Stanislav Trávníček

О преобразованиях решений систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 3 (1962), No. 1, 151--162

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119789

1962 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM TOM 9

Katedra matematické analýzy přírodovědecké fakulty
Vedoucí: doc. RNDr. et CSc. M. Laitoch

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

СТАНИСЛАВ ТРАВНИЧЕК

(Поступило в редакцию 24. 10. 1961 г.)

В настоящей работе исследуется вопрос преобразований двух систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в себя. Применяется метод, который для линейных дифференциальных уравнений второго порядка выработал проф. О. Борувка [1].

1. В настоящей работе занимаюсь системами двух линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка особого вида

$$(a) \qquad y' = M(t)\, y \qquad\qquad \dot{Y} = N(T)\, Y \qquad (A)$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad Y(T) = \begin{pmatrix} Y_1(T) \\ Y_2(T) \end{pmatrix},$$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ c(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad N(T) = \begin{pmatrix} 0 & B(T) \\ C(T) & 0 \end{pmatrix},$$

и где штрихом обозначены производные относительно t и точкой производные относительно T. Предположим, что $b(t)$, $c(t)$ непрерывны в интервале j и $B(T)$, $C(T)$ непрерывны в интервале J, и что в этих интервалах определены решения системы (a) и системы (A).

Сначала докажем три леммы.

Лемма 1. Пусть система (A) имеет в интервале J решение $U(T)$ с компонентами $U_1(T)$, $U_2(T)$ и в интервале i определены функции $f_k(t)$, $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2)$ и функция

$Z(t)$, которая отображает интервал i на интервал $I \subset J$. Если же в интервале I имеет место для произвольного $U(T)$ равенство

$$f_1(t)\, U_1[Z(t)] + f_2(t)\, U_2[Z(t)] = \varphi_1(t)\, U_1[Z(t)] + \varphi_2(t)\, U_2[Z(t)],$$

тогда $f_k(t) = \varphi_k(t)$ для всех $t \in i$ $(k = 1, 2)$.

Доказательство: Выберем в место $U(T)$ последовательно два независимых частных решения $U^{(1)}(T)$, $U^{(2)}(T)$. Тогда имеет место

$$\left.\begin{aligned} &[f_1(t) - \varphi_1(t)]\, U_1^{(1)}[Z(t)] + [f_2(t) - \varphi_2(t)]\, U_2^{(1)}[Z(t)] = 0 \\ &[f_1(t) - \varphi_1(t)]\, U_1^{(2)}[Z(t)] + [f_2(t) - \varphi_2(t)]\, U_2^{(2)}[Z(t)] = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (*)$$

Обозначим

$$W(T) = \begin{vmatrix} U_1^{(1)}(T) & U_2^{(1)}(T) \\ U_1^{(2)}(T) & U_2^{(2)}(T) \end{vmatrix}$$

Так как $U^{(1)}(T)$, $U^{(2)}(T)$ образуют фундаментальную систему решений, то $W(T) \neq 0$ в интервале J, так что $W[Z(t)] \neq 0$ в интервале i, что обозначает, что система (*) имеет в интервале i только тривиальное решение. Из этого следует, что $f_k(t) = \varphi_k(t)$ $(k = 1, 2)$ в интервале i.

Лемма 2. Существует функция $Z(t)$, которая изображает интервал (или сегмент) $i_0 \subset j$ на интервал (или сегмент) $I_0 \subset J$, имеет в интервале i_0 непрерывную и положительную производную и данную внутреннюю точку t_0 интервала j отображает на данную внутреннюю точку T_0 интервала J.

Доказательство проведем так, что построим функцию, удовлетворяющую данным условиям.

Таких функций, как видно из геометрической постановки задачи, существует бесконечно много; мы выберем случай, когда $Z(t)$ есть линейная функция.

