíme o *ryzím zákrytu* (*zjemnění*).

b) *Společným zákrytem* (*zjemněním*) nebo stručněji *zákrytem* (*zjemněním*) faktorových algeber $\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{B}$ rozumíme každou faktorovou algebru, která je zákrytem (zjemněním) faktorové algebry $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

c) *Nejmenším společným zákrytem* $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ faktorových algeber $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je takový zákryt, že každý jiný společný zákryt algeber $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$ je jeho zákrytem. *Největším společným zjemněním* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ algeber $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$ je takové zjemnění, že každé jiné zjemnění je jeho zjemněním.

Všimněme si, že když $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$ jsou faktorové algebry na algebře $\mathbf{G}$ a když $\mathbf{A} \geqq \mathbf{B}$, pak $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}$) je vždy ryzím zákrytem (zjemněním) algebry $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$). Budeme-li mluvit o faktorových algebrách na $\mathbf{G}$, budeme slovo ryzí pro stručnost vynechávat.

D 5/2: Faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ v algebře $\mathbf{G}$ nazýváme *spřažené*, když každý prvek $\bar{a} \in \mathbf{A}$ je incidentní právě s jedním prvkem z $\mathbf{B}$ a současně každý prvek z $\mathbf{B}$ je incidentní právě s jedním prvkem z $\bar{\mathbf{A}}$.

V 6/2: *Nechť* $\mathbf{A} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$, $\mathbf{C} = \langle C, \bar{\Omega} \rangle$ *jsou faktorové algebry v* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a nechť platí rovnosti* $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{C}} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{A} \sqsubset \mathbf{C}$. *Nechť faktorová algebra* $\mathbf{B} = \langle \bar{B}, \Omega \rangle$ *je společným zákrytem faktorových algeber* $\bar{\mathbf{A}} \sqcap$ s$\bar{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{C}} \sqcap$ s$\bar{\mathbf{A}}$. *Nechť* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ *jsou zákryty rozkladů* $\bar{A}$, $\bar{C}$ *vynucené rozkladem* $\bar{B}$. *Pak rozklady* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ *jsou spřažené a jsou poli faktorových algeber* $\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{\mathbf{C}}$ *a platí* $\mathbf{B} = \mathring{\mathbf{A}} \sqcap \mathring{\mathbf{C}}$.

Důkaz: Předně tvrzení, že rozklady $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ jsou spřažené a že platí $\bar{B} = \mathring{A} \sqcap \mathring{C}$, je správné (B.4.1). Stačí tedy dokázat, že jsou vytvořující. Důkaz provedeme pro rozklad $\mathring{A}$, jenž je definován jako zákryt rozkladu A vynucený rozkladem $\bar{A}$ na A. Každý prvek $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ se skládá ze všech prvků $\bar{a} \in \bar{A}$, které jsou incidentní vždy s jedním prvkem v $\bar{B}$. Položme $\mathrm{s}\bar{A} = A$, $\mathrm{s}\bar{C} = C$. Budiž $\mathring{a}_\mu = \cup_\mu \bar{a}_\mu$ prvek z $\mathring{A}$, takže $\bar{a}_\mu$ jsou prvky v $\bar{A}$ a $\bar{b}_\mu = \cup_\mu(\bar{a}_\mu \cap C)$ jsou prvky v $\bar{B}$. Poněvadž $\bar{A}$ je vytvořující rozklad, proto pro každou ν-ární operaci ω existuje prvek $\bar{a}_{1,2,\ldots,\nu} \in \bar{A}$ takový, že platí $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}_{1,2,\ldots,\nu}$. Poněvadž C je polem podalgebry $\mathrm{s}\mathbf{C}$, proto také je $(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \ldots (\bar{a}_\nu \cap C)\,\omega \subset \bar{a}_{1,2,\ldots,\nu} \cap C$. Rozklad $\bar{B}$ je vytvořující podle předpokladu, a proto existuje prvek $\bar{b}_{\nu+1} \in \bar{B}$ takový, že pro $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_\nu \in \bar{B}$ platí $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega \subset \bar{b}_{\nu+1}$, kde $\bar{b}_{\nu+1} = \cup_{\nu+1}(\bar{a}_{\nu+1} \cap C)$, tj. $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega = [\cup_1(\bar{a}_1 \cap C)]\,[\cup_2(\bar{a}_2 \cap C)] \ldots [\cup_\nu(\bar{a}_\nu \cap C)]\,\omega = \cup_1\cup_2 \ldots \cup_\nu[(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \ldots (\bar{a}_\nu \cap C)\omega] \subset \cup_{\nu+1}(\bar{a}_{\nu+1} \cap C)$, kde $\bar{a}_{\nu+1}$ jsou prvky z $\bar{A}$ vyznačující se tím, že $\cup_{\nu+1}\bar{a}_{\nu+1} = \mathring{a}_{\nu+1} \in \mathring{A}$. Pro každý prvek $\bar{a}_\mu$, na který se vztahuje znaménko $\cup_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, a každou ν-ární operaci $\omega \in \Omega$ máme vztahy $(\bar{a}_1 \cap C)(\bar{a}_2 \cap C) \ldots (\bar{a}_\nu \cap C)\,\omega \subset \bar{a}_{1,2,\ldots,\nu} \cap C \subset \cup_{\nu+1}(\bar{a}_{\nu+1} \cap C)$. Avšak průniky $\bar{a}_{1,2,\ldots,\nu} \cap C$, $\bar{a}_{\nu+1} \cap C$ jsou prvky rozkladu $\bar{A} \sqcap \bar{C}$ ležícího na $A \cap C$. Odtud plyne, že mezi prvky $\bar{a}_{\nu+1}$, na něž se vztahuje znaménko $\cup_{\nu+1}$, existuje prvek $\bar{a}_{\nu+1}$ takový, že $\bar{a}_{1,2,\ldots,\nu} \cap C = \bar{a}_{\nu+1} \cap C$, takže $\bar{a}_{1,2,\ldots,\nu} = \bar{a}_{\nu+1}$. Tak dostáváme vztahy $(\cup_1\bar{a}_1)(\cup_2\bar{a}_2) \ldots (\cup_\nu\bar{a}_\nu)\,\omega = \cup_1\cup_2 \ldots \cup_\nu(\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega) \subset \cup_1\cup_2 \ldots \cup_\nu a_{1,2,\ldots,\nu} \subset \cup_{\nu+1}\bar{a}_{\nu+1} = \mathring{a}_{\nu+1} \in \mathring{A}$. Tím je dokázáno, že rozklad $\mathring{A}$ je vytvořující a tedy polem faktorové algebry $\mathring{\mathbf{A}}$.

D 6/2: Faktorové algebry $\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{\mathbf{C}}$ z V 6/2 nazýváme *zákryty faktorových algeber* $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ *vynucené společným zákrytem* $\bar{\mathbf{B}}$ faktorových algeber $\bar{\mathbf{A}} \sqcap \mathrm{s}\bar{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{C}} \sqcap \mathrm{s}\bar{\mathbf{A}}$.

V 7/2: *Nechť* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$, $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \Omega \rangle$ *jsou faktorové algebry na algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. *Pak nejmenší společný zákryt* $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}]$ *jejich polí* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *je polem faktorové algebry, tzv. nejmenšího společného zákrytu algeber* $\bar{A}$, $\bar{B}$, *což značíme* $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}]$ *nebo* $[\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{A}}]$.

Důkaz: Jak víme (B.3.4) je nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ vynucen jistým rozkladem $\bar{\bar{A}}$ na $\bar{A}$. Přitom každá podmnožina $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$ se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{A}$, které se vesměs dají spojit (B.3.1) v rozkladu $\bar{B}$ s některým prvkem $\bar{a} \in \bar{A}$. Poněvadž $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ jsou faktorové algebry, jsou jejich pole vytvořující rozklady. Máme dokázat, že každou ν-ární operací ω je každé ν-členné posloupnosti prvků $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_\nu \in [\bar{A}, \bar{B}]$ jednoznačně přiřazen prvek $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$ takový, že $\bar{u}_1\bar{u}_2 \ldots \bar{u}_\nu\omega \subset \bar{u}$.

Nechť tedy $\bar{a}_\mu \in \bar{A}$ je libovolný prvek v $\bar{u}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$. Poněvadž $\bar{A}$ je vytvořující rozklad, existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}$. Prvek $\bar{a}$ leží v jistém prvku $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$, takže $\bar{a} \subset \bar{u}$.

Každý prvek $b_\mu \in \bar{u}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, leží v jistém prvku $\bar{b}_\mu \in \bar{A}$, který je podmnožinou v $\bar{u}_\mu$ a platí $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega \subset \bar{b} \in \bar{A}$, takže $b_1b_2 \ldots b_\nu\omega \in \bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega \subset \bar{b}$. K důkazu platnosti vztahu $\bar{u}_1\bar{u}_2 \ldots \bar{u}_\nu\omega \subset \bar{u}$ stačí zjistit, že pro libovolné prvky $\bar{b}_\mu \in \bar{A}$, $\bar{b}_\mu \in \bar{u}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, je prvek $\bar{b}$ obsahující množinu $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega$ částí prvku $\bar{u}$, tj. že platí $\bar{b} \subset \bar{u}$.

Nechť tedy ω je libovolná ν-ární operace, $\bar{b}_\mu \in \bar{A}$, $\bar{b}_\mu \subset \bar{u}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, libovolné prvky. Vzhledem k definici rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ a k tomu, že $\bar{a}_\mu$ leží v $\bar{u}_\mu$, usuzujeme, že existují vazby $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}_\mu$ do $\bar{b}_\mu$

$$\bar{a}_{\mu 1}, \bar{a}_{\mu 2}, \ldots, \bar{a}_{\mu \alpha_\mu}, \qquad \text{kde} \qquad \bar{a}_{\mu 1} = \bar{a}_\mu, \bar{a}_{\mu \alpha_\mu} = \bar{b}_\mu. \tag{3.2}$$

Můžeme předpokládat, že $\alpha_\mu = \alpha$, kde $\alpha = \max \alpha_\mu$ pro všechna $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, neboť v případě, že pro některé μ je $\alpha_\mu < \alpha$ položíme $\bar{a}_{\mu, \alpha_\mu + 1} = \ldots = \bar{a}_{\mu\alpha} = \bar{a}_{\mu\alpha_\mu}$. Poněvadž rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, existují v $\bar{A}$ prvky

$$c_1, c_2, \ldots, c_\alpha, \qquad \text{kde} \qquad c_1 = \bar{a}, c_\alpha = \bar{b} \tag{4.2}$$

takové, že platí

$$\begin{aligned} &\bar{a}_{11}\bar{a}_{21} \ldots \bar{a}_{\nu 1}\omega = \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset c_1 = \bar{a}, \\ &\bar{a}_{21}\bar{a}_{22} \ldots \bar{a}_{\nu 2}\omega \subset c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\bar{a}_{1\alpha}\bar{a}_{2\alpha} \ldots \bar{a}_{\nu\alpha}\omega = \bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega \subset c_\alpha = \bar{b}. \end{aligned}$$

Přihlédneme-li k definici rozkladu $[\bar{A}, \bar{B}]$ a k tomu, že prvek $c_1 = \bar{a}$ leží v $\bar{u}$, vidíme, že k důkazu platnosti $\bar{b} \subset \bar{u}$ stačí zjistit, že posloupnost (4.2) je vazbou $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ od $\bar{a}$ do $\bar{b}$.

Poněvadž (3.2) jsou vazby $\{\bar{A}, \bar{B}\}$, existuje ke každým dvěma sousedním prvkům $\bar{a}_{\mu\varkappa}, \bar{a}_{\mu,\varkappa+1}$ jistý prvek $\bar{x}_{\mu\varkappa} \in \bar{B}$, který je s oběma incidentní pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$. Rozklad $\bar{B}$ je vytvořující, a tedy existuje jistý prvek $\bar{z}_\varkappa \in \bar{B}$, pro nějž platí $\bar{x}_{1\varkappa}\bar{x}_{2\varkappa} \ldots$ $\ldots \bar{x}_{\nu\varkappa}\omega \subset \bar{z}_\varkappa$. Prvek $\bar{x}_{\mu\varkappa}$ je incidentní s $\bar{a}_{\mu\varkappa}$, a proto je množina $\bar{x}_{1\varkappa}\bar{x}_{2\varkappa} \ldots \bar{x}_{\nu\varkappa}\omega \subset \bar{z}_\varkappa$ incidentní s množinou $\bar{a}_{1\varkappa}\bar{a}_{2\varkappa} \ldots \bar{a}_{\nu\varkappa}\omega \subset \bar{c}_\varkappa$, a tedy i prvek $\bar{z}_\varkappa$ je incidentní s prvkem $\bar{c}_\varkappa$. Podobně se zjistí, že prvek $\bar{z}_\varkappa$ je incidentní také s prvkem $\bar{c}_{\varkappa+1}$. Tím je dokázáno, že každé dva prvky $\bar{c}_\varkappa, \bar{c}_{\varkappa+1} \in \bar{A}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha - 1$, jsou incidentní s jistým prvkem $\bar{z}_\varkappa \in \bar{B}$, a tedy posloupnost (4.2) je vazbou od $\bar{a}$ do $\bar{b}$ a věta je dokázána.

V 8/2: *Nechť* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$, $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \Omega \rangle$ *jsou faktorové algebry na* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. *Pak největší společné zjemnění* $(\bar{A}, \bar{B})$ *jejich polí je polem faktorové algebry, tzv. největšího společného zjemnění algeber* $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$, *což značíme* $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = \langle (\bar{A}, \bar{B}), \Omega \rangle$.

Důkaz: Pro pole $\bar{A}, \bar{B}$ algeber $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ platí, že jejich největší společné zjemnění $(\bar{A}, \bar{B}) = \bar{A} \sqcap \bar{B}$ (B.3.5). Podle V 4/2 je $\bar{\mathbf{A}} \sqcap \bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{A} \sqcap \bar{B}, \Omega \rangle$ faktorová algebra na $\mathbf{G}$ a věta je dokázána.

D 7/2: Nechť $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$, $\bar{\mathbf{C}} = \langle \bar{C}, \Omega \rangle$ jsou faktorové algebry a $\mathbf{B} = \langle B, \Omega \rangle$, $\mathbf{D} = \langle D, \Omega \rangle$ podalgebry v algebře $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ takové, že $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{C}}$ a $\mathbf{B} \cap \mathbf{D} \neq \emptyset$. Pak říkáme, že *faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}}$ *jsou adjungované vzhledem k podalgebrám* $\mathbf{B}, \mathbf{D}$, když tuto vlastnost mají jejich pole, tj. když platí $\mathrm{s}(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = \mathrm{s}(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A)$, kde $A = \mathrm{s}\bar{A}$, $C = \mathrm{s}\bar{C}$.

V 9/2: *Nechť faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$, $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \Omega \rangle$ *jsou adjungované vzhledem k podalgebrám* $\mathbf{B}, \mathbf{D}$. *Nechť* $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{C} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{D} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{A} \sqsubset \bar{\mathbf{C}}$, $\bar{\mathbf{C}}_2 = \mathbf{B} \sqsubset \bar{\mathbf{C}}$, $\mathbf{A}_1 = \mathrm{s}\bar{\mathbf{A}}_1$, $\mathbf{A}_2 = \mathrm{s}\bar{\mathbf{A}}_2$, $\mathbf{C}_1 = \mathrm{s}\bar{\mathbf{C}}_1$, $\mathbf{C}_2 = \mathrm{s}\bar{\mathbf{C}}_2$. *Nechť* $\bar{\mathbf{U}}$ *je nejmenší společný zákryt* *faktorových algeber* $\mathbf{A}_1 \sqcap \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_1 \sqcap \bar{\mathbf{A}}_1$ *a* $\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{\mathbf{C}}$ *nechť jsou zákryty faktorových algeber* $\bar{\mathbf{A}}_1$, $\bar{\mathbf{C}}_1$ *vynucené zákrytem* $\bar{\mathbf{U}}$. *Pak*

a) *faktorové algebry* $\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{\mathbf{C}}$ *jsou spřažené,*

b) $\mathbf{A}_2 \in \mathring{\mathbf{A}}$, $\mathbf{C}_2 \in \mathring{\mathbf{C}}$,

c) *podalgebry* $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{C}_2$ *jsou incidentní.*

Důkaz: Věta je správná, pokud se týká polí uvažovaných algeber (B.4.2). Zbývá dokázat, že uvažované množiny jsou skutečně algebrami. Avšak $\bar{\mathbf{A}}_1$, $\bar{\mathbf{A}}_2$, $\bar{\mathbf{C}}_1$, $\bar{\mathbf{C}}_2$ jsou faktorové algebry podle V 4/2, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ jsou podalgebry podle V 3/2. Také $\mathbf{A}_1 \sqcap \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_1 \sqcap \bar{\mathbf{A}}_1$ jsou faktorové algebry podle V 5/2. $\bar{\mathbf{U}}$ je pak faktorová podle V 7/2 a zákryty $\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathring{\mathbf{C}}$ faktorových algeber $\bar{\mathbf{A}}_1$, $\bar{\mathbf{C}}_1$ vynucené faktorovou algebrou $\bar{\mathbf{U}}$ jsou faktorové algebry podle V 6/2, neboť rovnosti $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{C}_1 \sqsubset \bar{\mathbf{A}}_1$, $\bar{\mathbf{C}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_1 \sqsubset \bar{\mathbf{C}}_1$ jsou splněny (B.4.2). Tím je věta dokázána.

V 10/2: *Nechť* $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \bar{\Omega} \rangle$ *je faktorová algebra na algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a* $\bar{B}$ *nějaký její rozklad. Nechť* $\bar{A}$ *je zákryt pole* $\bar{B}$ *vynucený rozkladem* $\bar{\bar{B}}$. *Pak rozklad* $\bar{A}$ *je polem faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$ *tehdy a jen tehdy, když* $\bar{B}$ *je polem faktorové algebry* $\bar{\bar{\mathbf{B}}} = \langle \bar{\bar{B}}, \bar{\bar{\Omega}} \rangle$ *na* $\bar{B}$.

