František Machala

О геометрическом месте центров кривых постоянной кривизны в плоскости Лобачевского, которые касаются данной окружности и прямой

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 5 (1964), No. 1, 25--37

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119809`

1964 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 15.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: Prof. RNDr. Josef Metelka

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МЕСТЕ ЦЕНТРОВ КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО, КОТОРЫЕ КАСАЮТСЯ ДАННОЙ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ

FRANTIŠEK MACHALA

(Поступило в редакцию 15/VII 1963 г.)

I

Все изложенные соображения относятся к расширенной плоскости Евклида — E_R. Используемые геометрические элементы являются принципиально реальными.

Определение 1. Пусть даны ориентированная окружность k с центром O и радиусом r и отрезок $a < 2r$. Поставим в соответствие точке $X \in k$ точку $X' \in k$ таким образом, что $XX' = a$, $X \prec X'$. Это преобразование обозначим через φ.

Доказательства следующих лемм я предоставляю читателю.

Лемма 1. Пусть даны ориентированная окружность k, ее хорда $TT' \neq O$, где $T \prec T'$ и преобразование φ. Обозначим $M \equiv XT \,.\, X'T'$, $N \equiv XT' \,.\, X'T$. Геометрическим местом точек M является окружность $\varkappa$. Если $a \neq TT'$, геометрическим местом точек N является окружность $\varkappa'$. Окружности $\varkappa, \varkappa'$ проходят через точки T, T'. Если $a = TT'$, геометрическое место точек N — прямая $p \equiv TT'$ и несобственная прямая плоскости E_R.

Лемма 2. Обозначим соответственно через ω или ω' центр окружности $\varkappa$ или $\varkappa'$. Прямая $M\omega$ или $N\omega'$ перпендикулярна к прямой XX'.

Лемма 3. Пусть даны окружности $k, \varkappa$, которые имеют общие точки T, T'. Существуют две и только две гомологии с осью $p \equiv TT'$, при которых $k \to \varkappa$. Центры этих гомологий являются центрами гомотетий окружностей $k, \varkappa$.

Теорема 1. Пусть даны ориентированная окружность k с центром O и радиусом r и ее хорда $TT' \neq O$, где $T \prec T'$. Обозначим соответственно через t или t' касательную к окружности k в точке T или T' и $P \equiv t \,.\, t'$. Пусть дано далее преобразование φ. Обозначим соответственно через x

или x' касательную к окружности k в точке X или X' и $R \equiv x \,.\, x'$. Далее обозначим через $U \equiv t \,.\, x$, $U' \equiv t' \,.\, x'$, $V \equiv t \,.\, x'$, $V' \equiv t' \,.\, x$ (черт. 1).

Прямые $m \equiv UU'$ или $n \equiv VV'$ составляют пучок второго класса. Огибающую этого пучка обозначим соответственно через ${}^1K$ или ${}^2K$. Прямые t, t' являются касательными конических сечений ${}^1K$, ${}^2K$. Точки $S \equiv UU' \,.\, RO$ или $W \equiv VV' \,.\, RO$ — точки прикосновения прямых m или n с огибающей ${}^1K$ или ${}^2K$.

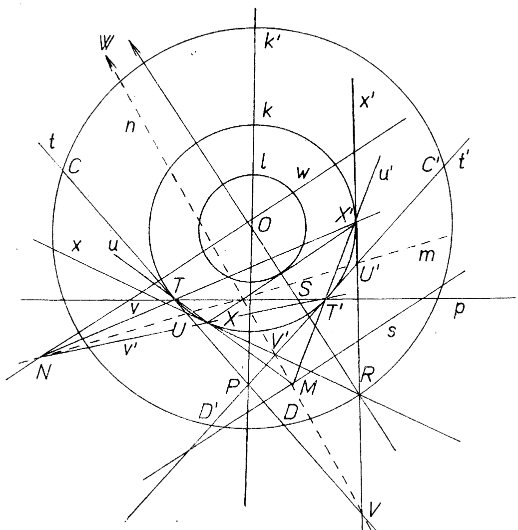

Рис. 1.

