Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

Stanislav Trávníček

Об одном использовании функции Флоке

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 4 (1963), No. 1, 69--74

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119802

1963 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 12.

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí katedry: doc. RNDr. Miroslav Laitoch, kandidát věd

ОБ ОДНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ФУНКЦИИ ФЛОКЕ

СТАНИСЛАВ ТРАВНИЧЕК

(Поступило в редакцию 26/X 1962 г.)

В 1954 г. расширил М. Лайтох метод Флоке для определения вида фундаментальной системы решений дифференциального уравнения $y'' = Q(x)\, y$ [1] и самосопряженного диф. уравнения 3-го порядка [2]. В настоящей статье изучается использование функции Флоке для определения вида фундаментальной системы решений системы двух линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1. В этой статье я остаюсь при обозначениях, введенных в [4]. Я занимаюсь системой

$$u'(t) = M(t)\, u(t) \tag{a}$$

где

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ c(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix},$$

где функция $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ вместе с какой-то функцией $Z(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= - c[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta(t) + b(t)\, \gamma(t) \\
\beta'(t) &= -b[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha(t) + b(t)\, \delta(t) \\
\gamma'(t) &= c(t)\, \alpha(t) - c[Z(t)]\, Z'(t)\, \delta(t) \\
\delta'(t) &= c(t)\, \beta(t) - b[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma(t).
\end{aligned}$$

По теореме 4,1 [4], если $u(t)$ решение системы (a), то $K(t)\, u[Z(t)]$ тоже является решением системы (a). Так мы получили определенное преобразование $\mathbf{A}$ решения системы (a):

$$u(t)\, \mathbf{A} = K(t)\, u[Z(t)].$$

Было уже показано, что $\mathbf{A}$ преобразование линейное и для $|K(t)| \neq 0$ регулярное, так как существует обратное. Решения системы (a) образуют, как известно, двумерное линейное пространство над полем вещественных чисел. Мы будем искать так называемое нормальное решение, т. е. решение, удовлетворяющее уравнению $U(t)\,\mathbf{A} = sU(t)$, где s постоянная. При этом очевидно s должно быть корнем характеристического уравнения

$$s^2 - \mathrm{sp}\, A \,.\, s + |A| = 0, \tag{1}$$

где A — матрица преобразования $\mathbf{A}$.

Замечание: Нормальные решения, принадлежащие к разным корням характеристического уравнения, суть линейно независимые. (См. [5], гл. III, § 6, теорема 2).

2. Сначала рассмотрим специальное преобразование, где $K(t)$, $Z(t)$ есть определенное формулами $2^{0\prime}$, абзац 2, [4] (см. [3]). Само собой разумеется, что мы должны взять здесь $b(t) \equiv B(t)$, $c(t) \equiv C(t)$ и о функции $b(t)$ предположим, что она имеет в интервале j производные до 2-го порядка включительно и что имеет место $b(t) \neq 0$.

Лемма 1: *Если $u_1(t)$ первая компонента решения системы* (a), *то решение системы* (a) *имеет вид*

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dfrac{u_1'(t)}{b(t)} \end{pmatrix}.$$

Доказательство: Если систему (a) приведем к дифференциальному уравнению относительно $u_1(t)$ [6], то получим, что $u_1(t)$ удовлетворяет диф. уравнению

$$x'' - \frac{b'(t)}{b(t)}\, x' - b(t)\, c(t)\, x = 0.$$

О верности леммы можно теперь убедиться простой подстановкой.

Пусть $F(t)$ функция, имеющая непрерывную производную 3-го порядка и удовлетворяющая функциональному уравнению

$$F[Z(t)] - F(t) = 1, \quad F'(t) \neq 0$$

(смотри лемму 3,1 [2]).

Определим вспомогательную функцию $g(t)$ уравнением

$$g[Z(t)] = \mathrm{sgn}\, s \,.\, g(t).$$

Предположим, что эта функция обладает непрерывной производной 2-го порядка.

Лемма 2. *Функция* $\Phi(t) = g(t) \sqrt{|b(t)|}\, \dfrac{e^{rF(t)}}{\sqrt{|F'(t)|}}$, *где* $r = \ln|s|$ *имеет свойство*:

$$\varkappa(t)\, \Phi[Z(t)] = s \,.\, \Phi(t)$$

Доказательство можно провести простой подстановкой.

Функцию $\Phi(t)$ будем по [1] называть функцией *Флоке*, сопряженной с системой (a) и корнем s.

Теорема 2,1. *Если характеристическое уравнение* (1) *имеет действительный корень s, то система (a) имеет нормальное решение, которое можно выразить в виде*

$$\left.\begin{aligned} U_1(t) &= \Phi(t)\ \pi(t) \\ U_2(t) &= \frac{\Phi(t)}{b(t)}\,[\Psi(t)\ \pi(t) + \pi'(t)] \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где $\Psi(t) = \mathrm{D}\ln|\Phi(t)|$ и функция $\pi(t)$ имеет непрерывную производную 2-го порядка и удовлетворяет тождеству $\pi[Z(t)] = \pi(t)$.