Důkaz: a) Nechť $\bar{\bar{B}}$ je polem faktorové algebry $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$ na $\bar{\mathbf{B}}$, tj. nechť $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující rozklad na $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \bar{\Omega} \rangle$. Nechť ω je libovolná ν-ární operace, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu$ libovolné prvky z $\bar{A}$. Máme dokázat, že existuje prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ takový, že platí $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}$. Pro $\bar{a}_\mu \in \bar{A}$ platí vztah

$$\bar{a}_\mu = \cup\, \bar{b}_\mu,\ \bar{b}_\mu \in \bar{\bar{b}}_\mu \in \bar{\bar{B}},\ \bar{\bar{b}}_\mu \in \bar{\bar{B}}, \tag{5.2}$$

tj. $\bar{a}_\mu$ je sjednocením všech prvků $\bar{b}_\mu \in \bar{B}$ ležících v určitém prvku $\bar{\bar{b}}_\mu \in \bar{\bar{B}}$. Pro prvky z $\bar{B}$ platí vztah

$$\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\omega \subset \bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\bar{\omega} \in \bar{B}. \tag{6.2}$$

Vzhledem k vztahu (5.2) pak platí

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \cup\, (\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\bar{\omega}). \tag{7.2}$$

Poněvadž $\bar{\bar{B}}$ je vytvořující rozklad, existuje prvek $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ takový, že

$$\bar{\bar{b}}_1\bar{\bar{b}}_2 \ldots \bar{\bar{b}}_\nu\bar{\bar{\omega}} \subset \bar{\bar{b}}, \tag{8.2}$$

tj. takový, že všechny prvky $\bar{b}_\mu \in \bar{B}$, pro něž platí $\bar{b}_\mu \in \bar{\bar{b}}_\mu$, je $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\bar{\omega}$ prvkem množiny $\bar{\bar{b}}$. Označíme-li nyní písmenem $\bar{a}$ onen prvek v $\bar{A}$, který je součtem všech prvků v $\bar{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$, pak máme vztah

$$\cup\, (\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\bar{\omega}) \subset \bar{a},\ \bar{b}_\mu \in \bar{\bar{b}}_\mu, \tag{9.2}$$

a tedy vzhledem k (7.2) také platí

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}. \tag{10.2}$$

Rozklad $\bar{A}$ je tedy vytvořující, tj. je polem faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$.

b) Nechť zákryt $\bar{\mathbf{A}}$ faktorové algebry $\bar{\mathbf{B}}$ je faktorová algebra, tj. nechť pole $\bar{A}$ je vytvořující rozklad. Nechť $\bar{\omega}$ je libovolná ν-ární operace z $\bar{\Omega}$, $\bar{\bar{b}}_1, \bar{\bar{b}}_2, \ldots, \bar{\bar{b}}_\nu$ libovolné prvky z B. Podle definice rozkladu $\bar{A}$ pro každý prvek $\bar{a}_\mu \in A$ platí vztah (5.2). Poněvadž rozklad $\bar{A}$ je vytvořující, platí pro každou ν-ární operaci ω a libovolné prvky $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu \in \bar{A}$ vztah

$$\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}, \bar{a} \in \bar{A}. \tag{11.2}$$

Z definice rozkladu $\bar{A}$ plyne, že $\bar{a} = \cup b$, $b \in \bar{b}$, $\bar{b} \subset \bar{B}$, $b \in \bar{B}$. Pro libovolné prvky $b_1 \in \bar{b}_1$, $b_2 \in \bar{b}_2$, $\ldots$, $b_\nu \in \bar{b}_\nu$ máme vzhledem k (5.2) vztah

$$b_1b_2 \ldots b_\nu\omega \subset \bar{a}, \tag{12.2}$$

a protože $\bar{B}$ je faktorová algebra, proto také platí

$$b_1b_2 \ldots b_\nu\bar{\omega} = b \in \bar{b}. \tag{13.2}$$

Odtud plyne, že je splněna podmínka

$$b_1b_2 \ldots b_\nu\bar{\omega} \subset \bar{b}, \tag{14.2}$$

a proto rozklad $\bar{B}$ je vytvořující. Je tedy polem faktorové algebry $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \bar{\Omega} \rangle$, kde operace $\bar{\bar{\omega}}$ je definována tak, že $\bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu\bar{\bar{\omega}} = \bar{b}$ právě tehdy, když platí (14.2).

D 8/2: Nechť $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \mathbf{B}$ jsou faktorové algebry z předešlé věty. Pak faktorová algebra $\mathbf{A}$ se nazývá *zákryt faktorové algebry* $\mathbf{B}$ *vynucený faktorovou algebrou* $\bar{\mathbf{B}}$ a o faktorové algebře $\bar{\mathbf{B}}$ říkáme, že je *příslušná k zákrytu* $\bar{\mathbf{A}}$ *faktorové algebry* $\mathbf{B}$.

Všimněme si, že pro každou faktorovu algebru $\mathbf{A}$ na algebře $\mathbf{G}$ platí vztahy $\bar{\mathbf{G}}_{\max} \geqq \bar{\mathbf{A}} \geqq \bar{\mathbf{G}}_{\min}$.

D 9/2: Nechť $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$, $\mathbf{B} = \langle \bar{B}, \bar{\Omega} \rangle$ jsou faktorové algebry na $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ a nechť jejich pole jsou doplňkové rozklady, tj. nechť pro každé dva prvky $\bar{a} \in \bar{\mathbf{A}}$, $\bar{b} \in \mathbf{B}$ ležící v témž prvku $\bar{u} \in [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ platí, že jsou incidentní. Pak faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$ nazýváme *doplňkové*.

3. Deformace algeber

D 1/3: Říkáme, že algebry $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ a $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega^* \rangle$ jsou téhož typu, existuje-li prosté zobrazení h systému operací Ω na systém Ω^* takové, že když $\omega^* = \mathrm{h}\omega$ ($\omega \in \Omega$, $\omega^* \in \Omega^*$), pak operace ω a ω^* jsou téhož typu ν.

Úmluva **1/3:** Všude dále se předpokládá, že uvažované algebry jsou téhož typu, tj. že mají týž systém operací.

D 2/3: Nechť $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$, $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ jsou dané algebry a nechť existuje zobrazení d pole G algebry $\mathbf{G}$ do pole G^* algebry $\mathbf{G}^*$ takové, že pro každou ν-ární operaci ω a libovolné prvky $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbf{G}$ platí

$$\mathrm{d}(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega) = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \ldots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega. \tag{1.3}$$

Pak říkáme, že d je *homomorfní zobrazení algebry* $\mathbf{G}$ *do algebry* $\mathbf{G}^*$. Homomorfní zobrazení algebry $\mathbf{G}$ na algebru $\mathbf{G}^*$ nazýváme také *homomorfismus*.

Místo dlouhého názvu homomorfní zobrazení budeme užívat název *deformace*.

Existuje-li deformace algebry $\boldsymbol{G}$ na algebru $\boldsymbol{G}^*$, pak říkáme, že *algebra* $\boldsymbol{G}^*$ je *homomorfní s algebrou* $\boldsymbol{G}$.

V 1/3: *Nechť* $\{A_1, A_2, \ldots\}$ *je systém podmnožin v algebře* $\boldsymbol{G} = \langle G, \Omega\rangle$, ω *libovolná* ν*-ární operace a nechť existuje deformace* d *algebry* $\boldsymbol{G}$ *do algebry* $\boldsymbol{G}^* = \langle G^*, \Omega\rangle$. *Pak pro rozšířené zobrazení* $\bar{d}$ *(B.7.1) platí*

$$\bar{\mathrm{d}}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega) = (\bar{\mathrm{d}}A_1)(\bar{\mathrm{d}}A_2) \ldots (\bar{\mathrm{d}}A_\nu)\,\omega. \tag{2.3}$$

Je-li $A_1A_2 \ldots A_\nu\omega \subset A$, *pak platí*

$$(\bar{\mathrm{d}}A_1)(\bar{\mathrm{d}}A_2) \ldots (\bar{\mathrm{d}}A_\nu)\,\omega \subset \bar{\mathrm{d}}A. \tag{3.3}$$

Důkaz: Každý prvek $a^* \in \bar{\mathrm{d}}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega)$ je obrazem nějakého prvku $a = a_1a_2 \ldots a_\nu\omega$, $a_\mu \in A_\mu$ v zobrazení d, takže máme $a^* = \mathrm{d}(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega) = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \ldots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega \in (\bar{d}A_1)(\bar{d}A_2) \ldots (dA_\nu)\,\omega$. Platí tedy vztah

$$\bar{\mathrm{d}}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega) \subset (\bar{\mathrm{d}}A_1)(\bar{\mathrm{d}}A_2) \ldots (\bar{\mathrm{d}}A_\nu)\,\omega. \tag{4.3}$$

Obráceně každý prvek $a^* \in (\bar{\mathrm{d}}A_1)(\bar{\mathrm{d}}A_2) \ldots (\bar{\mathrm{d}}A_\nu)\,\omega$ se dá psát ve tvaru $a^* = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \ldots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega$, $\mathrm{d}a_\mu \in \bar{\mathrm{d}}A_\mu$, takže existují prvky $a_\mu \in A_\mu$ takové, že platí $a^* = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \ldots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega = \mathrm{d}(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega) \in \bar{\mathrm{d}}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega)$. Platí tedy vztah

$$(\bar{\mathrm{d}}A_1)(\bar{\mathrm{d}}A_2) \ldots (\bar{\mathrm{d}}A_\nu)\,\omega \subset \bar{\mathrm{d}}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega). \tag{5.3}$$

Ze vztahů (4.3) a (5.3) plyne pak platnost vztahu (2.3).

Poněvadž $A_1A_2 \ldots A_\nu\omega \subset A$, proto $\bar{\mathrm{d}}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega) \subset \bar{\mathrm{d}}A$ a vzhledem k (2.3) platí pak rovněž vztah (3.3) a věta je dokázána.

Pozn. 1/3: Nebude-li možný omyl, budeme rozšířené zobrazení d indukované deformací d algebry $\boldsymbol{G}$ do algebry $\boldsymbol{G}$ značit pouze d.

D 3/3: Prostou deformaci d algebry $\boldsymbol{G}$ do algebry $\boldsymbol{G}^*$ nazýváme *izomorfní zobrazení algebry* $\boldsymbol{G}$ *do* $\boldsymbol{G}^*$. Izomorfní zobrazení $\boldsymbol{G}$ na $\boldsymbol{G}^*$ se nazývá také *izomorfismus.*

Zřejmě ke každé prosté deformaci d algebry $\boldsymbol{G}$ na algebru $\boldsymbol{G}^*$ existuje inversní zobrazení d^{-1} algebry $\boldsymbol{G}^*$ na $\boldsymbol{G}$ dané vztahem $\mathrm{d}^{-1}a^* = a$, když $\mathrm{d}a = a^*$. Existuje-li tedy izomorfismus algebry $\boldsymbol{G}$ na $\boldsymbol{G}^*$, pak také existuje izomorfismus algebry $\boldsymbol{G}^*$ na $\boldsymbol{G}$ a říkáme, že algebry $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{G}^*$ jsou izomorfní, což značíme $\boldsymbol{G} \simeq \boldsymbol{G}^*$.

V 2/3: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\boldsymbol{G} = \langle G, \Omega\rangle$ *do algebry* $\boldsymbol{G}^* = \langle G^*, \Omega\rangle$ *a nechť* $\boldsymbol{A} = \langle A, \Omega\rangle$ *je podalgebra v* $\boldsymbol{G}$. *Pak obraz* d$\boldsymbol{A}$ *podalgebry* $\boldsymbol{A}$ *v rozšířeném zobrazení* d *je podalgebra v* $\boldsymbol{G}^*$.

Důkaz: Podle V 1/2 je A polem podalgebry $\boldsymbol{A}$ tehdy a jen tehdy, když pro libovolnou ν-ární operaci $\omega \in \Omega$ platí $A_1A_2 \ldots A_\nu\omega \subset A$ pro $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$. Pak podle V 1/3 je jednak $\mathrm{d}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega) \subset \mathrm{d}A$ a jednak $\mathrm{d}(A_1A_2 \ldots A_\nu\omega) = (\mathrm{d}A_1)(\mathrm{d}A_2) \ldots (\mathrm{d}A_\nu)\,\omega$. Proto je $(\mathrm{d}A_1)(\mathrm{d}A_2) \ldots (\mathrm{d}A_\nu)\,\omega \subset \mathrm{d}A$ pro $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$. Je tedy d$A$ polem podalgebry d$\boldsymbol{A}$ v $\boldsymbol{G}$.

V 3/3: *Nechť existuje deformace* d_μ *algebry* $\mathbf{G}_\mu$ *do algebry* $\mathbf{G}_{\mu+1}$, $\mu = 1, 2, 3$. *Definujeme-li skládání deformací jako obvyklé skládání zobrazení, pak platí:*

a) *zobrazení* $\mathrm{d} = \mathrm{d}_2\mathrm{d}_1$ *je deformace* $\mathbf{G}_1$ *do* $\mathbf{G}_3$,

b) *pro skládání deformací platí zákon asociativní, tj.* $\mathrm{d}_3(\mathrm{d}_2\mathrm{d}_1) = (\mathrm{d}_3\mathrm{d}_2)\,\mathrm{d}_1$.

c) *jsou-li* d_1, d_2 *izomorfní zobrazení algebry do algebry (na algebru), pak také zobrazení* $\mathrm{d} = \mathrm{d}_2\mathrm{d}_1$ *je izomorfní zobrazení algebry do algebry (na algebru),*

d) *vztah algeber „být izomorfní" je vztah ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrický a tranzitivní.*

Důkaz věty je zřejmý.

V 4/3: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$. *Pak rozklad* D *pole* G *patřící k deformaci* d *je vytvořující. Rozklad* D *nazýváme také deformační rozklad.*

Důkaz: Každý prvek $\bar{a} \in D$ se skládá ze všech prvků $a \in \mathbf{G}$, pro něž platí $\mathrm{d}a = a^* \in \mathbf{G}^*$. Nechť ω je libovolná ν-ární operace, $\bar{a}_\mu$ množina všech prvků $\bar{a}_\mu \in \mathbf{G}$, pro něž $\mathrm{d}a_\mu = a_\mu^*$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$. Pak každý prvek $a \in \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega$ je tvaru $a = a_1a_2 \ldots a_\nu\omega$, $a_\mu \in \bar{a}_\mu$. Z rovnosti $\mathrm{d}a = \mathrm{d}(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega) = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \ldots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega = a_1^*a_2^* \ldots a_\nu^*\omega = a^*$ plyne, že a je vzorem prvku a^* v deformaci d. Je tedy bod a obsažen v tom prvku $\bar{a} \in \bar{D}$, který se skládá ze vzorů prvku $a^* = a_1^*a_2^* \ldots a_\nu^*\omega$. Platí tedy vztah $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}$ a rozklad D je vytvořující.

D 5/3: Nechť existuje deformace d algebry $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ na algebru $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$. Pak faktorovou algebru $\bar{\mathbf{D}} = \langle D, \Omega \rangle$, jejímž polem je deformační rozklad D a operace jsou definovány jako v D 2/3, nazýváme *faktorovou algebrou příslušnou k deformaci* d nebo kratčeji *deformační faktorovou algebrou.*

D 6/3: Nechť v algebře $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ existuje prvek O takový, že pro každou ν-ární operaci $\omega \in \Omega$ platí

$$OO \ldots O\omega = O, \tag{6.3}$$

kde na levé straně v (6.3) stojí prvek O ν-kráte. Pak prvek O nazýváme *nulovým prvkem* algebry $\mathbf{G}$.

V 5/3: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *a nechť v* $\mathbf{G}^*$ *existuje nulový prvek* O^*. *Pak podmnožina* A *v* $\mathbf{G}$ *všech prvků* $a \in \mathbf{G}$, *pro něž platí* $\mathrm{d}a = O^*$, *je polem podalgebry* $\mathbf{A}$ *v* $\mathbf{G}$. *Pole* A *podalgebry* $\mathbf{A}$ *je nulovým prvkem deformační faktorové algebry* $\bar{\mathbf{D}} = \langle \bar{D}, \bar{\Omega} \rangle$.

Důkaz: Nechť ω je libovolná ν-ární operace a nechť A je množina všech prvků $a \in \mathbf{G}$, pro něž platí $\mathrm{d}a = O^*$. Pak každý prvek $a \in A_1A_2 \ldots A_\nu\omega$, $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$, je tvaru $a = a_1a_2 \ldots a_\nu\omega$, $a_\mu \in A$. Z rovnosti $\mathrm{d}a = \mathrm{d}(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega) = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \ldots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega = O^*O^* \ldots O^*\omega = O^*$ plyne, že a je vzorem prvku O^* v deformaci d, a tedy $a \in A$, kde $A = \bar{a}$ je prvek deformačního rozkladu $\bar{D}$. Proto platí $A_1A_2 \ldots A_\nu\omega \subset A$ pro $A_1 = A_2 = \ldots A_\nu = A$, tj. podle V 1/2 je podmnožina A polem podalgebry $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$.

Jak víme, je $A = \bar{a}$ prvkem faktorové algebry $\bar{\mathbf{D}} = \langle \bar{D}, \Omega \rangle$ příslušné k deformacid. Pak vzhledem k tomu, že A je polem podalgebry $\mathbf{A}$, platí pro každou ν-ární operaci

$\bar{\omega} \in \Omega$ definovanou podle D 2/2 vztah $A_1A_2 \dots A_\nu\bar{\omega} = A$ pro $A_1 = A_2 = \dots = A_\nu = A$, a tedy množina A je nulovým prvkem algebry $\bar{\mathbf{D}}$.

Snadno se dokáže, že platí věta

V 6/3: *Nechť v algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *existuje nulový prvek* O *a nechť existuje její deformace* d *do algebry* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$. *Pak v* $\mathbf{G}^*$ *existuje nulový prvek* O^* *a platí* $O^* = \mathrm{d}O$.

V 7/3: *Nechť* $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$ *je podalgebra v* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a nechť existuje izomorfní zobrazení* h *algebry* $\mathbf{A}$ *na algebru* $\mathbf{A}^* = \langle A^*, \Omega \rangle$. *Pak existuje nadalgebra* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *na* $\mathbf{A}^*$ *taková, že existuje izomorfní zobrazení* d *algebry* $\mathbf{G}$ *na* $\mathbf{G}^*$, *jež v sobě obsahuje původní izomorfismus* h.

Důkaz: Nechť A_1 je množina všech prvků pole G, které nepatří do pole A. Nechť dále A_1^* je množina disjunktní s polem A^* algebry $\mathbf{A}^*$ a nechť existuje prosté zobrazení f množiny A_1 na množinu A_1^*. Pak je zřejmě $G = A \cup A_1$ a položíme $G^* = A^* \cup A_1^*$. Nyní přiřadíme každému prvku $a \in G$ právě jeden prvek $a^* \in G^*$ takto: Je-li $a \in A$, pak $\mathrm{d}a = \mathrm{h}a = a^* \in A^*$; je-li $a \in A_1$, pak $\mathrm{d}a = fa = a^* \in A_1^*$. Zobrazení d je tedy prosté zobrazení G na G^* a obsahu je v sobě původní zobrazení h.

Nechť nyní ω je libovolná ν-ární operace a $\mathrm{d}a_\mu = a_\mu^*$, $a_\mu \in G$, $a_\mu^* \in G^*$, $\mu = 1, 2, \dots, \nu$. Operaci v G^* definujeme tak, že $a_1^*a_2^* \dots a_\nu^*\omega = a^*$ právě tehdy, když $a_1a_2 \dots a_\nu\omega = a$ a když $\mathrm{d}a = a^*$. Pak zobrazení d je zřejmě izomorfismus, který zachovává původní izomorfismus h.