Доказательство: Обозначим соответственно через $u' \equiv X'T'$, $v' \equiv XT'$ или $u \equiv XT$, $v \equiv X'T$. Так как $k(X) \overline{\wedge}\, k(X')$, тоже пучки прямых $T'(u') \overline{\wedge}\, T'(v')$ или $T(u) \overline{\wedge}\, T(v)$. Прямые u', v' или u, v — поляры точек U', V' или U, V относительно окружности k. Следовательно, $t'(U') \overline{\wedge}\, t'(V')$ или $t(U) \overline{\wedge}\, t(V)$. Очевидно, что $t(U) \overline{\wedge}\, t'(V')$. Из этих отношений следует, что $t(U) \overline{\wedge}\, t'(U')$ или $t(V) \overline{\wedge}\, t'(V')$.

Точки $M \equiv u \,.\, u'$ или $N \equiv v \,.\, v'$ соответственно являются полюсами прямых m или n относительно окружности k. Так как прямые m или n составляют пучок второго класса, полюсы M или N этих прямых составляют коническое сечение. По лемме 1 это коническое сечение — окружность $\varkappa$ или $\varkappa'$*. Точку касания касательной m или n к коническому сечению ${}^1K$ или ${}^2K$ обозначим соответственно через S или W. Точке S или W отвечает в полярном преобразовании относительно окружности k соответственно касательная s или w к окружности $\varkappa$ или $\varkappa'$ в точке M или N. Из леммы 2 следует, что $s \perp RO$ или $w \perp RO$. Следовательно, полюс S или W прямой s или w относительно окружности k лежит на прямой RO. Потому $S \equiv RO \,.\, m$ или $W \equiv RO \,.\, n$.

Замечание: Точки R образуют окружность k' с радиусом $r' > r$. Обозначим соответственно через C, D или C', D' точки пересечения прямой t или t' с окружностью k' таким образом, что в случае $R \equiv C$, $R \equiv C'$ или $R \equiv D$, $R \equiv D'$ имеет место $t \equiv x'$, $t' \equiv x$ или $t \equiv x$, $t' \equiv x'$. На основании конструкции точек S или W описанной в теореме 1, точки C, C' или D, D' — точки касания касательных t, t' к коническому сечению ${}^1K$ или ${}^2K$.

Теорема 2. а) Если $TT' < XX'$, конические сечения ${}^1K$, ${}^2K$ — *гиперболы.*
б) Если $TT' > XX'$, конические сечения ${}^1K$, ${}^2K$ — *эллипсы.*
в) Если $TT' = XX'$, коническое сечение ${}^1K$ — *парабола,* ${}^2K$ — *вырожденное коническое сечение, ее точки образуют дважды взятую прямую OP.*

Доказательство: а) Коническое сечение ${}^1K$ или ${}^2K$ — невырождено, потому что в проективном отображении $t(U) \,\overline{\wedge}\, t'(U')$ или $t(V) \,\overline{\wedge}\, t'(V')$ точка $P \equiv t \,.\, t'$ не является неподвижной. На основании конструкции точек S или W прямая OP — ось конического сечения ${}^1K$ или ${}^2K$. Рассмотрим хорды окружности k имеющие длину $a = XX'$ и паралельные к прямой TT'. Точки пересечения этих хорд с окружностью k обозначим через Y, Y' или Z, Z' таким оразом, чтобы $Y \prec Y'$, $Z \prec Z'$ (черт. 1a). Обозначим соответственно через ${}^1A \equiv YT' \,.\, Y'T$, ${}^1B \equiv ZT' \,.\, Z'T$ или ${}^2A \equiv Y'T' \,.\, YT$, ${}^2B \equiv Z'T' \,.\, ZT$. Точки ${}^1A$, ${}^1B$ или ${}^2A$, ${}^2B$ — вершины конического сечения ${}^1K$ или ${}^2K$, как вытекает из конструкции точек этих конических сечений. Точки ${}^1A$, ${}^1B$, ${}^2A$, ${}^2B$ являются всегда собственными. Точки ${}^1A$, ${}^2B$ находятся внутри окружности k. Точка P всегда лежит между точками ${}^1A$, ${}^1B$ или ${}^2A$, ${}^2B$. Так как точка P — точка пересечения касательных t, t' конических сечений ${}^1K$, ${}^2K$, эти конические сечения — гиперболы.

б) Совершенно так же, как в случае а) мы покажем, что конические сечения ${}^1K$, ${}^2K$ — невырождены. На основе конструкции точек ${}^1A$, ${}^1B$, ${}^2A$, ${}^2B$ мы легко докажем, что точка P — внешняя точка отрезков ${}^1A{}^1B$, ${}^2A{}^2B$. Кривые ${}^1K$, ${}^2K$ — эллипсы.