Доказательство: Так как s является корнем характеристического уравнения (1), то существует нормальное решение системы (a), для которого имеет место

$$U(t)\,\mathbf{A} = s\,.\,U(t).$$

Для первой компоненты это значит, что она удовлетворяет уравнению

$$\varkappa(t)\ U_1[Z(t)] = s\,.\,U_1(t).$$

Частное $\dfrac{U_1(t)}{\Phi(t)} = \pi(t)$ является поэтому инвариантным при подстановке $Z(t)$ вместо независимой переменной, т. е. первую компоненту можно выразить в виде $U_1(t) = \Phi(t)\,\pi(t)$. Вторую компоненту $U_2(t)$ определим по лемме 1.0 верности равенства $\gamma(t)\ U_1[Z(t)] + \delta(t)\ U_2[Z(t)] = s\,.\,U_2(t)$ можно еще убедиться простой подстановкой.

Теорема 2,2. *Пусть характеристическое уравнение* (1) *имеет два вещественных разных корня. Тогда существует фундаментальная система нормальных решений $U^{(i)}(t)$ $(i = 1,2)$ системы (a), которую можно выразить в виде*

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(i)}(t) &= \Phi_i(t)\ \pi_i(t) \\ U_2^{(i)}(t) &= \frac{\Phi_i(t)}{b(t)}\,[\Psi_i(t)\,\pi_i(t) + \pi_i'(t)] \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где $\Phi_i(t)$ есть функция Флоке, сорпяженная с корнем $s_i (i = 1,2)$ и $\pi_i(t)$ функции, определенные в теореме 2,1.

Доказательство: Так как характеристическое уравнение (1) имеет корни s_1, s_2, то существуют нормальные решения $U^{(1)}(t)$, $U^{(2)}(t)$ системы (a), которые можно по теореме 2,1 выразить в виде (3) и которые, по замечанию в абзаце 1, линейно независимые. Поэтому мы можем их избрать в качестве фундаментальной системы решений.

Теорема 2,3. *Пусть характеристическое уравнение* (1) *имеет один двухкратный корень s_0 и ранг h матрицы $A - s_0E$ есть $h = 0$. То существует* *фундаментальная система нормальных решений* $U^{(i)}(t)$ $(i = 1,2)$ *системы* (a), *которую можно выразить в виде*

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(i)}(t) &= \Phi_0(t)\,\pi_i(t) \\ U_2^{(i)}(t) &= \frac{\Phi_0(t)}{b(t)}\left[\Psi_0(t)\,\pi_i(t) + \pi_i'(t)\right] \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где $\Phi_0(t)$ *есть функция Флоке, сопряженная с корнем* s_0 *и* $\pi_i(t)$ *функции, определенные в теореме 2,1, для которых имеет место*

$$\begin{vmatrix} \pi_1(t) & \pi_1'(t) \\ \pi_2(t) & \pi_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство: Из равенства $h = 0$ вытекает, что можно найти постоянные $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}$ $(i = 1,2)$ такие, что

$$\begin{vmatrix} c_1^{(1)} & c_2^{(1)} \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Существуют тогда нормальные линейно независимые решения $U^{(i)}(t) = c_1^{(i)}u(t) + c_2^{(i)}v(t)$ (здесь $u(t)$, $v(t)$ произвольные решения, образующие фундаментальную систему решений), выражающиеся по теореме 2,1 в виде (4). Решения $U^{(i)}(t)$ выраженные в виде (4), являются существенно линейно независимыми, так как

$$\begin{vmatrix} U_1^{(1)}(t) & U_2^{(1)}(t) \\ U_1^{(2)}(t) & U_2^{(2)}(t) \end{vmatrix} = \frac{\Phi_0^2(t)}{b(t)} \begin{vmatrix} \pi_1(t) & \pi_1'(t) \\ \pi_2(t) & \pi_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

и можно их считать фундаментальной системой решений.

Замечание. В случае, приведенном в теореме 2,3, есть всякое решение системы (a) нормальное.

Теорема 2.4. *Пусть характеристическое уравнение* (1) *имеет один двухкратный корень* s_0 *и ранг* h *матрицы* $A - s_0E$ *есть* $h = 1$. *То существует фундаментальная система решений* $U(t)^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ *системы* (a), *которую можно выразить в виде*

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(1)}(t) &= \Phi_0(t)\,\pi_1(t) \\ U_2^{(1)}(t) &= \frac{\Phi_0(t)}{b(t)}\left[\Psi_0(t)\pi_1(t) + \pi_1'(t)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} U_1^{(2)}(t) &= \Phi_0(t)\,\left[\pi_2(t) + F(t)\,\pi_1(t)\right] \\ U_2^{(2)}(t) &= \frac{\Phi_0(t)}{b(t)}\left[\Psi_0(t)\,(\pi_2(t) + F(t)\,\pi_1(t)) + \pi_2'(t) + F'(t)\,\pi_1(t) + F(t)\,\pi_1'(t)\right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Доказательство: Для корня s_0 характеристического уравнения (1) существует нормальное решение $U^{(1)}(t)$, выражающееся по теореме 2,1 в виде (5). Из равенства $h = 1$ вытекает, что все остальные нормальные решения являются линейно зависимыми от $U^{(1)}(t)$.