4. Věty o izomorfismu algeber

V 1/4: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$. *Nechť* $\bar{\mathbf{D}} = \langle \bar{D}, \bar{\Omega} \rangle$ *je deformační faktorová algebra na* $\mathbf{G}$. *Pak* $\bar{\mathbf{D}}$ *je izomorfní s algebrou* $\mathbf{G}^*$.

Důkaz: Předně existuje prosté zobrazení i deformačního rozkladu $\bar{D}$ a G^* takové, že obrazem prvku $\bar{a} \in \bar{D}$ je onen prvek $a^* \in G^*$, pro nějž platí $\mathrm{d}\bar{a} = a^*$ (B.6.8.1), tj. $\mathrm{i}\bar{a} = a^*$. Nechť nyní $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_\nu$ jsou libovolné prvky z $\bar{\mathbf{D}}$, ω libovolná ν-ární operace z Ω, $\bar{\omega}$ jí odpovídající operace z $\bar{\Omega}$. Pak pro $a_\mu \in \bar{a}_\mu \in \bar{\mathbf{D}}$, $\mu = 1, 2, \dots, \nu$, platí vztahy $a_1a_2 \dots a_\nu\omega \in \bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_\nu\bar{\omega} \in \bar{\mathbf{D}}$. Odtud plyne $\mathrm{i}(\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_\nu\bar{\omega}) = \mathrm{d}(a_1a_2 \dots a_\nu\omega) = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \dots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega = (\mathrm{i}\bar{a}_1)(\mathrm{i}\bar{a}_2) \dots (\mathrm{i}\bar{a}_\nu)\,\bar{\omega}$ a věta je dokázána.

V 2/4: *Nechť* $\bar{\mathbf{G}} = \langle \bar{G}, \bar{\Omega} \rangle$ *je faktorová algebra na algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a nechť* d *je zobrazení* $\mathbf{G}$ *na* $\bar{\mathbf{G}}$ *takové, že* $\mathrm{d}a = \bar{a}$ *pro* $a \in \bar{a}$, $a \in \mathbf{G}$, $\bar{a} \in \bar{\mathbf{G}}$. *Pak toto zobrazení je deformace.*

Důkaz: Nechť ω je libovolná ν-ární operace, $a_\mu \in \bar{a}_\mu \in \bar{\mathbf{G}}$, $\mu = 1, 2, \dots, \nu$. Pak ze vztahu $\bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a}$ plyne $a_1a_2 \dots a_\nu\omega = a \in \bar{a}$. Je-li nyní $\mathrm{d}a_\mu = \bar{a}_\mu$, máme jednak $\bar{a} = \mathrm{d}a = \mathrm{d}(a_1a_2 \dots a_\nu\omega)$ a jednak $\bar{a} = \bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_\nu\omega = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \dots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega$.

Protože pro zobrazení d platí $\mathrm{d}(a_1a_2 \dots a_\nu\omega) = (\mathrm{d}a_1)(\mathrm{d}a_2) \dots (\mathrm{d}a_\nu)\,\omega$, je d deformace.

D 1/4: Deformaci d algebry $\mathbf{G}$ na faktorovou algebru $\bar{\mathbf{G}}$ z předešlé věty nazýváme *přirozenou deformací.*

V 3/4: *Nechť* $\bar{\mathbf{G}} = \langle \bar{G}, \bar{\Omega} \rangle$ *je faktorová algebra na* $\mathbf{G}$, d *přirozená deformace* $\mathbf{G}$ *na* $\bar{\mathbf{G}}$ *a nechť existuje izomorfní zobrazení* i *algebry* $\bar{\mathbf{G}}$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$. *Pak existuje deformace* $\mathrm{f} = \mathrm{di}$ *algebry* $\mathbf{G}$ *na* $\mathbf{G}^*$.

Důkaz: Předně algebry $\mathbf{G}$, $\bar{\mathbf{G}}$ a $\mathbf{G}^*$ jsou téhož typu, jak je zřejmé z definice operací v $\bar{\mathbf{G}}$ na základě operací v $\mathbf{G}$. Zobrazení f je deformace podle V 3/7, a to deformace $\mathbf{G}$ na $\mathbf{G}^*$.

V 4/4: *(První věta o izomorfismu): Nechť algebra* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *je homomorfní s algebrou* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. *Pak je* $\mathbf{G}^*$ *izomorfní s jistou faktorovou algebrou na* $\mathbf{G}$. *Obráceně, je-li algebra* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *izomorfní s nějakou faktorovou algebrou na algebře* $\mathbf{G}$, *pak je homomorfní s* $\mathbf{G}$.

Důkaz: Věta je shrnutím vět V 1/4 a V 3/4.

V 5/4: *(Druhá věta o izomorfismu): Nechť* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega} \rangle$, $\mathbf{B} = \langle B, B \rangle$ *jsou spřažené faktorové algebry v algebře* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. *Takové zobrazení* i *algebry* $\bar{\mathbf{A}}$ *na* $\mathbf{B}$, *které každému prvku* $\bar{a} \in \bar{\mathbf{A}}$ *přiřazuje ten prvek* $b \in \mathbf{B}$, *jenž je s ním incidentní, je izomorfismus, tj.* $\bar{\mathbf{A}} \simeq \mathbf{B}$.

Důkaz: Jak víme, je i prosté zobrazení pole $\bar{A}$ algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na pole B algebry $\mathbf{B}$ (B.6.8.2). Zbývá dokázat, že i zachovává operaci $\bar{\omega}$. Nechť tedy ω je libovolná ν-ární operace z Ω a $\bar{\omega}$ jí odpovídající ν-ární operace z $\bar{\Omega}$. Nechť $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu \in \bar{\mathbf{A}}$, $b_1, b_2, \ldots, b_\nu \in \mathbf{B}$ jsou libovolné prvky. Budiž $b_\mu = \mathrm{i}\bar{a}_\mu$, tj. $x_\mu = \bar{a}_\mu \cap b_\mu \neq \emptyset$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$. Zřejmě platí vztahy $x_1 x_2 \ldots x_\nu \omega \subset \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega \subset \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \bar{\omega}$, $x_1 x_2 \ldots x_\nu \omega \subset b_1 b_2 \ldots b_\nu \omega \subset b_1 b_2 \ldots b_\nu \omega$. Je tedy průnik $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \bar{\omega} \cap b_1 b_2 \ldots \ldots b_\nu \omega \supset x_1 x_2 \ldots x_\nu \omega \neq \emptyset$, a proto je $\mathrm{i}(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \bar{\omega}) = (\mathrm{i}\bar{a}_1)(\mathrm{i}\bar{a}_2) \ldots (\mathrm{i}\bar{a}_\nu)\, \bar{\omega}$ a věta je dokázána.

V 6/4: *Nechť* $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$ *je faktorová algebra a* $\mathbf{B} = \langle B, \Omega \rangle$ *podalgebra v* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *a nechť* $\mathbf{B} \cap \mathrm{s}\bar{\mathbf{A}} \neq \emptyset$. *Pak obal* $\mathbf{B} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$ *je izomorfní s průsekem* $\mathbf{B} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$ *a izomorfismus je dán incidencí prvků.*

Důkaz: Faktorové algebry $\mathbf{B} \sqsubset \bar{\mathbf{A}}$ a $\mathbf{B} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$ jsou spřažené a tedy věta je správná podle V 5/4.

V 7/4: *(Třetí věta o izomorfismu): Nechť* $\mathbf{B} = \langle B, \Omega \rangle$ *je faktorová algebra v* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$. *Pak faktorová algebra* $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \bar{\Omega} \rangle$ *na faktorové algebře* $\mathbf{B}$ *a zákryt* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \Omega \rangle$ *faktorové algebry* $\mathbf{B}$ *vynucený faktorovou algebrou* $\bar{\mathbf{B}}$ *jsou izomorfní. Izomorfní zobrazení* i *algebry* $\bar{\mathbf{B}}$ *na* $\bar{\mathbf{A}}$ *přiřazuje každému prvku* $\bar{b} \in \bar{\mathbf{B}}$ *právě ten prvek* $\bar{a} \in \bar{\mathbf{A}}$, *pro nějž platí* $\bar{a} = \mathrm{s}\bar{b}$.

Důkaz: Především zobrazení i je prosté zobrazení $\bar{\mathbf{B}}$ na $\bar{\mathbf{A}}$ (B.6.8.3). Zbývá dokázat, že je deformací. Pro zobrazení i platí $\mathrm{i}\bar{b} = \bar{a}$ právě tehdy, když $\bar{a}$ je součtem všech prvků $b \in \mathbf{B}$ ležících v $\bar{b}$, tj. když $\bar{a} = \mathrm{s}\bar{b}$. Nechť $\bar{\bar{\omega}}$ je ν-ární operace z $\bar{\bar{\Omega}}$, $\bar{\omega}$ jí odpovídající operace z $\bar{\Omega}$ a ω jim odpovídající ν-ární operace z Ω. Nechť $\bar{b}_\mu \in \bar{\mathbf{B}}$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$, pak pro $b_\mu \in \mathbf{B}$, $b_\mu \in \bar{b}_\mu$ platí $b_1 b_2 \ldots b_\nu \bar{\omega} \in \bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots \bar{b}_\nu \bar{\bar{\omega}} = \bar{b}$. Nechť $\bar{a}_\mu = \mathrm{s}\bar{b}_\mu$, $\bar{a} = \mathrm{s}\bar{b}$, tj. nechť $\mathrm{i}\bar{b}_\mu = \bar{a}_\mu$, $\mathrm{i}\bar{b} = \bar{a}$. Pak ze vztahu $b_1 b_2 \ldots b_\nu \bar{\omega} \in \bar{b}$ plyne především, že $b_1 b_2 \ldots b_\nu \bar{\omega} \subset \bar{a}$. Dále platí $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega = (\mathrm{s}b_1)(\mathrm{s}\bar{b}_2) \ldots (\mathrm{s}\bar{b}_\nu)\, \omega \subset$ $\subset \mathrm{s}(\bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots b_\nu \bar{\omega}) = \mathrm{s}b = \bar{a}$. Prvek $\bar{a} = \mathrm{i}\bar{b}$ obsahuje podmnožinu $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega$, takže $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \bar{\omega} = \bar{a}$. Můžeme tedy psát $\mathrm{i}b = (\mathrm{i}b_1)(\mathrm{i}b_2) \ldots (\mathrm{i}b_\nu)\, \bar{\omega}$ a věta je dokázána.

5. Rozšířená deformace

Úmluva **1/5:** a) Je-li d deformace algebry $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ na algebru $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$, pak faktorovou algebru na $\mathbf{G}$ příslušnou k deformaci d budeme vždy značit $\bar{\mathbf{D}} = \langle D, \bar{\Omega} \rangle$.

b) Rozšířené zobrazení systému všech podmnožin v $\mathbf{G}$ do systému všech podmnožin v $\mathbf{G}^*$ určené deformací d budeme rovněž značit pouze d.

V 1/5: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *a nechť faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}} = \langle A, \bar{\Omega} \rangle$, $\bar{\mathbf{D}} = \langle D, \bar{\Omega} \rangle$ *na* $\mathbf{G}$ *jsou doplňkové. Pak rozklad* $\mathrm{d}\bar{A}$ *na* $\mathbf{G}^*$ *je polem faktorové algebry* $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}} = \langle \mathrm{d}A, \bar{\Omega} \rangle$.

Důkaz: Jak víme (B.7.2), je $\mathrm{d}\bar{A}$ rozkladem pole G^* algebry $\mathbf{G}^*$ tehdy a jen tehdy, když rozklady A, D jsou doplňkové. Zbývá dokázat, že $\mathrm{d}A$ jakožto systém obrazů v d jednotlivých prvků rozkladu $\bar{A}$ je vytvořující rozklad. Nechť tedy ω je libovolná ν-ární operace, $\bar{a}$, $\bar{a}_\mu \in \bar{A}$, $\bar{a}^* = \mathrm{d}\bar{a}$, $a^*_\mu = \mathrm{d}\bar{a}^*_\mu$ jsou prvky z $\mathrm{d}A$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ a nechť $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega \subset a$. Pak podle V 1/3 platí $(\mathrm{d}\bar{a}_1)(\mathrm{d}\bar{a}_2) \ldots (\mathrm{d}\bar{a}_\nu)\, \omega \subset \mathrm{d}\bar{a}$. Existuje tedy prvek $\bar{a}^* = \mathrm{d}\bar{a} \in \mathrm{d}A$ takový, že $\bar{a}^*_1 \bar{a}^*_2 \ldots \bar{a}^*_\nu \omega \subset a^*$. Proto rozklad $\mathrm{d}A$ je vytvořující a tedy polem faktorové algebry $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$.

D 1/5: Faktorovou algebru $\mathrm{d}\mathbf{A} = \langle \mathrm{d}A, \bar{\Omega} \rangle$ z předešlé věty nazýváme *obrazem faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}}$ v rozšířeném zobrazení d a faktorovou algebru $\bar{\mathbf{A}}$ nazýváme jejím *vzorem*.

Pozn. 1/5: Všimněme si, že rozšířeným zobrazením d je určeno *částečné rozšířené zobrazení* (B.7.1) faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na faktorovou algebru $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$, jímž je každému prvku $\bar{a} \in \bar{\mathbf{A}}$ přiřazen jeho obraz $\mathrm{d}\bar{a} \in \mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$. V dalším výkladu rozumíme zobrazením d faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na faktorovou algebru $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$ toto částečné zobrazení.

V 2/5: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *a nechť faktorová algebra* $\bar{\mathbf{A}} = \langle A, \bar{\Omega} \rangle$ *je doplňková k faktorové algebře* $\bar{\mathbf{D}} = \langle D, \bar{\Omega} \rangle$. *Pak částečné rozšířené zobrazení* d *faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}}$ *na faktorovou algebru* $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$, *jímž je každému prvku* $\bar{a} \in \bar{\mathbf{A}}$ *přiřazen jeho obraz* $\mathrm{d}\bar{a} \in \mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$, *je deformací.*

Důkaz: Nechť $\omega \in \Omega$ je libovolná ν-ární operace $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu \in \bar{A}$, $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots$ $\ldots \bar{a}_\nu \bar{\omega} = \bar{a}$. Pak $\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega \subset \bar{a}$ a podle V 1/3 platí $(\mathrm{d}\bar{a}_1)(\mathrm{d}\bar{a}_2) \ldots (\mathrm{d}\bar{a}_\nu)\, \omega \subset \mathrm{d}\bar{a}$, takže máme $(\mathrm{d}\bar{a}_1)(\mathrm{d}\bar{a}_2) \ldots (\mathrm{d}\bar{a}_\nu)\, \omega = \mathrm{d}\bar{a} = \mathrm{d}(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu \omega)$.

D 2/5: Částečné rozšířené zobrazení d faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na faktorovou algebru $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$ z předešlé věty nazýváme *rozšířenou deformací.*

V 3/5: *Nechť existuje deformace* d *algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ *na algebru* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega \rangle$ *a nechť faktorová algebra* $\bar{\mathbf{A}} = \langle A, \Omega \rangle$ *je doplňková k faktorové algebře* $\bar{\mathbf{D}} = \langle D, \bar{\Omega} \rangle$. *Dále nechť* $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \langle \bar{A}, \bar{\bar{\Omega}} \rangle$ *je faktorová algebra na* $\bar{\mathbf{A}}$ *příslušná k rozšířené deformaci* d *algebry* $\mathbf{A}$ *na algebru* $\mathrm{d}\mathbf{A}$. *Pak zákryt faktorové algebry* $\mathbf{A}$ *vynucený faktorovou algebrou* $\mathbf{A}$ *je nejmenší společný zákryt* $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{D}}]$ *faktorových algeber* $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{D}}$.

Důkaz: Podle V 4/3 je $\mathbf{A}$ faktorová algebra na $\mathbf{A}$. Poněvadž zákryt rozkladu A vynucený rozkladem A je nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, D]$ rozkladů $\bar{A}, D$ (B.7.2) a podle V 7/2 je $[A, D]$ polem faktorové algebry $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{D}}]$, je věta dokázána.

V 4/5: *Nechť* $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{D}}$ *jsou doplňkové faktorové algebry na* $\mathbf{G}$ *a nechť faktorová algebra* $\mathbf{A}^*$ *na* $\mathbf{G}^*$ *je obrazem faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}}$ *v rozšířené deformaci* d. *Pak faktorové algebry* $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{D}}]$, $\mathbf{A}^*$ *jsou izomorfní a izomorfismus* i *algebry* $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{D}}]$ *na* $\bar{\mathbf{A}}^*$ *dostaneme, když každému prvku* $\bar{u} \in [\mathbf{A}, \mathbf{D}]$ *přiřadíme jeho obraz v rozšířené deformaci* d, *tj.* $\mathrm{i}\bar{u} = \mathrm{d}\bar{u} \in \bar{\mathbf{A}}^*$.

Důkaz: Nechť platí označení z V 3/5. Podle V 7/4 existuje izomorfní zobrazení i_1 algebry $[\mathbf{A}, \mathbf{D}]$ na algebru $\bar{\mathbf{A}}$ ležící na $\mathbf{A}$ takové, že pro $\bar{u} \in [\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{D}}]$, $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathbf{A}}}$ je $\mathrm{i}_1\bar{u} = \bar{\bar{a}}$ právě tehdy, když $\bar{u} = \mathrm{s}\bar{\bar{a}}$. Když každému prvku $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathbf{A}}}$ přiřadíme onen prvek $\bar{a}^* \in \mathbf{A}^*$, který je v d obrazem každého prvku $\bar{a} \in \mathbf{A}$ ležícího v $\bar{\bar{a}}$, dostaneme podle V 1/4 izomorfní zobrazení i_2 faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na faktorovou algebru $\bar{\mathbf{A}}^*$, tj. $\mathrm{i}_2\bar{\bar{a}} = \bar{a}^*$. Pak zobrazení $\mathrm{i} = \mathrm{i}_2\mathrm{i}_1$ je izomorfní zobrazení $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{D}}]$ na algebru $\bar{\mathbf{A}}^*$ a věta je dokázána.

Důsledek 1/5: Je-li faktorová algebra $\mathbf{A}$ zákrytem faktorové algebry $\bar{\mathbf{D}}$ příslušné deformaci d algebry $\mathbf{G}$ na $\mathbf{G}^*$, pak $\mathbf{A}$ je izomorfní se svým obrazem $\mathrm{d}\mathbf{A}$ v rozšířené deformaci d. Izomorfismus i algebry $\mathbf{A}$ na $\mathrm{d}\bar{\mathbf{A}}$ dostaneme, když každému prvku $\bar{a} \in \mathbf{A}$ přiřadíme jeho obraz $\mathrm{d}\bar{a} \in \mathrm{d}\mathbf{A}$.