---

* Если $XX' = TT'$, потом $\varkappa'$, по лемме 1 — вырожденное коническое сечение. Более подробно мы рассмотрим этой случай в следующем.

в) Согласно предыдущему мы докажем, что ${}^1K$ — невырожденное коническое сечение. Прямая OP — ось конического сечения ${}^1K$. Из конструкции вершин конического сечения ${}^1K$ вытекает, что ${}^1A$ всегда лежит внутри

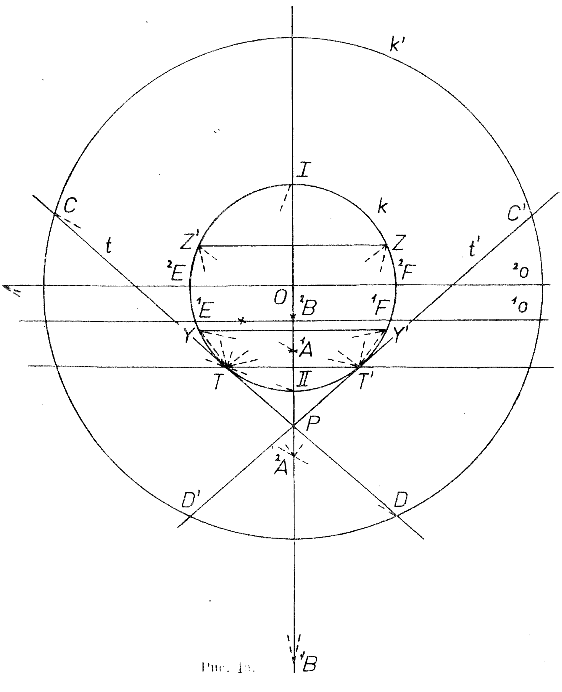

Рис. 1в.

окружности k, потому что ${}^1A \equiv OP \,.\, TT'$ и ${}^1B$ — всегда несобственная точка (черт. 1б). Коническое сечение ${}^1K$ — парабола.

Рассмотрим теперь коническое сечение ${}^2K$. Это коническое сечение — выраждено. Имеет место $P \equiv D \equiv D'$. Следовательно, в проективном отображении $t(V) \,\overline{\wedge}\, t'(V')$ является точка P неподвижной. Поэтому $t(V) \,\overline{\overline{\wedge}}$

$t'(V')$ и коническое сечение ^2K действительно вырождено. На основании конструкции касательных n конического сечения ^2K легко докажем, что каждая прямая $n \equiv VV'$ проходит через точку O. Следовательно, $t(V)$, $t'(V')$ — сечения пучка прямых $O(n)$. Коническое сечение ^2K является дважды взятой прямой OP.

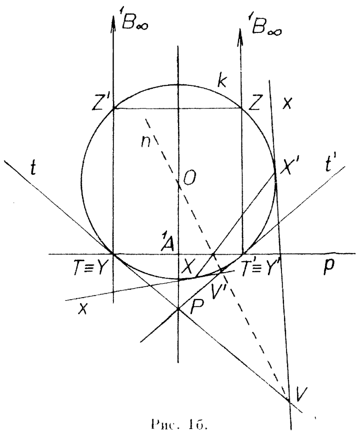

Рис. 1б.

Окружность k и коническое сечение ^1K или ^2K имеют общие касательные t, t'*. Поэтому существуют 2 гомологии с центром P, в которых $k \to {}^1K$ или $k \to {}^2K$. В этих гомологиях $T \to C$, $T' \to C'$ или $T \to D$, $T' \to D'$. Обозначим через I, II точки пересечения прямой OP с окружностью k (черт. 1а). Потом $^1A \to I$ или $^1A \to II$. Тоже $^2A \to I$ или $^2A \to II$. Этим однозначно определены выше описанные гомологии. Одна из осей этих гомологий пересекает окружность k. Точки пересечения этой оси с окружностью k обозначим через ^1E, ^1F или ^2E, ^2F. Точки ^1E, ^1F или ^2E, ^2F являются тоже точками пересечения конического сечения ^1K или ^2K с окружностью k.