Обозначим $j = (a, b)$, $J = (A, B)$. В этих интервалах даны внутренние точки t_0, T_0. Выберем a_0, b_0', A_0, B_0' такие, чтобы имели место неравенства $a < a_0 < t_0 < b_0' < b$, $A < A_0 < T_0 < B_0' < B$.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= a_0 + \frac{t_0 - a_0}{T_0 - A_0}(B_0' - A_0) \\ B_1 &= A_0 + \frac{T_0 - A_0}{t_0 - a_0}(b_0' - a_0) \end{aligned}\right\}. \qquad (**)$$

Пусть сейчас $b_0 = \min(b_0', b_1)$, $B_0 = \min(B_0', B_1)$. Тогда функция

$$Z(t) = A_0 + \frac{T_0 - A_0}{t_0 - a_0}(t - a_0), \qquad (Z)$$

отображает интервал $\langle a_0, b_0\rangle \subset (a, b)$ на интервал $\langle A_0, B_0\rangle \subset (A, B)$. Подстановкой определим, что $Z(a_0) = A_0$, $Z(t_0) = T_0$ и также $Z(b_0) = B_0$. Из уравнений (**) следует: если $b_1 < b_0'$ то $B_0' < B_1$, если $b_1 > b_0'$ то $B_0' > B_1$. Интервалы $\langle a_0, b_0\rangle$, $\langle A_0, B_0\rangle$ таким образом имеют или вид $\langle a_0, b_1\rangle$, $\langle A_0, B_0'\rangle$, или $\langle a_0, b_0'\rangle$ $\langle A_0, B_1\rangle$. В обоих случаях очевидно отображается b_0 на B_0.

Далее имеет место

$$Z'(t) = \frac{T_0 - A_0}{t_0 - a_0} > 0,$$

из чего следует, что функция, определенная уравнением (Z), имеет требуемые свойства.

Лемма 3. Пусть дана система четырех дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \qquad - C[Z(t)]\, Z'(t)\, \beta(t) + b(t)\, \gamma(t) \\
\beta'(t) &= - B[Z(t)]\, Z'(t)\, \alpha(t) \qquad + b(t)\, \delta(t) \\
\gamma'(t) &= \quad c(t)\, \alpha(t) \qquad - C[Z(t)]\, Z'(t)\, \delta(t) \\
\delta'(t) &= \qquad c(t)\, \beta(t) - B[Z(t)]\, Z'(t)\, \gamma(t)
\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ неизвестные функции.

Пусть сейчас $Z(t)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, i_0, I_0 замкнутые интервалы и $Z'(t)$ непрерывная функция. Выберем α_0, β_0, γ_0, δ_0. Тогда для данной функции $Z(t)$ существуют и определены однозначно функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ начальными данными $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\beta(t_0) = \beta_0$, $\gamma(t_0) = \gamma_0$, $\delta(t_0) = \delta_0$ как решения системы (1).

Доказательство: Так как $Z'(t)$ непрерывна в замкнутом интервале, то она в этом интервале ограничена. Утверждение леммы тогда следует из того, что система (1) удовлетворяет при данных условиях предпосылке теоремы о существовании и однозначности решений дифференциальных уравнений [3].

Замечание: Так как, следуя лемме 2, существует функция $Z(t)$, удовлетворяющая условиям этой леммы, то всегда существуют функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, которые вместе с $Z(t)$ являются решением системы (1) в каком-то непустом интервале $i \subset j$.

2. Для следующих теорем имеют место предположения:

a) $U(T)$ является решением системы (A), определенным в интервале J начальными условиями $U(T_0) = U_0$, где $T_0 \in J$.

b) Функция $Z(t)$ обладает производной $Z'(t)$ и отображает интервал $i \subset j$ на интервал $I \subset J$ (где j есть интервал, в котором определены решения системы (a), и имеет место $Z(t_0) = T_0$ ($t_0 \in i$).

c) Функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ определены в интервале i и обладают в этом интервале производной первого порядка.

Введем обозначение

$$K(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t)\,\beta(t) \\ \gamma(t)\,\delta(t) \end{pmatrix}.$$

Замечание: Если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ удовлетворяют системе (1) то $|K(t)|$ = постоянной.

Так как в таком случае

$$\begin{aligned} |K(t)|' &= \alpha'\delta + \alpha\delta' - \beta'\gamma - \beta\gamma' = \\ &= -C[Z(t)]\,Z'(t)\,\beta\delta + b(t)\,\gamma\delta + c(t)\,\alpha\beta - B[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha\gamma - \\ &- (-B[Z(t)]\,Z'(t)\,\alpha\gamma + b(t)\,\gamma\delta + c(t)\,\alpha\beta - C[Z(t)]\,Z'(t)\,\beta\delta) = 0, \end{aligned}$$

из чего вытекает утверждение. Если $|K(t_0)| \neq 0$ для какого-то $t_0 \in i$, то имеет место $|K(t)| = |K(t_0)|$, т. е. $|K(t)| \neq 0$ для всех $t \in i$.