Správnost tvrzení je zřejmá, uvědomíme-li si, že každý zákryt algebry $\bar{\mathbf{D}}$ je s ní doplňkový (B.5.1).

V 5/5: *Budiž* i *izomorfismus algebry* $\mathbf{G}$ *na algebru* $\mathbf{G}^*$, $\bar{\mathbf{A}}$ *faktorová algebra na* $\mathbf{G}$. *Pak její obraz v rozšířeném zobrazení* i *je jistá faktorová algebra* $\mathrm{i}\mathbf{A}$ *na* $\mathbf{G}^*$ *a částečné rozšířené zobrazení* i *faktorové algebry* $\mathbf{A}$ *na faktorovou algebru* $\mathrm{i}\bar{\mathbf{A}}$ *je rozšířený izomorfismus ve smyslu* D 2/5.

Důkaz: Předně i je deformace a faktorová algebra na $\mathbf{G}$ příslušná k této deformaci je $\bar{\mathbf{G}}_{\min} = \mathbf{G}$, tj. $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{G}$. Pak $\bar{\mathbf{A}}$ je zákryt $\bar{\mathbf{D}}$, a tedy $\mathbf{A}, \bar{\mathbf{G}}_{\min}$ jsou doplňkové rozklady. Podle V 1/5 je $\mathrm{i}\mathbf{A}$ faktorová algebra na $\mathbf{G}^*$. Přiřadíme-li každému prvku $\bar{a} \in \mathbf{A}$ jeho obraz $\mathrm{i}\bar{a} \in \mathrm{i}\mathbf{A}$ v rozšířeném zobrazení i, pak takto definované částečné zobrazení i algebry $\mathbf{A}$ na $\mathrm{i}\mathbf{A}$ je deformace podle V 2/5 a D 2/5. Toto částečné rozšířené zobrazení je zřejmě prosté zobrazení $\mathbf{A}$ na $\mathrm{i}\mathbf{A}$, a tedy rozšířený izomorfismus.

Pozn. 2/5: Mluvíme-li o rozšířeném izomorfismu i algebry $\bar{\mathbf{A}}$ ležící na $\mathbf{G}$ na algebru $\mathrm{i}\mathbf{A}$ ležící na $\mathbf{G}^*$, pak jím vždy rozumíme izomorfismus ve shora uvedeném smyslu.

V 6/5: *Nechť* $\mathbf{A}$ *je faktorová algebra na algebře* $\mathbf{G}$, $\bar{\mathbf{C}}$ *faktorová algebra na* $\mathbf{G}^*$ *a nechť existuje izomorfní zobrazení* i *algebry* $\mathbf{A}$ *na algebru* $\bar{\mathbf{C}}$. *Nechť* $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ *je faktorová algebra na* $\mathbf{A}$ *a* $\mathring{\mathbf{A}}$ *zákryt algebry* $\bar{\mathbf{A}}$ *vynucený faktorovou algebrou* $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. *Nechť* $\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \mathrm{i}\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ *je faktorová algebra na* $\bar{\mathbf{C}}$ *v rozšířeném izomorfismu* i. *Pak zákryt algebry* $\bar{\mathbf{C}}$ *vynucený faktorovou algebrou* $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$ *je faktorová algebra* $\mathring{\mathbf{C}}$ *a zobrazení* d *algebry* $\mathring{\mathbf{A}}$ *na* $\mathring{\mathbf{C}}$, *v němž každému prvku* $\mathring{a} = \mathrm{s}\bar{\bar{a}} \in \mathring{\mathbf{A}}$ *je přiřazen prvek* $\mathring{c} = \mathrm{s}(\mathrm{i}\bar{\bar{a}}) \in \mathring{\mathbf{C}}$ *je rozšířený izomorfismus*.

Důkaz: Podle V 7/4 je zobrazení i_1, v němž každému prvku $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathbf{A}}}$ je přiřazen ten prvek $\mathring{a} \in \mathring{\mathbf{A}}$, pro který platí $\mathring{a} = \mathrm{s}a$, izomorfní zobrazení $\bar{\mathbf{A}}$ na $\mathring{\mathbf{A}}$. Podle V 5/5 je $\bar{\mathbf{C}} = \mathrm{i}\bar{\mathbf{A}}$ faktorová algebra na $\mathbf{C}$. Pak zobrazení i_2, pro něž $\mathrm{i}_2\bar{c} = \mathring{c} \in \mathring{\mathbf{C}}$ právě tehdy, když $\mathring{c} = \mathrm{s}\bar{c}$, je izomorfní zobrazení $\bar{\mathbf{C}}$ na $\mathring{\mathbf{C}}$. Izomorfismus i faktorové algebry $\mathbf{A}$ na $\mathbf{C}$ určuje částečné rozšířené izomorfní zobrazení i faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na faktorovou algebru $\bar{\mathbf{C}}$, pro něž platí $\mathrm{i}\bar{a} = \bar{c}$. Pak zobrazení $\mathrm{d} = \mathrm{i}_2\mathrm{i}\mathrm{i}_1^{-1}$ je izomorfní zobrazení faktorové algebry $\mathring{\mathbf{A}}$ na faktorovou algebru $\mathring{\mathbf{C}}$, neboť $\mathrm{d}\mathring{a} = \mathrm{i}_2\mathrm{i}(\mathrm{i}_1^{-1}\mathring{a}) = \mathrm{i}_2(\mathrm{i}\bar{a}) = \mathrm{i}_2\bar{c} = \mathring{c}$. Tím je věta dokázána.

6. Relativně jednoduché a jednoduché algebry

D 1/6: Nechť a je prvek algebry $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ a nechť pro každou faktorovou algebru $\bar{G}$ na $\mathbf{G}$ platí buď

1) $\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ nebo

2) faktorová algebra $\bar{\mathbf{G}}$ obsahuje jako prvek množinu $\{a\}$ tvořenou jediným prvkem a, tj. $\{a\} \in \bar{\mathbf{G}}$.

Pak algebru $\mathbf{G}$ nazýváme *jednoduchou vzhledem k prvku a*. Je-li $\mathbf{G}$ jednoduchá vzhledem k některému svému prvku, pak říkáme, že je *relativně jednoduchá*. Algebru $\mathbf{G}$, která je jednoduchá vzhledem ke každému svému prvku, nazýváme *jednoduchou*.

V 1/6: *Algebra $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ je jednoduchá tehdy a jen tehdy, když $\bar{\mathbf{G}}_{\max}$ a $\bar{\mathbf{G}}_{\min}$ jsou jediné její faktorové algebry.*

Důkaz: Jsou-li $\bar{\mathbf{G}}_{\max}$ a $\bar{\mathbf{G}}_{\min}$ jediné faktorové algebry na $\mathbf{G}$, pak $\mathbf{G}$ je zřejmě jednoduchá algebra. Nechť nyní obráceně je $\mathbf{G}$ jednoduchá a nechť $\bar{\mathbf{G}}$ je faktorová algebra na $\mathbf{G}$. Je-li $\bar{\mathbf{G}} \neq \bar{\mathbf{G}}_{\max}$, pak podle D 1/6 pro každé $a \in \mathbf{G}$ platí, že $\bar{\mathbf{G}}$ obsahuje jako prvek množinu $\{a\}$ tvořenou jediným prvkem a, a tedy $\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{G}}_{\min}$.

D 2/6: Nechť $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ je algebra a $B \neq \emptyset$ podmnožina v $\mathbf{G}$ taková, že je prvkem faktorové algebry $\bar{\mathbf{G}}$ na $\mathbf{G}$, tj. $B \in \bar{\mathbf{G}}$. Nechť pro každou faktorovou algebru $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ na $\bar{\mathbf{G}}$ platí buď

1) $\bar{\bar{\mathbf{G}}} = (\bar{\mathbf{G}})_{\max}$, tj. $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ je největší faktorová algebra na $\bar{\mathbf{G}}$ nebo

2) $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ obsahuje jako prvek podmnožinu B, tj. $B \in \bar{\bar{\mathbf{G}}}$.

Pak faktorovou algebru $\bar{\mathbf{G}}$ na $\mathbf{G}$ nazýváme *jednoduchou vzhledem k podmnožině B*. Je-li $\bar{\mathbf{G}}$ jednoduchá vzhledem k některému svému prvku, pak ji nazýváme *relativně jednoduchou*. Je-li faktorová algebra jednoduchá vzhledem ke každému svému prvku, pak říkáme, že je *jednoduchá*.

Pozn. 1/6: Obvykle uvažujeme případ, že B je polem podalgebry $\mathbf{B}$ v $\mathbf{G}$ a mluvíme pak o faktorové algebře $\bar{\mathbf{G}}$ jednoduché vzhledem k podalgebře $\mathbf{B}$.

V 2/6: *Nechť faktorová algebra $\bar{\mathbf{C}}$ je zákrytem faktorové algebry $\bar{\mathbf{G}}$ na $\mathbf{G}$ a $B \neq \emptyset$ podmnožina v $\mathbf{G}$. Pak faktorová algebra $\bar{\mathbf{G}}$ je jednoduchá vzhledem k B tehdy a jen tehdy, když platí buď*

1) $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ *nebo*

2) $B \in \bar{\mathbf{C}}$, *tj. B je prvek faktorové algebry $\bar{\mathbf{C}}$.*

Důkaz: a) Nechť $\bar{\mathbf{G}}$ je jednoduchá algebra vzhledem k B a nechť $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ je faktorová algebra na $\bar{\mathbf{G}}$ příslušná k zákrytu $\mathbf{C}$. Podle D 2/6 je buď 1) $\bar{\bar{\mathbf{G}}} = (\bar{\bar{\mathbf{G}}})_{\max}$ nebo 2) $B \in \bar{\bar{\mathbf{G}}}$. Pak je buď 1) $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ nebo 2) $B \in \bar{\mathbf{C}}$.

b) Nechť nyní faktorová algebra $\bar{\mathbf{G}}$ není jednoduchá vzhledem k B. Pak existuje faktorová algebra $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ na $\bar{\mathbf{G}}$ taková, že neplatí ani 1) ani 2) z D 2/6. Existuje tedy prvek $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathbf{G}}}$ takový, že B je vlastní podmnožina v $s\bar{\bar{a}}$ a $s\bar{\bar{a}}$ je vlastní podmnožina v $\mathbf{G}$. Pak faktorová algebra $\bar{\mathbf{C}}$, jež je zákrytem $\bar{\mathbf{G}}$ vynuceným algebrou $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$, obsahuje prvek $\bar{c} = s\bar{\bar{a}}$, a tedy zákryt $\bar{\mathbf{C}}$ není ani největší faktorová algebra na $\mathbf{G}$ ani neobsahuje B jako prvek. Tím je věta dokázána.

V 3/6: *Nechť $B \neq 0$ je polem podalgebry $\mathbf{B}$ v algebře $\mathbf{G}$ a nechť faktorová algebra $\bar{\mathbf{G}}$ ležící na $\mathbf{G}$ není jednoduchá. Pak existuje záryt $\bar{\mathbf{C}}$ faktorové algebry $\bar{\mathbf{G}}$ takový, že $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}_1 \in \bar{\mathbf{C}}$, kde $\mathbf{C}_1$ je vlastní podalgebra v $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}$ vlastní podalgebra v $\mathbf{C}_1$.*

Důkaz: Podle části b) důkazu V 2/6 obsahuje zákryt $\bar{\mathbf{C}}$ prvek $\bar{c} = s\bar{\bar{a}}$ takový, že $\bar{c}$ je vlastní podmnožinou v $\mathbf{G}$ a B vlastní podmnožina v $C_1 = \bar{c}$. Zbývá dokázat, že $C_1 = \bar{c}$ je polem podalgebry v $\mathbf{G}$. Nechť tedy ω je libovolná ν-ární operace. Pak pro $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \ldots = \bar{c}_\nu = \bar{c} \in \bar{\mathbf{C}}$ existuje prvek $\bar{c}' \in \bar{\mathbf{C}}$ takový, že $\bar{c}_1\bar{c}_2 \ldots \bar{c}_\nu\omega = \bar{c}'$. Poněvadž však $\mathbf{B}$ je podalgebra v $\mathbf{G}$ proto $B_1B_2 \ldots B_\nu\omega \subset B \subset \bar{c}$ pro $B_1 = B_2 = \ldots = B_\nu = B$. Jsou tedy $\bar{c} = C_1$ a $\bar{c}'$ incidentní, a proto podle definice rozkladu je nutně $\bar{c}' = \bar{c}$. Tím je dokázáno, že C_1 je polem podalgebry $\mathbf{C}_1$ v $\mathbf{G}$.

V 4/6: *Faktorová algebra $\bar{\mathbf{G}}$ na $\mathbf{G}$ je jednoduchá tehdy a jen tehdy, když pro každou faktorovou algebru $\bar{\mathbf{C}}$, která je zákrytem $\bar{\mathbf{G}}$, platí buď*

1) $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ *nebo*

2) $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{G}}$.

Důkaz: Vzhledem k D 2/6 platí podle V 1/6, že $\bar{\mathbf{G}}$ je jednoduchá faktorová algebra tehdy a jen tehdy, když pro každou faktorovou algebru $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ na $\bar{\mathbf{G}}$ platí buď 1) $\bar{\bar{\mathbf{G}}} = (\bar{\mathbf{G}})_{\max}$ nebo 2) $\bar{\bar{\mathbf{G}}} = (\bar{\mathbf{G}})_{\min}$ jsou jediné faktorové algebry na $\bar{\mathbf{G}}$. Poněvadž podle V 10/2 každá faktorová algebra $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$ na $\bar{\mathbf{G}}$ vynucuje jistý zákryt $\bar{\mathbf{C}}$ algebry $\bar{\mathbf{G}}$ a obráceně, je v případě 1) $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{G}}_{\max}$ a v případě 2) je $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{G}}$, čímž je věta dokázána.

7. Řetězce faktorových algeber

V úvahách o řetězcích faktorových algeber se poněkud odchýlíme od označení užívaného v práci [1] a [2]. Je-li $[\bar{K}] = \bar{K}_1 \to \bar{K}_2 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ řetězec rozkladů od A do B v množině G (B.2.5), pak množinu $s\bar{K}_\gamma$ označíme písmenem K_γ a nikoliv $\bar{a}_\gamma$, tj. $s\bar{K}_\gamma = K_\gamma$. Analogicky píšeme $s\mathring{\bar{K}}_\gamma = K_\gamma$, je-li $\mathring{\bar{K}}_\gamma \in [\bar{K}]$. Je zřejmé, že tohoto označení budeme užívat i pro algebry.

D 1/7: Nechť $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ jsou podalgebry v algebře $\mathbf{G}$, α přirozené číslo. *Řetězcem faktorových algeber od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$*, stručněji *řetězcem od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$* rozumíme konečnou posloupnost tvořenou faktorovými algebrami $\bar{\mathbf{K}}_1, \bar{\mathbf{K}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{K}}_\alpha$, která má tyto vlastnosti:

1. faktorová algebra $\bar{\mathbf{K}}_1$ leží na $\mathbf{A}$,
2. pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1$ faktorová algebra $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma+1}$ leží na některém prvku v $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$,
3. $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{K}}_\alpha$.

Takový řetězec označujeme

$$[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \bar{\mathbf{K}}_2 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha, \quad \text{stručněji } [\bar{\mathbf{K}}]. \tag{1.7}$$

Všechny pojmy, které jsou definovány pro řetězce rozkladů (B.2.5 a B.4.2), se dají přenést na řetězce faktorových algeber, speciálně pak pojem elementárního řetězce a adjungovaných řetězců.

D 2/7: Nechť $\bar{\mathbf{A}}$ je faktorová algebra, $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$ podalgebra v algebře $\mathbf{G}$ a označme $\mathbf{A} = s\bar{\mathbf{A}}$. Pak *elementárním řetězcem faktorových algeber od algebry* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ *nad faktorovou algebrou* $\bar{\mathbf{A}}$, stručněji *elementárním řetězcem nad* $\bar{\mathbf{A}}$, rozumíme řetězec faktorových algeber (1.7), pro nějž platí, že pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ je člen $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ zákrytem faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}_\gamma = \bar{\mathbf{A}} \sqcap \mathbf{K}_\gamma$, kde $\mathbf{K}_\gamma = s\bar{\mathbf{K}}_\gamma$, $\mathbf{K}_1 = \mathbf{A}$.

D 3/7: a) Nechť $\mathbf{A} = s\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B}$ jsou podalgebry, $\bar{\mathbf{A}}$ faktorová algebra a $[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \to \bar{\mathbf{K}}_2 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ elementární řetězec od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$. Budiž β celé číslo takové, že $1 \leqq \beta \leqq \alpha$. Jsou-li splněny podmínky, že

1) $\bar{\mathbf{K}}_1 = \ldots = \bar{\mathbf{K}}_{\beta-1}$ je největší faktorová algebra $\bar{\mathbf{A}}_{\max}$ na algebře $\mathbf{A}$,

2) $\bar{\mathbf{K}}_\beta$ je zákryt faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}$, jenž obsahuje $\mathbf{B}$ jako prvek,

3) $\bar{\mathbf{K}}_{\beta+1} = \ldots = \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ je největší faktorová algebra $\bar{\mathbf{B}}_{\max}$ na algebře $\mathbf{B}$,

pak řetězec $[\bar{\mathbf{K}}]$ nazýváme *elementární řetězec typu* (β) nebo kratčeji *elementární řetězec* (β).

V případě, že $\beta = 1$, čteme v definici jen 2) a 3) a v případě $\beta = \alpha$ čteme v definici jen 1) a 2).

b) Je-li speciálně $\bar{\mathbf{K}}_\beta = \bar{\mathbf{A}}$, nazýváme $[\bar{\mathbf{K}}]$ *význačný elementární řetězec typu* (β) od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$, stručněji *význačný elementární řetězec* (β) nad $\bar{\mathbf{A}}$.

Pozn. 1/7: a) Je-li speciálně řetězec $[\bar{\mathbf{K}}]$ od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$ tvořen jediným svým členem $\bar{\mathbf{K}}_1 = \bar{\mathbf{A}}$, což zapisujeme $[\bar{\mathbf{K}}] = \{\bar{\mathbf{A}}\}$, pak $\{\bar{\mathbf{A}}\}$ je význačný elementární řetězec (1) do $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$ délky 1.

b) Všimněme si, že když faktorovou algebru $\bar{\mathbf{A}}$ nahradíme význačným elementárním řetězcem (β) od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$ délky α a je-li $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$, dostaneme týž výsledek, jako když sestrojíme elementární řetězec $[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha$, v němž klademe $\bar{\mathbf{K}}_1 = \ldots = \bar{\mathbf{K}}_{\beta-1} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$, $\bar{\mathbf{K}}_\beta = \bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{K}}_{\beta+1} = \ldots = \bar{\mathbf{K}}_\alpha = \bar{\mathbf{B}}_{\max}$.