Обозначим через l окружность, которая является огибающей хорд XX' (черт. 1). Если $XX' > TT'$ или $XX' < TT'$ или $XX' = TT'$, прямая $p \equiv TT'$ не пересекает окружность l или пересекает ее в двух разных точках или касается ее.

II

Пусть теперь окружность k — *абсолют* образа плоскости Лобачевского (далее только $Л$ — плоскости) в плоскости E_R. Внутренние точки окружности k мы считаем образами точек $Л$ — плоскости и внешние точки образами идеальных точек $Л$ — плоскости. Точки абсолюта k являются образами несобственных точек $Л$ — плоскости. Дальше мы не будем явно подчерки-

* Исключим случай, когда ^2K — вырожденное коническое сечение.

вать, что дело в образах точек $Л$ — плоскости в плоскости E_R, но будем говорить о $Л$ — точках, идеальных $Л$ — точках и несобственных $Л$ — точках. Этим обозначением мы будем пользоваться прежде всего тогда, если надо будет подчеркнуть положение точки плоскости E_R относительно абсолюта. Иначе мы будем обозначать точки плоскости E_R, тем же способом, как в предшествующем.

Определение 2. Пусть дана точка S и ее поляра s относительно абсолюта k. Кривая Φ гомологическая с окружностью k с центром S и осью s гомологии и содержащая по крайней мере одну $Л$ — точку, называется *кривая постоянной кривизны $Л$ — плоскости**. Если точка S является $Л$ — точкой или идеальной $Л$ — точкой или несобственной $Л$ — точкой, кривая Φ называется соответственно *$Л$ — окружностью* или *$Л$ — еквидистантой* или *$Л$ — орициклом*. Точка S называется $Л$ — центром кривой Φ. Каждую гомологию с центром S и осью s мы обозначим через ψ.

Теорема 3. Пусть дана $Л$ — окружность l с центром O (ее образ в плоскости E_R — окружность) и секущая p абсолюта k. *Геометрическим местом $Л$ — центров S кривых Φ, которые касаются $Л$ — окружности l и прямой p, являются конические сечения ^1K, ^2K**.

Доказательство: Сохраним обозначение как на чертеже 1. Рассмотрим любую прямую $q \neq OP$, проходящую через точку O. Эта прямая сечет коническое сечение ^1K или ^2K соответственно в точках ^1S, ^2S или ^1W, ^2W. Прежде всего мы докажем, что точки ^1S, ^2S, ^1W, ^2W — $Л$ — центры кривых Φ^*. Потом мы докажем, что на прямой q не лежит другой $Л$ — центр кривой Φ^*. Мы изберем дальше $q \equiv OP$ и докажем, что в этом случае $Л$ — центры кривых Φ^*, лежащие на прямой q являются точками ^1A, ^2A, ^1B, ^2B. Этим путем теорема 3 будет доказана.

1. Предположим, что прямая p не является касательной окружности l.

а) Возьмем произвольную прямую $q \neq OP$. Точки пересечения прямой q с окружностью l обозначим через ^1L, ^2L (черт. 2). Точки ^1S, ^2S, ^1W, ^2W на прямой q мы построим по теореме 1. Рассмотрим например точку ^1S и ей соответствующую точку ^1L. Обозначим через r касательную к окружности L в точке ^1L. Обозначим далее через L', L'' точки пересечения прямой q с окружностью k. Рассмотрим кривую $\Phi(^1S, {}^1L)$. В гомологии $\psi(^1S, {}^1s, {}^1L \to L')$ окружности k соответствует кривая Φ, обозначим $k \to \Phi$.

Кривая Φ касается в точке ^1L окружности l. Действительно, прямая

*) В плоскости Лобачевского вводится понятие кривизны кривых аналогично геометрии Евклида. Можно доказать, что кривые Φ и только эти кривые имеют постоянную кривизну согласно с геометрией Лобачевского.

*) Так как $Л$ — окружность l одновременно является окружностью плоскости E_R, дальше мы будем писать только окружность l. Каждую кривую Φ, которая обладает свойствами, указанными в теореме 3, мы обозначим через Φ^*.

$r \,||\, {}^1s$ является касательной окружности l. Прямой r соответствует в гомологии ψ прямая $r' \,||\, {}^1s$, проходящая через точку L'. Прямая r' — касательная к окружности k. Следовательно, прямая r — касательная кривой Φ.