В качестве $U^{(2)}(t)$ избираем решение системы (a) таким образом, чтобы матрица A имела канонический вид

$$\begin{vmatrix} s_0 & 0 \\ s_0 & s_0 \end{vmatrix},$$

т. е. чтобы $U^{(2)}(t)\,\mathbf{A} = s_0(U^{(1)}(t) + U^{(2)}(t))$. Если искать функцию $U_1^{(2)}(t)$ в виде $\Phi_0(t)\,z(t)$, то получится так же, как в теореме 3,3 [2], что общим решением есть $z(t) = \pi_2(t) + F(t)\,\pi_1(t)$. Из этого и из леммы 1 вытекает (6).

Если характеристическое уравнение (1) имеет два комплексных корня, то система (a) не имеет нормальных решений (над полем вещественных чисел).

Над полем комплексных чисел мы получили бы аналогичные выражения для нормальных решений и фундаментальных систем решений, только достаточно положить в лемме 2 $\Phi(t) = \sqrt{|b(t)|}\dfrac{e^{rF(t)}}{\sqrt{|F'(t)|}}$, где $r = \log s$.

3. Обратим теперь внимание на другое специальное преобразование, где $K(t)$, $Z(t)$ определено формулами $3^{0'}$, абзац 2 [4]. Мы должны опять положить $b(t) \equiv B(t)$ $c(t) \equiv C(t)$ и о функции $c(t)$ предполагаем, что имеет в интервале j производные до 2-го порядка включительно и $c(t) \neq 0$.

Лемма 3: *Если $u_2(t)$ вторая компонента решения системы* (a), *то решение системы* (a) *имеет вид*

$$u(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{u_2'(t)}{c(t)} \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

Доказательство проводим так же, как у леммы 1.

При помощи решения $Z(t)$ уравнения $(b_{2,2})$ есть опять определена функция $F(t)$, имеющая непрерывную производную 3-го порядка и удовлетворяющая функциональному уравнению

$$F[Z(t)] - F(t) = 1,\ F'(t) \neq 0.$$

Уравнением $g[Z(t)] = \operatorname{sgn} s\,.\,g(t)$ определим вспомогательную функцию $g(t)$, обладающую непрерывной производной 2-го порядка.

Лемма 4: *Функция* $\Phi(t) = g(t)\sqrt{|c(t)|}\dfrac{e^{rF(t)}}{\sqrt{|F'(t),|}}$, *где* $r = \ln|s|$ *имеет свойство*

$$\delta(t)\,\Phi[Z(t)] = s\,.\,\Phi(t)$$

Доказательство можно провести простой подстановкой.

Все дальнейшие результаты вполне аналогичны предыдущим. Только как пример приведем следующую теорему.

Теорема 3,1. *Если характеристическое уравнение* (1) *имеет действитель-*

ный корень s, то система (a) имеет нормальное решение, которое можно выразить в виде

$$U_1(t) = \frac{\Phi(t)}{c(t)} [\Psi(t)\, \pi(t) + \pi'(t)],$$
$$U_2(t) = \Phi(t)\, \pi(t),$$

где функции $\Psi(t)$, $\pi(t)$ определены так же, как в теореме 2,1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Лайтох,* Расширение метода Флоке для определения вида фундаментальной системы решений дифференциального уравнения вида $y'' = Q(x)y$, Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955, 164 и д.

[2] *М. Лайтох,* О преобразованиях решений линейных дифференциальных уравнений, Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага, 258 и д.

[3] *S. Šantavá-Krohová,* Transformace integrálů systémů dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, Kandidátská disertační práce, Brno 1960.

[4] *С. Травничек,* О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка, Acta universitatis Palackianae Olomucensis, F.R.N., Tom 9, 1962.

[5] *А. И. Мальцев,* Основы линейной алгебры, Москва 1956.

[6] *G. Sansone,* Equazioni differenciali nel campo reale, русское издание; Москва 1953, гл. II, § 1,1.

Shrnutí

O JEDNOM POUŽITÍ FLOQUETOVY FUNKCE

STANISLAV TRÁVNÍČEK

V tomto článku se studuje použití Floquetovy funkce [1] k určení tvaru fundamentální soustavy řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu.

Zusammenfassung

VON EINER APPLIKATION DER FLOQUET'SCHEN FUNKTION

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Im vorliegenden Artikel untersucht man die Floquet'sche Funktion [1]. Das Ergebnis ist eine Applikation dieser Funktion zur Bestimmung der Form des Fundamentalsystems von Lösungen eines Systems zweier linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.