V 1/7: *Nechť* $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$ a $[\bar{\mathbf{K}}]$ *je elementární řetězec od* $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$ délky α. *Pak* $[\bar{\mathbf{K}}]$ *je význačný elementární řetězec* (β) *nad* $\bar{\mathbf{A}}$ *pro každé* β, *pro něž* $1 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Důkaz: Nechť $[\bar{\mathbf{K}}]$ je elementární řetězec od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$. Je-li $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$, pak také každý zákryt $\bar{\mathbf{A}}$ je $\bar{\mathbf{A}}_{\max}$. tj. $\bar{\mathbf{K}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{\max} = \bar{\mathbf{A}}$. Protože $\mathbf{K}_2 \in \bar{\mathbf{K}}_1$, je nutně $s\bar{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{A}$. Avšak $\bar{\mathbf{K}}_2$ je zákrytem $\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{K}_2 \sqcap \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$, a tedy také $\bar{\mathbf{K}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Analogicky se dokáže, že také $\mathbf{K}_3 = \ldots = \mathbf{K}_\alpha = \mathbf{A}$, a tedy $\bar{\mathbf{K}}_3 = \ldots = \bar{\mathbf{K}}_\alpha = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Poněvadž $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$, je nutně $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Jsou tedy splněny podmínky D 3/7 a $[\bar{\mathbf{K}}]$ je význačný elementární řetězec (β) od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$.

V 2/7: *Nechť* $[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ *je řetězec od* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ *a nechť* $\mathbf{A} = \mathbf{K}_1 = \ldots = \mathbf{K}_\alpha = \mathbf{B}$. *Pak* $[\bar{\mathbf{K}}]$ *je význačný elementární řetězec* (β) *nad* $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$ *pro každé* β, *pro něž* $1 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Důkaz: Poněvadž $\bar{\mathbf{K}}_1$ je faktorová algebra na $\mathbf{A}$, $\mathbf{K}_2 \in \bar{\mathbf{K}}_1$ a $\mathbf{K}_2 = \mathbf{A}$, je to možné tehdy a jen tehdy, když $\bar{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{A}_{\max}$. Analogicky se dokáže, že také $\bar{\mathbf{K}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_{\max}, \ldots, \bar{\mathbf{K}}_\alpha = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Platí přitom vždy $\bar{\mathbf{K}}_\beta \geqq \bar{\mathbf{A}}_{\max} \sqcap \mathbf{K}_\beta$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$, a proto je $[\bar{\mathbf{K}}]$ elementární řetězec nad $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\max}$, který je podle V 1/7 význačným elementárním řetězcem (β) nad $\bar{\mathbf{A}}$.

V 3/7: *Nechť* $[\mathbf{K}]$ *je elementární řetězec od* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ *nad* $\bar{\mathbf{A}}$ *a* α' *jeho redukovaná délka. Pak*

a) $\alpha' = 0$, *je-li* $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\max}$,

b) $\alpha' > 0$, *je-li* $\bar{\mathbf{A}} \neq \bar{\mathbf{A}}_{\max}$.

Důkaz: a) Je-li $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\max}$, pak $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, neboť $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$. Proto nutně $\bar{\mathbf{K}}_1 = \ldots \bar{\mathbf{K}}_\alpha = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Jsou tedy všechny členy řetězce nepodstatné a $\alpha' = 0$.

b) Je-li $\bar{\mathbf{A}} \neq \mathbf{A}_{\max}$, pak řetězec $[\bar{\mathbf{K}}]$ obsahuje alespoň jeden podstatný člen $\bar{\mathbf{K}}_\alpha \neq \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Je totiž $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ a $\mathbf{B}$ je vlastní podalgebra v $\mathbf{A}$, neboť $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$.

V 4/7: *Nechť* $[\mathring{\mathbf{K}}]$ *je elementární řetězec od* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ *nad* $\bar{\mathbf{A}}$. *Pak řetězce* $[\bar{\mathbf{K}}] = \{\bar{\mathbf{A}}\}$ *a* $[\mathring{\mathbf{K}}]$ *mají stejnou redukovanou délku tehdy a jen tehdy, když* $[\mathring{\mathbf{K}}]$ *je elementární řetězec* (β) *nad* $\bar{\mathbf{A}}$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$.

Důkaz: a) Nechť řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$ a $[\mathring{\mathbf{K}}]$ mají stejnou redukovanou délku α'. Podle pozn. 1/7 a) je délka řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$ rovna 1, a tedy $\alpha' \leqq 1$. Je-li nyní $\alpha' = 0$, pak $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$ a podle V 1/7 je $[\mathring{\mathbf{K}}]$ elementární řetězec (β) nad $\bar{\mathbf{A}}$.

Nechť tedy $\alpha' = 1$. Pak v elementárním řetězci $[\mathring{\mathbf{K}}]$ je podstatný právě jeden člen $\mathring{\mathbf{K}}_\beta$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$. Je-li $\beta < 1$, pak členy $\mathring{\mathbf{K}}_1, \ldots, \mathring{\mathbf{K}}_{\beta-1}$ jsou nepodstatné, tj. $\mathbf{K}_1 = \ldots = \mathbf{K}_{\beta-1} = \mathbf{K}_\beta = \mathbf{A}$ a platí $\mathring{\mathbf{K}}_1 = \ldots = \mathring{\mathbf{K}}_{\beta-1} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Je-li $\beta < \alpha$, pak členy $\mathbf{K}_{\beta+1}, \ldots, \mathring{\mathbf{K}}_\alpha$ jsou nepodstatné, tj. $\mathbf{K}_{\beta+1} = \ldots = \mathbf{K}_\alpha = \mathbf{B}$ a platí $\mathring{\mathbf{K}}_{\beta+1} = \ldots = \mathring{\mathbf{K}}_\beta = \mathbf{B}_{\max}$. Poněvadž $\mathring{\mathbf{K}}_\beta$ je zákryt $\mathbf{K}_\beta \sqcap \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}$ a $\mathring{\mathbf{K}}_\beta$ obsahuje $\mathbf{B}$ jako prvek, je $[\mathring{\mathbf{K}}]$ elementární řetězec (β) nad $\bar{\mathbf{A}}$.

b) Nechť nyní $[\mathring{\mathbf{K}}]$ je elementární řetězec (β) nad $\bar{\mathbf{A}}$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$. Pak pro redukovanou délku α' řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$ platí buď $\alpha' = 0$ pro $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ nebo $\alpha' = 1$ pro $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$. Je-li totiž $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, pak redukovaná délka $[\bar{\mathbf{K}}] = \{\bar{\mathbf{A}}\}$ je rovna nule, neboť $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Je-li $\mathbf{B}$ vlastní podalgebra v $\mathbf{A}$, pak $\bar{\mathbf{A}} \neq \bar{\mathbf{A}}_{\max}$ a redukovaná délka $\{\bar{\mathbf{A}}\}$ je rovna 1.

V 5/7: *Nechť* $\mathbf{B}$ *je podalgebra v* $\mathbf{G}$ *a nechť je prvkem faktorové algebry* $\bar{\mathbf{A}}$ *v* $\mathbf{G}$. *Nechť* $[\mathbf{K}]$ *je elementární řetězec od* $\mathbf{A} = s\bar{\mathbf{A}}$ *do* $\mathbf{B}$ *nad* $\bar{\mathbf{A}}$. *Pak* $[\mathbf{K}]$ *je elementární řetězec* (β) *nad* $\bar{\mathbf{A}}$ *tehdy a jen tehdy, když* $\bar{\mathbf{A}}$ *je jednoduchá faktorová algebra vzhledem k* $\mathbf{B}$.

Důkaz: a) Nechť $\bar{\mathbf{A}}$ je jednoduchá faktorová algebra vzhledem k $\mathbf{B}$ a $[\mathbf{K}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ elementární řetězec nad $\bar{\mathbf{A}}$. Je-li nyní $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$, pak podle V 1/7 je $[\mathbf{K}]$ dokonce význačný elementární řetězec (β) nad $\bar{\mathbf{A}}$ pro každé β, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$. Nechť tedy $\bar{\mathbf{A}} \neq \mathbf{A}_{\max}$. Pak $\mathbf{B}$ je vlastní podalgebra v $\mathbf{A}$. Poněvadž $\bar{\mathbf{A}}$ je jednoduchá vzhledem k $\mathbf{B}$, pak podle V 2/6 jediné možné zákryty $\bar{\mathbf{A}}$ jsou buď $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$ nebo takový zákryt $\bar{\mathbf{C}}$, že $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{C}}$. Pro určité β, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$, platí pak rovnosti $\mathbf{A} = \mathbf{K}_1 = \ldots = \mathbf{K}_\beta$, avšak $\mathbf{K}_{\beta+1}$ je vlastní podalgebrou v $\mathbf{K}_\beta$. Odtud plyne, že $\bar{\mathbf{K}}_1 = \ldots = \bar{\mathbf{K}}_{\beta-1} = \bar{\mathbf{A}}_{\max}$. Poněvadž jednak $\bar{\mathbf{A}}_\beta = \mathbf{K}_\beta \sqcap \bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}$ a jednak $\bar{\mathbf{K}}_\beta \geqq \bar{\mathbf{A}}_\beta$, proto podle V 2/6 obsahuje faktorová algebra $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta$ jako prvek algebru $\boldsymbol{B}$. Je-li nyní $\beta < \alpha$, pak $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}_{\beta+1} = \ldots = \boldsymbol{K}_\alpha \supset \boldsymbol{B}$, a tedy $\bar{\boldsymbol{K}}_{\beta+1} = \ldots = \bar{\boldsymbol{K}}_\alpha = \bar{\boldsymbol{B}}_{\max}$ a $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ je elementární řetězec (β) nad $\bar{\boldsymbol{A}}$.

b) Nechť nyní faktorová algebra $\bar{\boldsymbol{A}}$ není jednoduchá vzhledem k $\boldsymbol{B}$. Pak podle V 3/6 existuje zákryt $\bar{\boldsymbol{C}}$ algebry $\bar{\boldsymbol{A}}$ takový, že $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{C}_1 \in \bar{\boldsymbol{C}}$. Přitom $\boldsymbol{B}$ je vlastní podalgebra v $\boldsymbol{C}_1$ a $\boldsymbol{C}_1$ je vlastní podalgebra v $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$. Položme $\bar{\boldsymbol{K}}_1 = \bar{\boldsymbol{C}}$, $\bar{\boldsymbol{K}}_2 = \boldsymbol{C}_1 \sqcap \bar{\boldsymbol{A}}$. Pak $\boldsymbol{B} \in \bar{\boldsymbol{K}}_2$ a řetězec $[\bar{\boldsymbol{K}}] = \bar{\boldsymbol{K}}_1 \to \bar{\boldsymbol{K}}_2$ je sice elementární řetězec nad $\bar{\boldsymbol{A}}$, není však elementární řetězec typu (β), neboť $\bar{\boldsymbol{K}}_2$ není ani zákrytem $\bar{\boldsymbol{A}}$ ani není $\bar{\boldsymbol{K}}_2 = \bar{\boldsymbol{B}}_{\max}$. Tím je věta dokázána.

V 6/7: *Nechť $\bar{\boldsymbol{A}}$ je faktorová algebra a $\boldsymbol{B}$ podalgebra v $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{B} \in \bar{\boldsymbol{A}}$. Pak každý elementární řetězec $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ od $\boldsymbol{A} = \mathrm{s}\bar{\boldsymbol{A}}$ do $\boldsymbol{B}$ nad $\bar{\boldsymbol{A}}$ je význačným elementárním řetězcem (β) nad $\bar{\boldsymbol{A}}$ tehdy a jen tehdy, když $\bar{\boldsymbol{A}}$ je jednoduchá faktorová algebra.*

Důkaz: Užijeme označení z důkazu předešlé věty. Podle předpokladu je $\boldsymbol{B} \in \bar{\boldsymbol{A}}$. a) Nechť $\bar{\boldsymbol{A}}$ je jednoduchá faktorová algebra. Pak je jednoduchá vzhledem k $\boldsymbol{B}$ a podle části a) důkazu V 5/7, je $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ elementární řetězec (β) nad $\bar{\boldsymbol{A}}$, který je pro $\bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\max}$ dokonce význačný. Z V 4/6 plyne, že pro každý zákryt $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta$, $1 \leqq \beta \leqq \alpha$, algebry $\bar{\boldsymbol{A}}$ platí buď $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta = \bar{\boldsymbol{A}}_{\max}$ nebo $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta = \bar{\boldsymbol{A}}$. V každém případě je tedy $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ význačný elementární řetězec (β).

b) Není-li $\bar{\boldsymbol{A}}$ jednoduchá faktorová algebra, pak podle V 4/6 není $\bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{A}}_{\max}$. Avšak podle téže věty pro $\bar{\boldsymbol{A}} \neq \bar{\boldsymbol{A}}_{\max}$ neexistuje zákryt $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta \geqq \bar{\boldsymbol{A}}$ tak, že by platilo $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta = \bar{\boldsymbol{A}}$, a tedy žádný elementární řetězec $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ od $\boldsymbol{A}$ do $\boldsymbol{B}$ nad $\bar{\boldsymbol{A}}$ není význačný.

8. Izomorfní řetězce

D 1/8: Nechť $[\bar{\boldsymbol{K}}] = \bar{\boldsymbol{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\boldsymbol{K}}_\alpha$ je řetězec od $\boldsymbol{A}$ do $\boldsymbol{B}$ a $[\bar{\boldsymbol{L}}] = \bar{\boldsymbol{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\boldsymbol{L}}_\beta$ řetězec od $\boldsymbol{C}$ do $\boldsymbol{D}$ v algebře $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{A} \supset \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \supset \boldsymbol{D}$ nechť jsou podalgebry v $\boldsymbol{G}$. Nechť existuje prosté zobrazení i členů řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ na členy řetězce $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ těchto vlastností:

a) je-li faktorová algebra $\bar{\boldsymbol{L}}_\delta$ obrazem faktorové algebry $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$ v zobrazení i, tj. $\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma = \bar{\boldsymbol{L}}_\gamma$, pak existuje izomorfní zobrazení i_γ faktorové algebry $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$ na faktorovou algebru $\bar{\boldsymbol{L}}_\delta$ a

b) obrazem prvku $K_{\gamma+1} = \mathrm{s}\bar{\boldsymbol{K}}_{\gamma+1} \in \bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$ v izomorfismu i_γ je podmnožina $L_{\delta+1} = \mathrm{s}\bar{\boldsymbol{L}}_{\delta+1} \in \bar{\boldsymbol{L}}_\delta$, tj. $\mathrm{i}_\gamma K_{\gamma+1} = L_{\delta+1}$ pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, $1 \leqq \delta \leqq \beta$, $\boldsymbol{K}_{\alpha+1} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{L}_{\beta+1} = \boldsymbol{D}$. Pak říkáme, že *řetězce* $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ a $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ jsou *izomorfní* a zobrazení i nazýváme *silné zobrazení* $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ na $[\bar{\boldsymbol{L}}]$.

V 1/8: *Dva izomorfní řetězce mají stejnou délku.*

Důkaz je zřejmý.

V 2/8: *Nechť $[\bar{\boldsymbol{K}}]$, $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ jsou izomorfní řetězce v algebře $\boldsymbol{G}$ délky $\alpha \geqq 1$. Pak mají stejnou redukovanou délku a redukované řetězce jsou izomorfní.*

Důkaz: Podle V 1/8 mají izomorfní řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$, $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ stejnou délku $\alpha \geqq 1$. Každému nepodstatnému členu řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ je v silném zobrazení přiřazen nepodstatný člen v $[\mathbf{L}]$. Je-li $\alpha > 1$ a vynecháme-li sobě odpovídající nepodstatné členy, pak redukované řetězce jsou opět izomorfní a mají tedy stejnou redukovanou délku.

D 2/8: Nechť $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \supset \mathbf{D}$ jsou podalgebry a $[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ řetězec od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, $[\bar{\mathbf{L}}] = \bar{\mathbf{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{L}}_\beta$ řětězec od $\mathbf{C}$ do $\mathbf{D}$. Říkáme, že *řetězce* $[\bar{\mathbf{K}}]$, $[\bar{\mathbf{L}}]$ jsou *spřažené*, když

1) existuje prosté zobrazení i členů řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$ na členy řetězce $[\bar{\mathbf{L}}]$ takové, že když

2) faktorová algebra $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ je obrazem faktorové algebry $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ v zobrazení i, pak $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ a $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ jsou spřažené faktorové algebry a

3) $\mathbf{K}_{\gamma+1} \cap \mathbf{L}_{\delta+1} \neq \emptyset$

pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, $1 \leqq \delta \leqq \beta$, $\mathbf{K}_{\alpha+1} = \mathbf{B}$, $\mathbf{L}_{\delta+1} = \mathbf{D}$.

V 3/8: *Nechť $[\bar{\mathbf{K}}]$, $[\bar{\mathbf{L}}]$ jsou spřažené řetězce v algebře $\mathbf{G}$. Pak existuje silné zobrazení $[\bar{\mathbf{K}}]$ na $[\bar{\mathbf{L}}]$, jehož konstrukce je popsána v důkazu věty a řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$, $[\bar{\mathbf{L}}]$ jsou izomorfní.*

Důkaz: Podle D 2/8 existuje prosté zobrazení i členů řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$ na členy řetězce $[\bar{\mathbf{L}}]$. Je-li $\mathrm{i}\bar{\mathbf{K}}_\gamma = \bar{\mathbf{L}}_\delta$, pak faktorové algebry $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ a $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ jsou spřažené. Podle V 5/4 existuje tedy izomorfní zobrazení i_γ faktorové algebry $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ na faktorovou algebru $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ a tento izomorfismus je dán incidencí prvků. Poněvadž je $K_{\gamma+1} \cap L_{\delta+1} \neq \emptyset$, je $\mathrm{i}_\gamma K_{\gamma+1} = L_{\delta+1}$. Je tedy i silné zobrazení $[\bar{\mathbf{K}}]$ na $[\bar{\mathbf{L}}]$ a uvažované řetězce jsou izomorfní.

V 4/8: *Nechť $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ jsou faktorové algebry v $\mathbf{G}$ a nechť pro podalgebry $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, jejichž pole jsou B, D, platí $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{C}}$. Existuje-li izomorfní zobrazení $\mathrm{i}\bar{\mathbf{A}}$ na $\bar{\mathbf{C}}$ takové, že $\mathrm{i}B = D$, pak řetězce $[\bar{\mathbf{K}}] = \{\bar{\mathbf{A}}\}$, $[\bar{\mathbf{L}}] = \{\bar{\mathbf{C}}\}$ jsou izomorfní.*

Důkaz je zřejmý.