Дальше мы докажем, что кривая Φ тоже касается прямой p. Обозначим через m касательную к коническому сечению ${}^1K$ в точке ${}^1S$ и M ее полюс относительно окружности k. По лемме 1 точка M лежит на окружности $\varkappa$, центр которой мы обозначим через ω. Поляра ${}^1s$ точки ${}^1S$ относительно

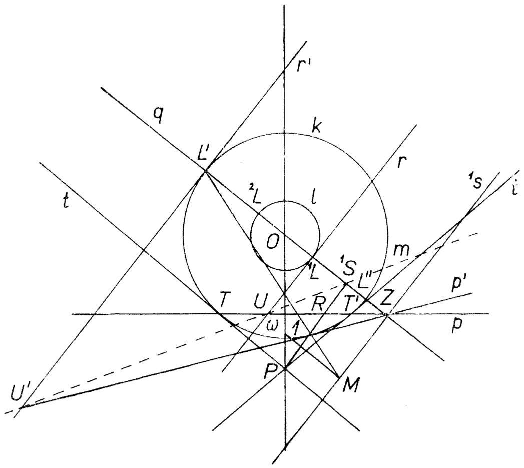

Рис. 2.

окружности k — касательная к окружности $\varkappa$ в точке M. Следовательно, $L'{}^1S \,||\, \omega M$ и прямая $L'M$ проходит через один центр гомотетии окружностей k, $\varkappa$. Обозначим через 1 вторую точку пересечения прямой $L'M$ с окружностью k и p' касательную к окружности k в точке 1. По лемме 3 прямые ${}^1s$, p' пересекаются в точке Z на прямой p. Так как точки L', 1, M лежат на прямой, их поляры r', p', m проходят через одну точку U'. Если мы обозначим $U \equiv r\,.\,p$, потом точки $U \to U'$ b гомологии ψ и следовательно, $p \equiv ZU \to \to p' \equiv ZU'$. Прямая p' — касательная к окружности k, и поэтому p — касательная к кривой Φ. Следовательно, кривая Φ является кривой Φ^*.

Точка $R \equiv {}^1SP\,.\,p$ — точка касания касательной p к кривой Φ. Так как прямые ${}^1s$, p, p' проходят через одну точку, точки ${}^1S$, P, 1 лежат на одной прямой. Прямые $P{}^1S$, $L'M$ пересекаются в точке 1 на окружности k. В гомологии $\psi({}^1S, {}^1s, {}^1L \to L'')$ опять $k \to \Phi({}^1S, {}^1L)$. Прямой $p \to p''$, где p'' — вторая касательная из точки Z к окружности k.

Тем же образом покажем, что кривая $\Phi({}^2S, {}^2L)$ является тоже кривой Φ^*. Кривые $\Phi({}^1W, {}^1L)$, $\Phi({}^2W, {}^2L)$ тоже являются кривыми Φ^*. Доказательство я предоставляю читателю.

На прямой $q \mp OP$ вообще существуют четыре $Л$ — центра кривых Φ^*. Дальше докажем, что на прямой $q \mp OP$ не лежит более четырех $Л$ — центров кривых Φ.

Рассмотрим произвольный $Л$ — центр S кривой Φ^* на прямой $q \mp OP$. Поляру точки S относительно окружности k обозначим через s. Кривая Φ^* может касаться окружности l только в точках ${}^1L$, ${}^2L$; это вытекает из свойств гомологии ψ. Предполагаем прежде всего, что кривая Φ^* касается окружности l в точке ${}^1L$. В гомологии $\psi(S, s, {}^1L \to L')$ прямой p соответствует касательная p^* к окружности k. Имеет место $p^* \equiv U^*Z^*$, где $U^* \equiv SU \,.\, r'$, $Z^* \equiv s \,.\, p$, где U, r', p имеют то же самое значение, как на чертеже 2. Обозначим через 1* точку касания прямой p^* и M^* полюс прямой $m^* \equiv SU$. Так как прямые r', m^*, p пересекаются в точке U^*, полюсы L', M^*, 1* лежат на одной прямой. Прямые p, p^*, s пересекаются в точке Z^*, следовательно, их полюсы P, 1*, S лежат на одной прямой. Поэтому прямые SP, M^*L' обязательно пересекаются на окружности k в точке 1*. Если прямые SP, M^*L пересекаются на окружности k, наоборот легко докажем, что кривая $\Phi(S, {}^1L)$ — тоже кривая Φ^*.