V 5/8: *Nechť $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ jsou faktorové algebry, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ podalgebry v $\mathbf{G}$ takové, že $\mathbf{B} \in \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{C}}$. Nechť existuje izomorfní zobrazení* i *algebry $\bar{\mathbf{A}}$ na algebru $\bar{\mathbf{C}}$ takové, že* $\mathrm{i}B = D$. *Nechť dále existuje elementární řetězec $[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ nad $\bar{\mathbf{A}}$. Pak existuje elementární řetězec $[\bar{\mathbf{L}}]$ od $\mathbf{C}$ do $\mathbf{D}$ nad $\bar{\mathbf{C}}$, který je izomorfní s $[\bar{\mathbf{K}}]$ a jehož konstrukce je popsána v části* **a)** *důkazu věty.*

Důkaz: a) Podle V 4/8 jsou řetězce $\{\bar{\mathbf{A}}\}$ a $\{\bar{\mathbf{C}}\}$ izomorfní. Podle definice elementárního řetězce je faktorová algebra $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, zákrytem faktorové algebry $\bar{\mathbf{A}}_\gamma = \bar{\mathbf{A}} \sqcap \bar{\mathbf{K}}_\gamma$. Nechť $\bar{\bar{\mathbf{A}}}_\gamma$ je faktorová algebra na $\mathbf{A}_\gamma$ příslušná zákrytu $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$. Poněvadž $\mathbf{K}_{\gamma+1} \in \bar{\mathbf{K}}_\gamma$ a $\mathbf{A}_{\gamma+1} = \bar{\mathbf{A}} \sqcap \mathbf{K}_{\gamma+1}$, proto je $\mathbf{A}_{\gamma+1} \in \mathbf{A}_\gamma$. Pro $\gamma = \alpha$ pak máme $\bar{\mathbf{A}}_{\alpha+1} = \{\mathbf{B}\}$, neboť $\bar{\mathbf{A}}_{\alpha+1} = \mathbf{K}_{\alpha+1} \sqcap \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{B} \sqcap \bar{\mathbf{A}}$. Nyní definujeme faktorové algebry $\bar{\mathbf{C}}_\gamma$, $\bar{\bar{\mathbf{C}}}_\gamma$, $\bar{\mathbf{L}}_\gamma$ pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ takto: $\bar{\mathbf{C}}_\gamma = \mathrm{i}\bar{\mathbf{A}}_\gamma$ v izomorfismu i. Položíme-li $\mathbf{C}_\gamma = \mathrm{s}\bar{\mathbf{C}}_\gamma$, pak je $\mathbf{C}_\gamma = \mathbf{C}_\gamma \sqcap \bar{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}$. V rozšířeném izomorfismu i platí podle V 6/5, že $\bar{\bar{\mathbf{C}}}_\gamma = \mathrm{i}\bar{\bar{\mathbf{A}}}_\gamma$ je faktorová algebra na $\mathbf{C}_\gamma$. Poněvadž $\mathrm{i}\mathbf{A}_{\gamma+1} = \mathbf{C}_{\gamma+1}$ a $\mathbf{A}_{\gamma+1} \in \bar{\bar{\mathbf{A}}}_\gamma$, proto také $\mathbf{C}_{\gamma+1} \in \bar{\bar{\mathbf{C}}}_\gamma$ a $\bar{\mathbf{C}}_{\alpha+1} = \{\mathbf{D}\}$. Nechť nyní faktorová algebra $\bar{\mathbf{L}}_\gamma$ je zákrytem faktorové algebry $\bar{\mathbf{C}}_\gamma$ vynuceným faktorovou algebrou $\bar{\bar{\mathbf{C}}}_\gamma$ a nechť $\mathbf{L}_{\alpha+1} = \mathbf{D}$. Poněvadž $\mathbf{C}_{\gamma+1} \in \bar{\bar{\mathbf{C}}}_\gamma$, proto také $\mathbf{L}_{\gamma+1} \in \bar{\mathbf{L}}_\gamma$ a $[\bar{\mathbf{L}}] = \bar{\mathbf{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\mathbf{L}}_\alpha$ je elementární řetězec od $\mathbf{C}$ do $\mathbf{D}$ nad $\bar{\mathbf{C}}$.

b) Nyní definujeme silné zobrazení řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$ na $[\bar{\mathbf{L}}]$ tak, že faktorové algebře $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ přiřadíme člen $\bar{\mathbf{L}}_\gamma$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$. Podle V 6/5 existuje izomorfní zobrazení i_γ algebry $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ na $\bar{\mathbf{L}}_\gamma$, v němž se každý prvek $\bar{x} \in \bar{\mathbf{K}}_\gamma$, $\bar{x} = \mathrm{s}\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{\mathbf{A}}}_\gamma$, zobrazí na prvek $\bar{y} \in \bar{\mathbf{L}}_\gamma$, pro který $\bar{y} = \mathrm{s}\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{c}} \in \bar{\bar{\boldsymbol{C}}}_\gamma$, kde $\bar{\bar{c}} = \mathrm{i}\bar{\bar{a}}$, tj. $\mathrm{i}_\gamma \bar{x} = \mathrm{i}_\gamma(\mathrm{s}\bar{\bar{a}}) = \mathrm{s}(\mathrm{i}\bar{\bar{a}}) = \mathrm{s}\bar{\bar{c}} = \bar{y}$. Speciálně pak je $\mathrm{i}_\gamma \boldsymbol{K}_{\gamma+1} = \boldsymbol{L}_{\gamma+1}$, a tedy řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ a $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ jsou izomorfní.

V 6/8: *Nechť jsou splněny podmínky a nechť platí označení z V 5/8. Nechť* $[\bar{\boldsymbol{K}}] = \bar{\boldsymbol{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\boldsymbol{K}}_\alpha$ *je elementární řetězec* (β) *od* $\boldsymbol{A}$ *do* $\boldsymbol{B}$ *nad* $\bar{\boldsymbol{A}}$. *Pak řetězec* $[\bar{\boldsymbol{L}}] = \bar{\boldsymbol{L}}_1 \to \ldots \to \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ *z V 5/8 je elementární řetězec* (β). *Je-li* $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ *dokonce význačný elementární řetězec* (β), *pak* $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ *je také význačný elementární řetězec* (β).

Důkaz: Je-li $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ elementární řetězec (β) nad $\bar{\boldsymbol{A}}$ a $\beta > 1$ $(\beta < \alpha)$, pak $\bar{\boldsymbol{K}}_1 = \ldots = \bar{\boldsymbol{K}}_{\beta-1}(\bar{\boldsymbol{K}}_{\beta+1} = \ldots = \bar{\boldsymbol{K}}_\alpha)$ je největší faktorová algebra na $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{B})$, a proto také $\bar{\boldsymbol{L}}_1 = \ldots = \bar{\boldsymbol{L}}_{\beta-1}(\bar{\boldsymbol{L}}_{\beta+1} = \ldots = \bar{\boldsymbol{L}}_\alpha)$ je největší faktorová algebra na $\boldsymbol{C}$ $(\boldsymbol{D})$. Dále je $\bar{\boldsymbol{A}}_\beta = \boldsymbol{K}_\beta \sqcap \bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{A}}$ a poněvadž $\boldsymbol{B} \in \bar{\boldsymbol{K}}_\beta$, je $\{\boldsymbol{B}\} \in \bar{\bar{\boldsymbol{A}}}_\beta$, kde $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}_\beta$ je faktorová algebra na $\bar{\boldsymbol{A}}_\beta$ příslušná k zákrytu $\bar{\boldsymbol{K}}_\beta$. Proto je $\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{A}}_\beta = \bar{\boldsymbol{C}}_\beta = \mathrm{i}\bar{\boldsymbol{A}} = \bar{\boldsymbol{C}}$ a $\{\mathrm{i}\boldsymbol{B}\} = \{\boldsymbol{D}\} \in \bar{\bar{\boldsymbol{C}}}_\beta = \mathrm{i}\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}_\beta$, $\bar{\boldsymbol{L}}_\beta$ je tedy zákryt $\bar{\boldsymbol{C}}$ a obsahuje jako prvek $\boldsymbol{D}$. Tím je ukázáno, že $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ je elementární řetězec (β).

Je-li nyní $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ význačný elementární řetězec (β), tj. když $\boldsymbol{K}_\beta = \bar{\boldsymbol{A}}$, pak $\bar{\bar{\boldsymbol{A}}}_\beta$ je nejmenší faktorová algebra na $\bar{\boldsymbol{A}}$, a tedy $\bar{\bar{\boldsymbol{C}}}_\beta$ je nejmenší faktorová algebra na $\bar{\boldsymbol{C}}$. Odtud plyne, že $\bar{\boldsymbol{L}}_\beta = \bar{\boldsymbol{C}}$ a $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ je pak význačný elementární řetězec (β) nad $\bar{\boldsymbol{C}}$ a věta je dokázána.

D 3/8: Nechť $[\bar{\boldsymbol{K}}] = \bar{\boldsymbol{K}}_1 \to \ldots \to \bar{\boldsymbol{K}}_\alpha$ je řetězec faktorových algeber od $\boldsymbol{A}$ do $\boldsymbol{B}$ v $\boldsymbol{G}$. *Zjemněním řetězce* $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ rozumíme řetězec $[\mathring{\boldsymbol{K}}]$ od $\boldsymbol{A}$ do $\boldsymbol{B}$, $[\mathring{\boldsymbol{K}}] = \mathring{\boldsymbol{K}}_{11} \to \ldots \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{1,\beta_1-1} \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{1,\beta_1} \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{21} \to \ldots \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{2,\beta_2-1} \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{2,\beta_2} \to \ldots \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{\alpha,\beta_\alpha}$ té vlastnosti, že pro $\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha$ částečný řetězec $[\mathring{\boldsymbol{K}}_\gamma] = \mathring{\boldsymbol{K}}_{\gamma 1} \to \ldots \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{\gamma,\beta_\gamma}$ je elementární řetězec od $\boldsymbol{K}_\gamma$ do $\boldsymbol{K}_{\gamma+1}$ nad $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\alpha$ jsou přirozená čísla.

Pozn. 1/8: a) Každé zjemnění řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ tedy dostaneme, když každý člen $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ nahradíme elementárním řetězcem od $\boldsymbol{K}_\gamma$ do $\boldsymbol{K}_{\gamma+1}$ nad $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$.

b) Tak když například každý člen řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ nahradíme elementárním řetězcem skládajícím se z tohoto členu, obdržíme opět řetězec $[\bar{\boldsymbol{K}}]$. Vidíme, že řetězec $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ je současně svým vlastním zjemněním. Jinými slovy, nahradíme-li každou faktorovou algebru $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$ v řetězci $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ význačným elementárním řetězcem (1) od $\boldsymbol{K}_\gamma$ do $\boldsymbol{K}_{\gamma+1}$ délky 1, dostaneme opět řetězec $[\bar{\boldsymbol{K}}]$.

c) Každé prodloužení $[\mathring{\boldsymbol{K}}]$ řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ (B.2.5) je jeho zjemněním.

Pozn. 2/8: Všimněme si, že redukovaná délka zjemnění řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ je rovna součtu redukovaných délek jednotlivých elementárních řetězců. Tato redukovaná délka je alespoň rovna redukované délce řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ (viz B.2.5).

V 7/8: *Nechť* $[\bar{\boldsymbol{K}}]$, $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ *jsou izomorfní řetězce v* $\boldsymbol{G}$ *délky* $\alpha \geqq 1$ *a nechť existuje zjemnění* $[\mathring{\boldsymbol{K}}]$ *řetězce* $[\bar{\boldsymbol{K}}]$, *Pak existuje zjemnění* $[\mathring{\boldsymbol{L}}]$ *řetězce* $[\bar{\boldsymbol{L}}]$ *takové, že* $[\mathring{\boldsymbol{K}}]$ *a* $[\mathring{\boldsymbol{L}}]$ *jsou izomorfní řetězce.*

Důkaz: Nechť $[\mathring{\boldsymbol{K}}_\gamma] = \mathring{\boldsymbol{K}}_{\gamma 1} \to \ldots \to \mathring{\boldsymbol{K}}_{\gamma,\beta_\gamma}$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, je elementární řetězec od $\boldsymbol{K}_\gamma$ do $\boldsymbol{K}_{\gamma+1}$ nad $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$ patřící do zjemnění $[\mathring{\boldsymbol{K}}]$ řetězce $[\bar{\boldsymbol{K}}]$. Poněvadž $[\bar{\boldsymbol{K}}]$ je řetězec izomorfní s $[\bar{\boldsymbol{L}}]$, odpovídá v silném zobrazení i členu $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma \in [\bar{\boldsymbol{K}}]$ člen $\bar{\boldsymbol{L}}_\delta \in [\bar{\boldsymbol{L}}]$ a existuje izomorfní zobrazení i_γ faktorové algebry $\bar{\boldsymbol{K}}_\gamma$ na faktorovou algebru $\bar{\boldsymbol{L}}_\delta$ takové, že $\mathrm{i}_\gamma \boldsymbol{K}_{\gamma+1} = \boldsymbol{L}_{\delta+1}$. Podle V 5/8 existuje elementární řetězec $[\mathring{\boldsymbol{L}}_\delta]$ od $\boldsymbol{L}_\delta$ do $\boldsymbol{L}_{\delta+1}$ nad $\bar{\boldsymbol{L}}_\delta$, který je izomorfní s řetězcem $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$. Nahradíme-li nyní v řetězci $[\mathbf{L}]$ faktorovou algebru $\mathbf{L}_\delta$ elementárním řetězcem $[\mathring{\mathbf{L}}_\delta]$, $1 \leqq \delta \leqq \alpha$, dostaneme zjemnění $[\mathring{\mathbf{L}}]$ řetězce $[\mathbf{L}]$, a řetězec $[\mathring{\mathbf{L}}]$ je izomorfní s $[\mathring{\mathbf{K}}]$.

9. Relativně jednoduché a jednoduché řetězce

D 1/9: Nechť $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ jsou podalgebry v $\mathbf{G}$ a nechť $[\mathbf{K}] = \mathbf{K}_1 \to \ldots \to \mathbf{K}_\alpha$ je řetězec faktorových algeber od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$. Nechť každý člen $\mathbf{K}_\gamma \in [\mathbf{K}]$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, je jednoduchá faktorová algebra vzhledem k $\mathbf{K}_{\gamma+1} = s\mathbf{K}_{\gamma+1}$, $\mathbf{K}_{\alpha+1} = \mathbf{B}$. Pak říkáme, že *řetězec* $[\mathbf{K}]$ je *relativně jednoduchý*. Je-li každá faktorová algebra $\mathbf{K}_\gamma \in [\mathbf{K}]$ jednoduchá, pak *řetězec* $[\mathbf{K}]$ nazýváme *jednoduchý*.

V 1/9: *Všechna zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ řetězce $[\mathbf{K}]$ od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ v algebře $\mathbf{G}$ mají stejnou redukovanou délku tehdy a jen tehdy, když řetězec $[\mathbf{K}]$ je relativně jednoduchý.*

Důkaz: a) Nechť $[\mathbf{K}]$ je relativně jednoduchý řetězec. Poněvadž podle pozn. 1/8 je každý řetězec sám svým zjemněním, stačí dokázat, že každé zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ řetězce $[\mathbf{K}]$ má stejnou redukovanou délku jako $[\mathbf{K}]$. Jak víme, zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ řetězce $[\mathbf{K}]$ dostaneme, když každý člen $\mathbf{K}_\gamma \in [\mathbf{K}]$ nahradíme vhodným elementárním řetězcem $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ od $\mathbf{K}_\gamma$ do $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ nad $\mathbf{K}_\gamma$. Poněvadž $\mathbf{K}_\gamma$ je jednoduchá faktorová algebra vzhledem k algebře $\mathbf{K}_{\gamma+1}$, je podle V 5/7 řetězec $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ elementární řetězec (β) nad $\mathbf{K}_\gamma$. Jeho redukovaná délka je pak podle V 4/7 rovna redukované délce řetězce $\{\mathbf{K}_\gamma\}$. Podle pozn. 2/8 je redukovaná délka řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$ rovna součtu redukovaných délek jednotlivých řetězců $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ a redukovaná délka řetězce $[\mathbf{K}]$ je rovna součtu redukovaných délek řetězců $\{\mathbf{K}_\gamma\}$. Proto řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$ a $[\mathbf{K}]$ mají stejnou redukovanou délku.

b) Nechť nyní zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ má stejnou redukovanou délku jako řetězec $[\mathbf{K}]$. Nechť $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ je částečný elementární řetězec zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ od $\mathbf{K}_\gamma$ do $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ nad $\mathbf{K}_\gamma \in [\mathbf{K}]$. Pak jeho redukovaná délka je rovna redukované délce řetězce $\{\mathbf{K}_\gamma\}$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$. Podle V 4/7 je $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ elementární řetězec (β) od $\mathbf{K}_\gamma$ do $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ nad $\mathbf{K}_\gamma$ a tedy podle V 5/7 je $\mathbf{K}_\gamma$ jednoduchá faktorová algebra vzhledem ke $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ a věta je dokázána.

V 2/9: *Řetězec $[\mathbf{K}]$ od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$ v algebře $\mathbf{G}$ je jednoduchý tehdy a jen tehdy, když každé zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ řetězce $[\mathbf{K}]$ je jeho prodloužením.*

Důkaz: a) Nechť $[\mathring{\mathbf{K}}]$ je zjemnění jednoduchého řetězce $[\mathbf{K}]$ od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$. To znamená, že každý člen $\mathbf{K}_\gamma$ řetězce $[\mathbf{K}]$ je nahrazen elementárním řetězcem $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ od $\mathbf{K}_\gamma$ do $\mathbf{K}_{\gamma+1}$, $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$. Podle V 6/7 je každý elementární řetězec $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ význačný elementární řetězec (β) nad $\mathbf{K}_\gamma$, tj. platí vztahy

$$\mathbf{K}_{\gamma 1} = \ldots = \mathring{\mathbf{K}}_{\gamma,\beta-1} \tag{1.9}$$

je největší faktorová algebra $(\mathbf{K}_\gamma)_{max}$ na algebře $\mathbf{K}_\gamma$, $\mathring{\mathbf{K}}_{\gamma\beta} = \mathbf{K}_\gamma$, $\mathring{\mathbf{K}}_{\gamma,\beta+1} = \ldots = \mathring{\mathbf{K}}_{\gamma,\beta_\gamma}$ je největší faktorová algebra na algebře $\mathbf{K}_{\gamma+1}$, a tedy $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ je prodloužením řetězce $\{\mathbf{K}_\gamma\}$, $[\mathring{\mathbf{K}}]$ pak prodloužením řetězce $[\mathbf{K}]$.

b) Nechť nyní $[\mathring{\mathbf{K}}]$ je prodloužením řetězce $[\mathbf{K}]$. Pak každý částečný řetězec $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ z $[\mathring{\mathbf{K}}]$, který je prodloužením řetězce $\{\mathbf{K}_\gamma\}$, splňuje podmínky (1.9) a $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$ je význačný elementární řetězec (β) od $\mathbf{K}_\gamma$ do $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ nad $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$. Pak podle V 6/7 je $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$ jednoduchá faktorová algebra pro $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$, a tedy řetězec $[\bar{\mathbf{K}}]$ je jednoduchý.