То же самое рассуждение проведем для точку ${}^2L$.

Рассмотрим на прямой q совокупность точек $q(A)$. Поляры отдельных точек этой совокупности относительно окружности k образуют пучок прямых $Q_\infty(a)$ (черт. 3). Полюс прямой r относительно окружности k обозначим через R. Прямая $u \equiv PR$ — поляра точки $U \equiv p \,.\, r$ относительно окружности k. Прямая u пересекает пучок прямых $Q_\infty(a)$ в совокупности точек $u(B)$. Потом $P(PA) \,\overline{\wedge}\, L'(L'B)$: Пучок прямых $Q_\infty(a)$ пересекает прямую q в совокупности точек $q(C)$. Из инволюции полюсов относительно окружности k на прямой q вытекает, что $q(C) \,\overline{\wedge}\, q(A)$. Очевидно $q(C) \,\overline{\wedge}\, u(B)$, следовательно $q(A) \,\overline{\wedge}\, u(B)$ и тоже $P(PA) \,\overline{\wedge}\, L'(L'B)$. Поэтому пучки прямых $P(PA)$, $L'(L'B)$ образуют коническое сечение ξ. Считаем прямую $L'P$ прямой пучка с центром P. Этой прямой соответствует в пучке с центром L' прямая r', которая вследствие того является касательной конического сечения ξ в точке L'. Так как r' является тоже касательной к окружности k в точке L', конические сечения k, ξ касаются в точке L'. Следовательно, конические сечения k, ξ пересекаются кроме того самое большее в двух точках. Проекцией этих точек на прямую q из точки P мы получим $Л$ — центры кривых

$\Phi^*(S, {}^1L)$. Тем же образом покажем при помощи конического сечения ξ', что существуют самое большее две кривые $\Phi(S, {}^2L)$.

Рекомендую читателю, чтобы он обсудил особые случаи, когда $L' \equiv T$, $L' \equiv T'$, или случай, когда прямая q проходит через точку пересечения прямой p с окружностью l (если она существует).

б) Пусть прямая $q \equiv OP$. Так как прямые r, r', m, p проходят через одну несобственную точку, нельзя провести доказательство так, как в случае а). Опять мы обозначим соответственно через ${}^1L$, ${}^2L$ или L', L'' точки пересечения прямой q с окружностью l или k (черт. 4). Проведем через точку

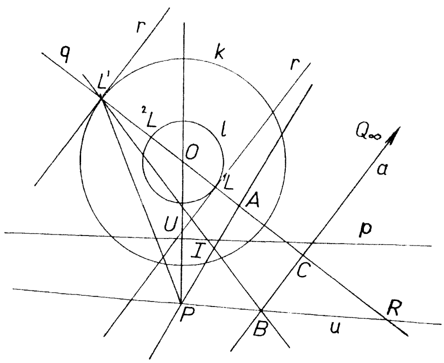

Рис. 3.

${}^1L$ прямую $r \parallel p$ и ее точки пересечения с окружностью k обозначим через X, X'. Рассмотрим полный четырехвершинник $TT'X'X$, вписанный окружности k, и обозначим $N \equiv XT' . X'T$, $M \equiv XT . X'T'$. Прямая $m \parallel p$ или $n \parallel p$, проходящая соответственно через точку N или M, является полярой точки M или N относительно окружности k. Обозначим через x, x' касательные к окружности k в точках X, X' и $U \equiv t . x$, $U' \equiv t' . x'$, $V' \equiv t' . x$, $V \equiv t . x'$. Точки U, U' или V, V' — соответственно полюсы прямых XT, $X'T'$ или $X'T$, XT'. Так как прямые XT, $X'T'$, n или $X'T$, XT', m проходят соответственно через точку M или N, точки U, U', N или V, V', M лежат на прямой m или n. Из конструкции точек конических сечений ${}^1K$, ${}^2K$ вытекает, что $N \equiv {}^1A$, $M \equiv {}^2B$, где ${}^1A$ или ${}^2B$ — вершина конического сечения ${}^1K$ или ${}^2K$.

Рассмотрим кривую $\Phi({}^1A, {}^1L)$ и гомологию $\psi({}^1A, n, {}^1L \to L')$, в которой $k \to \Phi$. Кривые l, Φ очевидно касаются в точке ${}^1L$. Докажем, что кривая Φ касается тоже прямой p.