V 3/9: *Nechť $[\bar{\mathbf{K}}]$ a $[\bar{\mathbf{L}}]$ jsou izomorfní řetězce v algebře $\mathbf{G}$ a nechť $[\bar{\mathbf{K}}]$ je relativně jednoduchý. Pak řetězec $[\bar{\mathbf{L}}]$ je rovněž relativně jednoduchý.*

Důkaz: Podle V 2/8 mají izomorfní řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$ a $[\bar{\mathbf{L}}]$ stejnou redukovanou délku α'. Kdyby nyní řetězec $[\bar{\mathbf{L}}]$ nebyl relativně jednoduchý, existovalo by podle V 1/9 zjemnění $[\mathring{\mathbf{L}}]$ řetězce $[\bar{\mathbf{L}}]$, jehož redukovaná délka β' by byla větší než α'. Avšak podle V 7/8 existuje zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$, jež je izomorfní s $[\mathring{\mathbf{L}}]$ a má tedy redukovanou délku β'. Podle V 1/9 je však redukovaná délka zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$ rovna α'. Není však možné, aby řetězec $[\mathring{\mathbf{K}}]$ měl dvě různé redukované délky $\alpha' \neq \beta'$, a proto $[\bar{\mathbf{L}}]$ je relativně jednoduchý řetězec.

10. Adjungované řetězce

D 1/10: Nechť $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \supset \mathbf{D}$ jsou podalgebry v algebře $\mathbf{G}$ a $[\bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \bar{\mathbf{K}}_\alpha$ řetězec faktorových algeber od $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, $[\bar{\mathbf{L}}] = \bar{\mathbf{L}}_1 \rightarrow \ldots \bar{\mathbf{L}}_\beta$ řetězec faktorových algeber od $\mathbf{C}$ do $\mathbf{D}$. Jsou-li splněny podmínky

1) $\mathbf{A} = \mathbf{C}$, $\mathbf{B} = \mathbf{D}$,

2) každé dva členy $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$, $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ jsou adjungované faktorové algebry vzhledem ke $\mathbf{K}_{\gamma+1}$, $\mathbf{L}_{\delta+1}$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$; $\delta = 1, \ldots, \beta$, přičemž $\mathbf{K}_{\alpha+1} = \mathbf{B}$, $\mathbf{L}_{\beta+1} = \mathbf{D}$, pak *řetězce* $[\bar{\mathbf{K}}]$, $[\bar{\mathbf{L}}]$ se nazývají *adjungované.*

V 1/10: *Nechť $[\bar{\mathbf{K}}]$, $[\bar{\mathbf{L}}]$ jsou adjungované řetězce v $\mathbf{G}$. Pak mají spřažená zjemnění, jejichž konstrukce je popsána v důkazu věty.*

Důkaz: Podle předpokladu jsou faktorové algebry $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$, $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ adjungovány vzhledem ke $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ resp. k $\mathbf{L}_{\delta+1}$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$; $\delta = 1, \ldots, \beta$. Položíme $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\nu} = \mathbf{L}_\nu \sqsubset \bar{\mathbf{K}}_\gamma$, $\bar{\mathbf{L}}_{\delta\varkappa} = \mathbf{K}_\varkappa \sqsubset \bar{\mathbf{L}}_\delta$ pro $\varkappa = 1, \ldots, \alpha + 1$; $\nu = 1, \ldots, \beta + 1$ a $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\nu}$, $\bar{\mathbf{L}}_{\delta\varkappa}$ jsou faktorové algebry v $\mathbf{G}$ podle V 5/2, dále $\mathbf{K}_{\gamma\nu} = \mathrm{s}\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\nu}$, $\mathbf{L}_{\delta\varkappa} = \mathrm{s}\bar{\mathbf{L}}_{\delta\varkappa}$ jsou podalgebry v $\mathbf{G}$ podle V 3/2. Poněvadž řetězce $[\bar{\mathbf{K}}]$, $[\bar{\mathbf{L}}]$ mají tytéž konce, tj. poněvadž $\mathbf{K}_1 = \mathbf{A} = \mathbf{L}_1$, $\mathbf{K}_{\alpha+1} = \mathbf{B} = \mathbf{L}_{\beta+1}$, proto platí

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{\gamma 1} = \mathbf{L}_1 \sqsubset \bar{\mathbf{K}}_\gamma = \mathbf{K}_1 \sqsubset \bar{\mathbf{K}}_\gamma = \bar{\mathbf{K}}_\gamma, \ \bar{\mathbf{L}}_{\gamma 1} = \mathbf{K}_1 \sqsubset \bar{\mathbf{L}}_\delta = \mathbf{L}_1 \sqsubset \bar{\mathbf{L}}_\delta = \bar{\mathbf{L}}_\delta, \\ \mathbf{K}_{\gamma,\beta+1} = \mathrm{s}(\mathbf{L}_{\beta+1} \sqsubset \bar{\mathbf{K}}_\gamma) = \mathrm{s}(\mathbf{K}_{\alpha+1} \sqsubset \bar{\mathbf{K}}_\gamma) = \mathbf{K}_{\gamma+1}, \\ \mathbf{L}_{\delta,\alpha+1} = \mathrm{s}(\mathbf{K}_{\alpha+1} \sqsubset \bar{\mathbf{L}}_\delta) = \mathrm{s}(\mathbf{L}_{\beta+1} \sqsubset \bar{\mathbf{L}}_\delta) = \mathbf{L}_{\delta+1}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Nyní podle V 9/2 existují spřažené faktorové algebry $\mathring{\mathbf{K}}_{\gamma\delta}$, $\mathring{\mathbf{L}}_{\delta\gamma}$, jež jsou zákryty faktorových algeber $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\delta}$, $\bar{\mathbf{L}}_{\delta\gamma}$ takové, že $\mathbf{K}_{\gamma,\delta+1} \in \mathring{\mathbf{K}}_{\gamma\delta}$, $\mathbf{L}_{\delta,\gamma+1} \in \mathring{\mathbf{L}}_{\delta\gamma}$ a že algebry $\mathbf{K}_{\gamma,\delta+1}$ a $\mathbf{L}_{\delta,\gamma+1}$ jsou incidentní. Poněvadž pro $1 \leqq \delta \leqq \beta$ je faktorová algebra $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\delta} = \mathbf{L}_\delta \sqsubset \bar{\mathbf{K}}_\gamma$ tvořena všemi prvky $\bar{a}_\gamma \in \bar{\mathbf{K}}_\gamma$ incidentními s $\mathbf{L}_\delta$, proto je $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\delta} \subset \bar{\mathbf{K}}_\gamma$, a tedy také $\bar{\mathbf{A}}_{\gamma\delta} = \mathbf{K}_{\gamma\delta} \sqcap \bar{\mathbf{K}}_\gamma = \bar{\mathbf{K}}_{\gamma\delta}$. Pak faktorová algebra $\mathring{\mathbf{K}}_{\gamma\delta}$, která je zákrytem $\bar{\mathbf{K}}_{\gamma\delta}$ je rovněž zákrytem $\bar{\mathbf{A}}_{\gamma\delta}$. Nyní je $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma] = \mathring{\mathbf{K}}_{\gamma 1} \rightarrow \ldots \rightarrow \mathring{\mathbf{K}}_{\gamma\beta}$ elementární řetězec od $\mathbf{K}_\gamma$ do $\mathbf{K}_{\gamma+1}$ nad $\bar{\mathbf{K}}_\gamma$. Analogicky $[\mathring{\mathbf{L}}_\delta] = \mathring{\mathbf{L}}_{\delta 1} \rightarrow \ldots \rightarrow \mathring{\mathbf{L}}_{\delta\alpha}$ je elementární řetězec od $\mathbf{L}_\delta$ do $\mathbf{L}_{\delta+1}$ nad $\bar{\mathbf{L}}_\delta$ a řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}_\gamma]$, $[\mathring{\mathbf{L}}_\delta]$ jsou spřažené.

Pak řetězce $[\mathring{K}] = \mathring{K}_{11} \to \ldots \to \mathring{K}_{1\beta} \to \mathring{K}_{21} \to \ldots \to \mathring{K}_{\alpha\beta}$, $[\mathring{L}] = \mathring{L}_{11} \to \ldots \to \to \mathring{L}_{1\alpha} \to \mathring{L}_{21} \to \ldots \to \mathring{L}_{\beta\alpha}$ jsou zjemnění řetězců $[K]$, $[L]$. Tato zjemnění jsou spřažená. Existuje totiž prosté zobrazení i řetězce $[\mathring{K}]$ na $[\mathring{L}]$ takové, že členu $\mathring{K}_{\gamma\delta}$ přiřazuje člen $\mathring{L}_{\delta\gamma}$ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$; $\delta = 1, \ldots, \beta$. Faktorové algebry $\mathring{K}_{\gamma\delta}$, $\mathring{L}_{\delta\gamma}$ jsou spřažené a pro $K_{\gamma,\delta+1} \in \mathring{K}_{\gamma\delta}$, $L_{\delta,\gamma+1} \in \mathring{L}_{\delta\gamma}$ platí $K_{\gamma,\delta+1} \cap L_{\delta,\gamma+1} \neq \emptyset$. Jsou tedy splněny podmínky D 2/8 a věta je dokázána.

V 2/10: *(Zobecněná věta Schreierova): Každé dva adjungované řetězce $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ faktorových algeber v G mají izomorfní zjemnění $[\mathring{K}]$, $[\mathring{L}]$. Řetězce $[\mathring{K}]$, $[\mathring{L}]$ mají stejnou délku a v silném zobrazení sobě odpovídající faktorové algebry jsou izomorfní.*

Důkaz: Podle V 1/10 existují spřažená zjemnění $[\mathring{K}]$, $[\mathring{L}]$ řetězců $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ a podle V 3/8 jsou řetězce $[\mathring{K}]$, $[\mathring{L}]$ izomorfní a sobě odpovídající členy v silném zobrazení jsou izomorfní faktorové algebry. Podle V 1/8 mají řetězce $[\mathring{K}]$, $[\mathring{L}]$ stejnou délku.

V 3/10: *Nechť $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ jsou adjungované řetězce v G a nechť $[\bar{K}]$ je relativně jednoduchý. Pak redukovaná délka řetězce $[\bar{K}]$ není menší než redukovaná délka řetězce $[\bar{L}]$.*

Důkaz: Nechť α' je redukovaná délka řetězce $[\bar{K}]$ a β' redukovaná délka řetězce $[\bar{L}]$. Podle V 2/10 mají řetězce $[\bar{K}]$ a $[\bar{L}]$ izomorfní zjemnění $[\mathring{K}]$, $[\mathring{L}]$, která mají stejnou délku, a tedy podle V 2/8 také stejnou redukovanou délku γ'. Podle V 1/9 je $\alpha' = \gamma'$ a dále je $\beta' \leqq \gamma'$, a tedy $\beta' \leqq \alpha'$.

V 4/10: *Každé dva adjungované, relativně jednoduché řetězce $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ mají stejnou redukovanou délku.*

Důkaz: Nechť α' je redukovaná délka $[\bar{K}]$, β' je redukovaná délka $[\bar{L}]$. Pak podle V 3/10 je jednak $\alpha' \leqq \beta'$ a jednak $\beta' \leqq \alpha'$, což dává $\alpha' = \beta'$.

D 2/10: Nechť $[\bar{K}]$ je relativně jednoduchý řetězec bez opakování od podalgebry A do podalgebry B v G. Pak $[\bar{K}]$ nazýváme *kompozičním řetězcem* podalgebry A vzhledem k B v algebře G.

V 5/10: *Nechť $[\bar{K}]$ je řetězec bez opakování od A do B v G. Pak každé jeho zjemnění $[\mathring{K}]$ je jeho prodloužením tehdy a jen tehdy, když $[\bar{K}]$ je relativně jednoduchý.*

Důkaz: Podle V 1/9 zjemnění $[\mathring{K}]$ má stejnou redukovanou délku jako řetězec $[\bar{K}]$ tehdy a jen tehdy, když $[\bar{K}]$ je relativně jednoduchý. Podle předpokladu je redukovaná délka α' řetězce $[\bar{K}]$ rovna jeho délce α, tj. $\alpha' = \alpha$, a tedy každé zjemnění $[\mathring{K}]$ má redukovanou délku α právě tehdy, když $[\mathring{K}]$ je relativně jednoduchý. Řetězec $[\mathring{K}]$ má délku $\beta > \alpha$ tehdy a jen tehdy, když je to řetězec s opakováním, tj. když $[\mathring{K}]$ je prodloužením řetězce $[\bar{K}]$.

V 6/10: *Nechť $[\bar{K}] = \bar{K}_1 \to \ldots \to \bar{K}_\alpha$ je kompoziční řetězec algebry A vzhledem k B. Pak podalgebra $K_{\gamma+1}$ je vždy vlastní podalgebrou v algebře K_γ, $\gamma = 1, \ldots, \alpha$, $K_{\alpha+1} = B$ a platí*

$$A = K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_\alpha \supset B. \qquad (1.10$$

Důkaz: Poněvadž každý člen řetězce $[\bar{K}]$ je podstatný, je $K_{\gamma+1}$ vlastní podmnožina v K_γ pro $\gamma = 1, \ldots, \alpha$ (B.2.5), přičemž K_γ je podalgebra v G podle V 3/2 a věta je dokázána.

V 7/10 *(Zobecněná věta Jordan—Hölderova): Nechť* $[\overline{\mathbf{K}}]$, $[\overline{\mathbf{L}}]$ *jsou kompoziční adjungované řetězce podalgebry* $\mathbf{A}$ *vzhledem k podalgebře* $\mathbf{B}$ *v* $\mathbf{G}$. *Pak* $[\overline{\mathbf{K}}]$ *a* $[\overline{\mathbf{L}}]$ *jsou izomorfní.*

Důkaz: Podle V 2/10 mají řetězce $[\overline{\mathbf{K}}]$, $[\overline{\mathbf{L}}]$ izomorfní zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$, $[\mathring{\mathbf{L}}]$. Podle V 2/8 mají řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$, $[\mathring{\mathbf{L}}]$ stejnou redukovanou délku a redukované řetězce jsou izomorfní. Podle V 5/10 a D 2/10 je $[\overline{\mathbf{K}}]$ redukovaný řetězec řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$, $[\overline{\mathbf{L}}]$ pak redukovaný řetězec řetězce $[\mathring{\mathbf{L}}]$, a tedy $[\overline{\mathbf{K}}]$ a $[\overline{\mathbf{L}}]$ jsou izomorfní.

V 8/10: *Nechť existuje kompoziční řetězec* $[\overline{\mathbf{K}}]$ *podalgebry* $\mathbf{A}$ *vzhledem k* $\mathbf{B}$ *a nechť* $[\mathbf{L}]$ *je řetězec od* $\mathbf{A}$ *do* $\mathbf{B}$ *adjungovaný s* $[\overline{\mathbf{K}}]$. *Pak existuje zjemnění* $[\mathring{\mathbf{L}}]$ *řetězce* $[\mathbf{L}]$ *takové, že* $[\mathring{\mathbf{L}}]$ *je kompoziční řetězec podalgebry* $\mathbf{A}$ *vzhledem k* $\mathbf{B}$ *a izomorfní s* $[\overline{\mathbf{K}}]$. *Redukovaná délka* $[\overline{\mathbf{L}}]$ *není větší než délka řetězce* $[\overline{\mathbf{K}}]$.

Důkaz: Podle V 3/10 redukovaná délka $[\overline{\mathbf{L}}]$ není větší než délka řetězce $[\overline{\mathbf{K}}]$ který je relativně jednoduchý a jehož každý člen je podstatný. Vzhledem k tomu, že $[\overline{\mathbf{K}}]$, $[\mathbf{L}]$ jsou adjungované řetězce, existují podle V 2/10 jejich izomorfní zjemnění $[\mathring{\mathbf{K}}]$, $[\mathring{\mathbf{L}}_1]$. Podle V 2/8 mají řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$, $[\mathring{\mathbf{L}}_1]$ stejnou redukovanou délku a jejich redukované řetězce jsou izomorfní. Avšak vzhledem k V 5/10 je $[\overline{\mathbf{K}}]$ redukovaný řetězec řetězce $[\mathring{\mathbf{K}}]$, a tedy izomorfní s řetězcem $[\mathring{\mathbf{L}}]$, jenž vznikl z $[\mathring{\mathbf{L}}_1]$ vynecháním nepodstatných členů. Z toho, že řetězce $[\overline{\mathbf{K}}]$ a $[\mathring{\mathbf{L}}]$ jsou izomorfní plyne, že každý člen $\mathring{\mathbf{L}}_\gamma$ řetězce $[\overline{\mathbf{L}}]$ je podstatný a jednoduchá faktorová algebra vzhledem k $\mathbf{L}_{\gamma+1}$, $\gamma = 1, \ldots, \alpha$. Kdyby totiž člen $\mathring{\mathbf{L}}_\gamma$, jenž je obrazem členu $\overline{\mathbf{K}}_\gamma$ v silném zobrazení i, nebyl buď podstatný nebo jednoduchou algebrou vzhledem k $\mathbf{L}_{\gamma+1}$, pak v silném inverzním zobrazení i^{-1} faktorové algebře $\mathring{\mathbf{L}}_\gamma$ odpovídá algebra $\overline{\mathbf{K}}_\gamma$ a v inversním izomorfismu i_γ^{-1} algebry $\mathring{\mathbf{L}}_\gamma$ na $\overline{\mathbf{K}}_\gamma$ odpovídá algebře $\mathbf{L}_{\gamma+1}$ algebra $\mathbf{K}_{\gamma+1}$. Pak by buď $\overline{\mathbf{K}}_\gamma$ nebyl podstatný člen nebo jednoduchá faktorová algebra vzhledem ke $\mathbf{K}_{\gamma+1}$, což je spor a věta je dokázána.

11. Algebry a operátory

Teorie grupoidů a grup s operátory vede k myšlence vyčlenit z univerzálních algeber ty, jejichž množina operací Ω obsahuje podmnožinu Σ unárních operací určité vlastnosti. Tato část práce obsahuje jen náznakově, jak by bylo možno celou teorii rozvinout, a proto si nečiní nárok na úplnost. Současně se ukazuje, že specializací systému operací Ω dospějeme k výsledkům, jež jsou obsaženy v práci [11] a týkají se množin a grupoidů s operátory.

Tak, uvažujeme-li že systém operací Ω obsahuje pouze unární operace, dostáváme věty týkající se množin s operátory, přípustných rozkladů a Ω-zobrazení. Pro přehlednost budeme množinu unárních operací, které pak nazýváme operátory, značit Σ, kdežto v práci [11] je tato množina značena Ω.