Обозначим через R точку пересечения прямых q, p. Из свойств полного четырехсторонника $TT'X'X$ и из полярных свойств окружности k вытекает:

$$({}^1A\,{}^2B\,{}^1L\,R) = -1 \tag{1}$$

$$({}^1A\,{}^2B\,L'L'') = -1$$

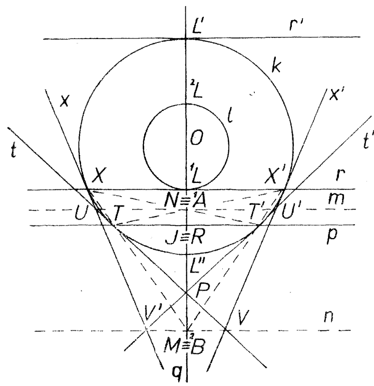

Рис. 4.

Для точку $J \to L''$ в гомологии ψ следует

$$({}^1A\,{}^2B\,{}^1L\,L') = ({}^1A\,{}^2B\,J\,L''), \tag{2}$$

как вытекает из свойств гомологии ψ.

Из (1) следует $\dfrac{({}^1A\,{}^2B\,{}^1L)}{({}^1A\,{}^2B\,R)} =$

$$= \frac{({}^1A\,{}^2B\,L')}{({}^1A\,{}^2B\,L'')}\cdot({}^1A\,{}^2B\,{}^1L\,L') =$$

$$= ({}^1A\,{}^2B\,R\,L'') \tag{3}$$

Сравнением (2), (3) получим $J \equiv R$.

Прямой p следовательно отвечает в гомологии ψ касательная к окружности k в точке L'', поэтому p — касательная к кривой Φ в точке R. Кривая $\Phi({}^1A, {}^1L)$ является кривой Φ^*.

Из равенств (1), (2), (3) вытекает, что тоже кривая $\Phi({}^2B, {}^1L)$ является кривой Φ^*. Тем же самым образом докажем, что кривые $\Phi({}^2A, {}^2L)$, $\Phi({}^1B, {}^2L)$ тоже являются кривыми Φ^*.

Дальше мы докажем, что помимо точек ${}^1A, {}^1B, {}^2A, {}^2B$ не существует на прямой q Л — центр кривой Φ^*. Каждая кривая Φ^*, Л — центр которой лежит на q, касается окружности l в точке ${}^1L$, или ${}^2L$. Предполагаем, что кривая Φ^* с Л — центром S касается окружности l в точке ${}^1L$. Потом существует гомология $\psi(S, s, {}^1L \to L')$, в которой $k \to \Phi^*$. Обозначим через $W \equiv s\,.\,q$. Имеет место $(SWL'L'') = -1$ и из гомологии ψ вытекает

$$(SW\,{}^1L\,L') = (SWRL'').$$

Из этих отношений следует, что $(SW\,{}^1L\,R) = -1$, следовательно

$$S \equiv {}^1A,\ W \equiv {}^2B,\ \text{или}\ S \equiv {}^2B,\ W \equiv {}^1A.$$

Одинаковые рассуждение проведем для кривой Φ^*, которая касается окружности l в точке ${}^2L$.

2. Предполагаем, что прямая p — касательная окружности l. Доказательство проводится совершенно так же, как в случае 1.

а) Пусть $q \neq OP$ — любая прямая проходящая через точку O. Докажем, что точки пересечения ${}^1S$, ${}^2S$ прямой q с параболой ${}^1K$ — центры кривых Φ^*. Дальше мы докажем, что на прямой q не существует более $Л$ — центров кривых Φ^*, чем три:*

Построим коническое сечение ξ одинаково, как в случае 1. Пусть $A \equiv O$ (черт. 5). Потом $B \equiv a \,.\, u$ — несобственная точка прямой u. Точка $I \equiv L'B \,.\, PO$ лежит на окружности k, как вытекает из подобия $\Delta OPR \sim \Delta OL'I$. Помимо точек L', I коническое сечение ξ пересекает окружность k самое большее в одной точке. Одинаково мы докажем, что коническое сечение ξ' пересекает окружность k в точке II, где II — вторая точка пересечения прямой OP с окружностью k. Проекцией точек пересечения конических сечений ξ, ξ' с окружностью k из точки P на прямую q мы получим точку O и самое большее два $Л$ — центра кривых Φ^*.