D 1/11: Nechť je dána algebra $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$, $\mathbf{A} = \langle A, \Omega \rangle$ podalgebra a $\bar{B}$ vytvořující rozklad, který je polem faktorové algebry $\bar{\mathbf{B}} = \langle \bar{B}, \Omega \rangle$. Nechť systém operací Ω obsahuje jen unární operace σ, jejichž množinu označíme Σ, tj. $\Omega = \Sigma$. Pak říkáme, že Σ je *oborem operátorů a G množina s oborem operátorů Σ, A je přípustná podmnožina a B přípustný rozklad*, což značíme G/Σ, A/Σ, $\bar{B}/\bar{\Sigma}$. Operace $\sigma \in \Sigma$ nazýváme *operátory*, přesněji pravými či levými operátory podle toho, zda operace σ je psána vpravo či vlevo od prvku z $\mathbf{G}$.

Pro stručnost budeme mluvit jen o operátorech, i když v našem případě jde o pravé operátory. Je zřejmé, že všechny věty týkající se univerzálních algeber se dají bezprostředně přenést na množiny s operátory, uvážíme-li důsledky plynoucí z definice D 1/11. Ukázkově si uvedeme některé věty.

V 1/11: *Nechť M je množina indexů, A_i přípustné podmnožiny v G/Σ, $i \in M$. Pak neprázdný průnik $A = \cap A_i$, $i \in M$, je přípustná podmnožina v G.*

Důkaz plyne z V 2/1, vezmeme-li v úvahu D 1/11.

Všimněme si, že pro každý prvek $\bar{a}$ z přípustného rozkladu $\bar{A}/\bar{\Sigma}$ v G/Σ existuje prvek $b \in A$ tak, že $\bar{a}\sigma \subset b$, $\bar{a}\bar{\sigma} = b$ pro každý operátor $\sigma \in \Sigma$ a jemu odpovídající operátor $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$. V práci [11] je místo $\bar{a}\bar{\sigma}$ psáno $\bar{a} \cdot \sigma$ (tečka nahoře). Pak můžeme snadno interpretovat všechny věty z odstavce 2 o faktorových algebrách. Tak na příklad V 3/2 dává větu

V 2/11: *Nechť $\bar{A}$ je přípustný rozklad v G/Σ. Pak $\mathrm{s}\bar{A}$ je přípustná podmnožina v G a $\bar{A}$ je přípustný rozklad na $\mathrm{s}\bar{A}$.*

Z věty V 4/2 plyne

V 3/11: *Jsou-li $\bar{A}$, $\bar{B}$ přípustné rozklady v G/Σ a je-li $\mathrm{s}\bar{A} \cap \mathrm{s}\bar{B} \neq 0$, pak obal $\bar{B} \sqsubset \bar{A}$ a průsek $\bar{B} \sqcap \bar{A}$ jsou přípustné rozklady.*

V 4/11: *Je-li B přípustná podmnožina a $\bar{A}$ přípustný rozklad v G/Σ a $B \cap \mathrm{s}\bar{A} \neq 0$, pak obal $B \sqsubset \bar{A}$ a průsek $B \sqcap \bar{A}$ jsou přípustné rozklady v G.*

Důkaz plyne z V 5/2.

Podobně z vět V 7/2 a V 8/2 plyne věta

V 5/11: *Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou přípustné rozklady na množině G/Σ. Pak jejich nejmenší společný zákryt $[\bar{A}, \bar{B}]$ a největší společné zjemnění $(\bar{A}, \bar{B})$ jsou přípustné rozklady.*

Stejně tak se dají formulovat pro přípustné rozklady věty V 6/2 a V 9/2. Jako příklad si uvedeme formulaci V 10/2. Tím dostáváme větu

V 6/11: *Nechť $\bar{B}$ je přípustný rozklad na množině G/Σ, nechť $\bar{B}$ je rozklad na $\bar{B}$ a $\bar{A}$ zákryt rozkladu $\bar{B}$ vynucený rozkladem $\bar{B}$. Pak rozklad $\bar{A}$ je přípustný tehdy a jen tehdy, když $\bar{B}$ je přípustný rozklad na $\bar{B}$.*

Dále již nebudeme tuto aplikaci na množiny s operátory rozvádět, jen si všimněme, že deformace d množiny A/Σ na B/Σ nabývá tvaru $(\mathrm{d}a)\,\sigma = \mathrm{d}(a\sigma)$, $a \in A$, $\sigma \in \Sigma$, a tato deformace je v práci [11] označena jako Σ-zobrazení. Tak se snadno dají přenést věty týkající se deformace algeber, izomorfismu a rozšířené deformace na Σ-zobrazení množin s operátory, jak jsou uvedeny v práci [11], resp. pokud v této práci uvedeny nejsou, můžeme je snadno formulovat.

Úmluva **1/11**: Všude dále předpokládáme, že systém operací Ω obsahuje kromě oboru operátorů Σ alespoň jednu operaci typu $\nu \geqq 2$.

D 2/11: Nechť $\mathbf{G} = \langle G, \Omega \rangle$ je univerzální algebra a nechť Ω obsahuje alespoň jednu operaci ω typu $\nu \geqq 2$ a neprázdnou podmnožinu Σ unárních operací takovou, že pro každou ν-ární operaci $\omega \in \Omega$ a každou operaci $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \neq \omega$, platí vztah

$$(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega)\,\sigma = (a_1\sigma)(a_2\sigma) \ldots (a_\nu\sigma)\,\omega \tag{1.11}$$

pro každou ν-člennou posloupnost prvků $a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbf{G}$. Pak říkáme, že *algebra* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega\rangle$ *má obor operátorů* Σ, což značíme $\mathbf{G}/\Sigma = \langle G/\Sigma, \Omega\rangle$. Podalgebra $\mathbf{B} = \langle B, \Omega\rangle$ v $\mathbf{G}/\Sigma$ se nazývá *přípustnou podalgebrou* a píšeme $\mathbf{B}/\Sigma$.

Pro přípustnou podalgebru $\mathbf{B}$ zřejmě platí $\mathbf{B}\sigma \subset \mathbf{B}$ pro každé $\sigma \in \Sigma$ vzhledem k V 1/1.

V 7/11: *Nechť* $\bar{\mathbf{A}} = \langle \bar{A}, \bar{\Omega}\rangle$ *je faktorová algebra v algebře* $\mathbf{G}/\Sigma = \langle G/\Sigma, \Omega\rangle$. *Pak algebra* $\bar{\mathbf{A}}$ *má rovněž obor operátorů* $\bar{\Sigma}$ *a pro každou ν-ární operaci* $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$, $\bar{\sigma} \in \bar{\Sigma}$ *a libovolné prvky* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\nu \in \bar{\mathbf{A}}$ *platí*

$$(\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\bar{\omega})\,\bar{\sigma} = (\bar{a}_1\bar{\sigma})(\bar{a}_2\bar{\sigma}) \ldots (\bar{a}_\nu\bar{\sigma})\,\bar{\omega}, \tag{2.11}$$

přičemž operace $\bar{\omega}$, $\bar{\sigma}$ *splňují podmínky definice D 2/2.*

Důkaz: Nechť $\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega \subset \bar{a} = \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\bar{\omega}$, $\bar{a}_\mu\sigma \subset \bar{a}'_\mu = \bar{a}_\mu\bar{\sigma}$, $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$. Nechť $a_\mu \in \bar{a}_\mu$, pak podle (1.11) platí $(a_1a_2 \ldots a_\nu\omega)\,\sigma = (a_1\sigma)(a_2\sigma) \ldots (a_\nu\sigma)\,\omega$ a je tedy

$$(\bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_\nu\omega)\,\sigma = (\bar{a}_1\sigma)(\bar{a}_2\sigma) \ldots (a_\nu\sigma)\,\omega. \tag{3.11}$$

Je-li nyní $\bar{a}'_1\bar{a}'_2 \ldots \bar{a}'_\nu\omega \subset \bar{a}' = \bar{a}'_1\bar{a}'_2 \ldots \bar{a}'_\nu\bar{\omega}$, pak jsou prvky $\bar{a}$ a $\bar{a}'$ incidentní vzhledem k (3.11), a tedy $\bar{a} = \bar{a}'$, což znamená, že platí vztah (2.11).

Věta V 7/11 nás opravňuje mluvit o *přípustné faktorové algebře v* $\mathbf{G}/\Sigma$. To znamená, že všechny věty o algebrách a faktorových algebrách z odstavce 1 a 2 se dají přenést na algebry s operátory a přípustné faktorové algebry. Dále si ještě všimneme deformace algeber s operátory.

V 8/11: *Nechť* d *je deformace algebry* $\mathbf{G} = \langle G, \Omega\rangle$ *do algebry* $\mathbf{G}^* = \langle G^*, \Omega\rangle$ *a nechť obě algebry mají týž obor operátorů* $\Sigma \subset \Omega$. *Pak pro každý operátor* $\sigma \in \Sigma$ *a každý prvek* $a \in \mathbf{G}$ *platí*

$$\mathrm{d}(a\sigma) = (\mathrm{d}a)\,\sigma. \tag{4.11}$$

Mluvíme pak o Σ-deformaci $\mathbf{G}/\Sigma$ *do* $\mathbf{G}^*/\Sigma$.

Důkaz: Vztah (4.11) je zřejmě správný podle D 2/3, neboť $\Sigma \subset \Omega$.

Název Σ-deformace používáme místo delšího názvu operátor-homomorfní zobrazení. Podobně mluvíme o operátor-izomorfismu či kratčeji o Σ-izomorfismu. Zřejmě zase všechny věty z odstavce 3, 4 a 5. se dají formulovat pro algebry s operátory, jen když si uvědomíme, že je správná věta

V 9/11: *Nechť existuje Σ-deformace* d *algebry* $\mathbf{G}/\Sigma$ *na algebru* $\mathbf{G}^*/\Sigma$. *Pak faktorová algebra* $\bar{\mathbf{D}}$ *příslušná k Σ-deformaci* d *je přípustná.*

Důkaz: Z V 4/3 víme, že deformační rozklad $\bar{D}$ je vytvořující a tedy polem faktorové algebry $\bar{\mathbf{D}} = \langle \bar{D}, \bar{\Omega}\rangle$ a z V 7/11 plyne, že faktorová algebra $\bar{\mathbf{D}}$ je přípustná.

Stejně jako V 4/3 se dají formulovat i ostatní věty o Σ-deformaci, Σ-izomorfismu a rozšířené Σ-deformaci, které dostaneme příslušnou interpretací z vět odstavce 3, 4 a 5. Formulaci těchto vět stejně jako vět z odst. 6—10 nebudeme provádět.

Obsahuje-li systém operací Ω univerzální algebry $\boldsymbol{G}$ kromě oboru operátorů Σ jedinou binární operaci psanou jako násobení, tj. místo $ab\omega$ píšeme pouze $a \,.\, b$ nebo ještě kratčeji ab, $a, b \in \boldsymbol{G}$, pak platí $(ab)\,\sigma = (a\sigma)(b\sigma)$ a mluvíme o *grupoidu* $\boldsymbol{G}$ *s oborem operátorů* Σ. Místo o přípustné faktorové algebře $\bar{A}/\Sigma$ v $\boldsymbol{G}/\Sigma$ mluvíme o *přípustném faktoroidu* $\bar{A}/\Sigma$. Píšeme-li místo $\bar{a}\bar{\sigma}$ pouze $\bar{a} \cdot \sigma$ (tečka nahoře) resp. $\bar{a} \circ \sigma$, pak jej značíme jen $\bar{A}/\Sigma$. Pak věty odvozené v odstavci 1 až 4 dávají věty o grupoidech s operátory, jež jsou obsaženy v práci [11]. Samozřejmě také odst. 5 v této interpretaci dává věty o rozšířené Σ-deformaci grupoidů, kdežto odst. 6 až 10 dávají pak věty o řetězcích přípustných faktoroidů v grupoidech s operátory a v tomto smyslu jsou jakýmsi užším zobecněním práce [3].

LITERATURA

[1] *Borůvka O.:* Základy teorie grupoidů a grup, Praha, 1962.

[2] *Borůvka O.:* Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin, 1960.

[3] *Borůvka O.:* Über Ketten von Faktoroiden, Math. Ann. 118, 1941, 41—64.

[4] *Birkhof G.:* Těorija struktur, Moskva, 1952.

[5] *Goldie A. W.:* The Jordan—Hölder Theorem for general abstract algebras, Proc. London Math. Soc. (2) 52, 1951, 107—131.

[6] *Goldie A. W.:* The scope of the Jordan—Hölder theorem in abstract algebra, Proc. London Math. Soc. (3) 3, 1952, 349—368.

[7] *Jakubík J.:* O existenčných algebrách, Čas. pro pěstování mat. (1) 81, 1956, 349—368.

[8] *Kuroš A. G.:* Lekcii po obščej algebre, Moskva, 1962.

[9] *Malcev A. I.:* K obščej teorii algebraičeskich system, Mat. sbornik, T. 35 (77), Moskva, 1954, 3—20.

[10] *Marczewski E.:* Independence and homomorphisms in abstract algebras, Fundamenta math. L.I, Warszawa, 1961, 45—61.

[11] *Sedláček L.:* Grupoidy a grupy s operátory, Acta Univ. Pal. Olomucensis, fak. rerum nat., T. 7 (1961), 33—66.

[12] *Słomiński J.:* The teory of abstract algebras with infinitary operations, Rozprawy matematyczne XVIII, Warszawa, 1959, 3—66.

[13] *Świerczkowski S.:* On isomorphie free algebras, Fundamenta math., L.I, Warszawa, 1961, 35—44.

[14] *Szász G.:* Einführung in die Verbandstheorie, Budapest, 1962.

Резюме

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

ЛАДИСЛАВ СЕДЛАЧЕК

Обобщением известных понятий как группоид, полугруппа, группа и так далее приходим к понятию универсальной алгебры, которая часто называется абстрактной алгеброй или просто только алгеброй. В отличии от других работ о универсальных алгебрах, которые исходят из понятия эквиваленции и конгруенции, в настоящей работе строится теория универсальных алгебр на основе теории разбиения на множестве и теории цепного разбиения, как они приведены в работах [1], [2] и [3]. Такой подход дает возможность например формулировать теорему об изоморфизме алгебр, которым в теории групп соответствуют теоремы об изоморфизме групп, без всяких затруднений. Также и теория цепей дает возможность формулировать обобщенную теорему Шрейбера и Жордан-Гелер.

Настоящую работу можно в основном разделить на три части. Первая часть содержит 1-ый по 5-ый абзац, вторая часть 6-ой по 10-ый абзац и третьая часть 11-ый абзац.

В 1-ом абзаце вводятся и исследуются основные понятия из теории универсальных алгебр как множества с системой ν-онных операций, где $\nu = \nu(\omega)$ определенное натуральное число однозначно соответствующее операции ω. Во 2-ом абзаце вводится при помощи образующего разбиения понятие фактор-алгебра и изучаются ее свойства. В абзаце 3-ем расматривается гомоморфное отображение алгебр, которое называется там коротко деформацией. В 4-ом абзаце доказываются теоремы об изоморфизме алгебр. В 5-ом абзаце исследуются свойства расширенной деформации.

Во второй части в 6-ом абзаце исследуеются свойства относетельно простых и простых алгебр, которым например в теории групп соответствует понятие относительно простые и простые группы. В 7-ом абзаце исследуются цепочки фатор-алгебр данной универсальной алгебры и в 8-ом абзаце изоморфные цепочки. В 9-ом абзаце исследуются свойства простых и относительно простых цепочек и в 10-ом абзаце присоединенеы цепочки фатор-алгебр, которым например в теории групп соответствуют свойства нормальных и композиционных рядов, здесь же приводится обобщенная теорема Шрейбер и Жордан-Гелер для универсальных алгебр.

В третьей части в 11-ом абзаце намечается как теория универсальных алгебр содержит в себе при определенной специализации системы операций теорию множеств с операторами и алгебры с операторами, например теорию группоидов с операторами. Таким образом настоящая работа является в этом смысле обобщением работы [11].

Zusammenfassung

UNIVERSALALGEBREN

LADISLAV SEDLÁČEK

Durch Verallgemeinerung bekannter Begriffe wie Gruppoid, Halbgruppe, Gruppe, Ring usw. gelangt man zum Begriff der Universalalgebra, die oft auch Abstraktalgebra oder kurz Algebra genannt wird. Zum Unterschied von anderen Arbeiten über Universalalgebren, die auf den Begriffen der Äquivalenz und Kongruenz beruhen, wird in dieser Arbeit die Theorie der Universalalgebren auf der Theorie der Zerlegungen in Mengen und auf der Theorie der Ketten von Zerlegungen aufgebaut, so wie diese Begriffe in den Arbeiten [1], [2] und [3] dargelegt wurden. Diese Auffassung ermöglicht leicht Sätze über Isomorphismus der Algebren aufzustellen, denen in der Gruppetheorie Isomorphiesätze für Gruppen entsprechen. Ebenso ermöglicht die Kettentheorie die Verallgemeinerung des Satzes von Schreier und des Satzes von Jordan—Hölder.

Die Arbeit lässt sich in drei Teile zerlegen. Der erste Teil enthält Absätze 6 bis 5, der zweite Teil Absätze 6-bis 10 und der dritte Teil enhält den Absatz 11.

Im Absatz 1 werden Grundbegriffe der Theorie der Universalalgebren als Mengen mit einem System von ν-arer Operationen, wo $\nu = \nu(\omega)$ eine gewisse natürliche Zahl darstellt, die eindeutig der gegebenen Operation ω zugeordnet wird. Im Absatz 2 werdem mittels erzeugender Zerlegung der Begriff der Faktoralgebra eingeführt und die Eigenschaften dieses Begriffes studiert. Absatz 3 behandelt die homomorphe Abbildung von Algebren, die hier kurz Deformation genannt wird und im Abschnitt 4 werden Isomorphiseätze für Algebren abgeleitet. Im 5. Absatz werden Eigenschaften erweiterter Deformation untersucht.

Im zweiten Teil, Abschnitt 6, werden Eigenschaften relativ einfacher und einfacher Algebren studiert, denen z. B. in der Gruppentheorie die Begriffe der relativ einfachen und einfachen Gruppen entsprechen. Im Absatz 7 werden Ketten von Faktoralgebren in gegebener Universalalgebra und im Absatz 8 isomorphe Ketten untersucht. Im Abschnitt 9 werden Eigenschaften relativ einfacher und einfacher Ketten, im Absatz 10 adjungierter Ketten von Faktoralgebren untersucht, denen z. B. in der Gruppentheorie die Eigenschaften der Normal-, Haupt- und Kompositionsreihen entsprechen. Es wird hier eine Verallgemeinerung des Satzes von Schreier und von Jordan—Hölder für Universalalgebren gegeben.

Im 11. Abschnitt wird angedeutet, wie die Theorie der Universalalgebren bei gewisser Spezialisation des Systems der Operationen in sich die Theorie der Mengen und die Theorie der Algebren mit Operatoren enthält, z. B. die Theorie der Gruppoiden mit Operatoren. Im diesen Sinne ist also diese Arbeit eine Verallgemeinerung der Arbeit [11].