б) Пусть $q = OP$. Считаем любую точку S прямой q $Л$ — центром кривой $\Phi(S, {}^1L)$. Потом в гомологии $\psi(S, s, {}^1L \to L')$ прямой p всегда отвечает касательная к окружности k в точке L''. Следовательно, кривая $\Phi(S, {}^1L)$ — кривая Φ^*.

Этим теорема 3 доказана.

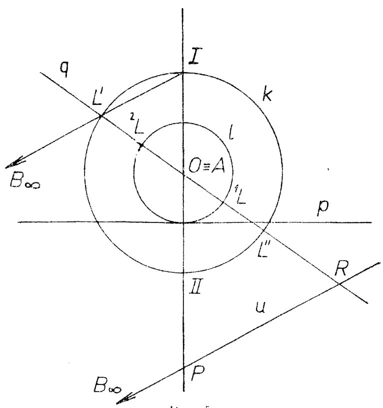

Рис. 5.

Обозначим соответственно через ${}^1\widehat{E^1A^1F}$ или ${}^2\widehat{E^2A^2F}$ множество точек конического сечения ${}^1K$ или ${}^2K$ лежащих внутри окружности k.

Имеет место

Теорема 4. *Пусть дана $Л$ — окружность l с центром O и прямая p,*

*) Окружность l мы считаем кривой Φ^*.

которая содержит по крайней мере одну Л — точку и не касается Л — окружности l. Геометрическим местом Л — центров Л — окружностей или Л — орициклов или Л — эквидистант, которые касаются данной Л — окружности l и прямой p, являются соответственно множества точек ${}^1\widehat{E^1A^1}F$, ${}^2\widehat{E^2A^2}F$ или точки ${}^1E$, ${}^1F$, ${}^2E$, ${}^2F$ или все остальные точки конических сечений ${}^1K$, ${}^2K$. Если прямая p — касательная к Л — окружности l, геометрическим местом Л — центров Л — окружностей или Л — орициклов или Л — эквидистант, касающихся Л — окружности L и прямой p является соответственно множество точек ${}^1\widehat{E^1A^1}F$ и все Л — точки прямой OP или точки ${}^1E$, ${}^1F$ и несобственные Л — точки прямой OP или остальные точки параболы ${}^1K$ и прямой OP.

Замечание. Кривые плоскости Лобаческого, образом которых в нашей интерпретации Л — геометрии являются конические сечения, имеющие с абсолютом k две и только две общие точки, называются полугиперболами. Так как вид кривых движением в плоскости Лобачевского не меняется, мы можем выразить часть предшествующей теоремы в внутренней геометрии плоскости Лобачевского следующим образом: Геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной окружности l и прямой p, которая не касается окружности l или касается окружности l, являются соответственно две полугиперболы или полугипербола и прямая.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. Ф. Каган:* Основания геометрии. Часть первая. Москва 1949.
[2] *В. Ф. Каган:* Основания геометрии. Часть вторая. Москва 1956.

Shrnutí

O GEOMETRICKÉM MÍSTĚ STŘEDŮ KŘIVEK KONSTANTNÍ KŘIVOSTI V ROVINĚ LOBAČEVSKÉHO, KTERÉ SE DOTÝKAJÍ DANÉ KRUŽNICE A DANÉ PŘÍMKY

FRANTIŠEK MACHALA

V práci je na Beltrami—Kleinově modelu Lobačevského roviny zkoumáno geometrické místo středů všech kružnic, ekvidistant a mezních křivek Lobačevského roviny, které se dotýkají dané přímky a dané kružnice. Důkazy vět jsou prováděny synteticky metodou pomocí projektivních vztahů.

Zusammenfassung

ÜBER DEN GEOMETRISCHEN ORT ALLER MITTELPUNKTE VON KURVEN KONSTANTER KRÜMMUNG IN DER EBENE VON LOBATSCHEFSKIJ, DIE EINEN GEGEBENEN KREIS UND EINE GEGEBENE GERADE BERÜHREN

FRANTIŠEK MACHALA

In der Vorliegenden Arbeit wird am Beltrami—Klein-Modell in der Lobatschefskij-Ebene der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Feldkreise, Abstandslinien und Grenzkreise untersucht, die eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis in der Lobatschefskij-Ebene berühren. Die Beweise werden synthetisch mittels projektiver Beziehungen durchgeführt.