Сейчас приведем основные теоремы о связи между решениями системы (*a*) и системы (*A*) дифференциальных уравнений.

Теорема 2,1. Если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ удовлетворяют в интервале i системе (1), то $u(t)$ определенное уравнением

$$u(t) = K(t)\,U[Z(t)], \tag{2}$$

есть решение системы (*a*), определенное начальными условиями $u(t_0) = K(t_0)\,U_0$.

Доказательство: Имеем

$$\begin{aligned} u'(t) &= K'(t)\,U[Z(t)] + K(t)\,\dot{U}[Z(t)]\,Z'(t) = \\ &= K'(t)\,U[Z(t)] + K(t)\,N[Z(t)]\,U[Z(t)]\,Z'(t), \end{aligned}$$

значит в матричном виде

$$u'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) + \beta(t)\,C[Z(t)]\,Z'(t) & \beta'(t) + \alpha(t)\,B[Z(t)]\,Z'(t) \\ \gamma'(t) + \delta(t)\,C[Z(t)]\,Z'(t) & \delta'(t) + \gamma(t)\,B[Z(t)]\,Z'(t) \end{pmatrix} U[Z(t)].$$

Так как удовлетворена система (1), то имеет место

$$u'(t) = \begin{pmatrix} b(t)\,\gamma(t) & b(t)\,\delta(t) \\ c(t)\,\alpha(t) & c(t)\,\beta(t) \end{pmatrix} U[Z(t)],$$

и отсюда вытекает

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ c(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix} U[Z(t)],$$

и это есть

$u'(t) = M(t)\,K(t)\,U[Z(t)] = M(t)\,u(t)$ что означает, что $u(t)$ является решением системы (*a*).

Удовлетворение начальным условиям $u(t_0) = K(t_0)\,U_0$ очевидно из верности уравнения (2).

Замечание: Существование решения уравнения (1) вытекает из замечания следующего за леммой 3.

Теорема 2,2. Если $u(t)$ является решением системы (a) и если удовлетворяется уравнение (2), то функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ суть решения системы (1). Причем имеем в виду то решение $u(t)$, которое удовлетворяет начальным условиям $u(t_0) = K(t_0)\, U_0$.

Доказательство: Так как $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) и также системе (a), то имеет место

$$u'(t) = K'(t)\, U[Z(t)] + K(t)\, \dot{U}[Z(t)]\, Z'(t) =$$
$$= K'(t)\, U[Z(t)] + K(t)\, N[Z(t)]\, U[Z(t)]\, Z'(t),$$

и также

$$u'(t) = M(t)\, u(t) = M(t)\, K(t)\, U[Z(t)].$$

Сравнивая правые стороны получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha'(t)\, \beta'(t) \\ \gamma'(t)\, \delta'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1[Z(t)] \\ U_2[Z(t)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(t)\, \beta(t) \\ \gamma(t)\, \delta(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B[Z(t)] \\ C[Z(t)] & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1[Z(t)]\, Z'(t) \\ U_2[Z(t)]\, Z'(t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ c(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t)\, \beta(t) \\ \gamma(t)\, \delta(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1[Z(t)] \\ U_2[Z(t)] \end{pmatrix}.$$

и отсюда (коротко записано)

$$\begin{pmatrix} \alpha' U_1 + \beta' U_2 + \alpha B Z' U_2 + \beta C Z' U_1 \\ \gamma' U_1 + \delta' U_2 + \gamma B Z' U_2 + \delta C Z' U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma b U_1 + \delta b U_2 \\ \alpha c U_1 + \beta c U_2 \end{pmatrix},$$

и поэтому имеет место

$$(\alpha' + \beta C Z')\, U_1 + (\beta' + \alpha B Z')\, U_2 = \gamma b U_1 + \delta b U_2.$$
$$(\gamma' + \delta C Z')\, U_1 + (\delta' + \gamma B Z')\, U_2 = \alpha c U_1 + \beta c U_2,$$

Если к предыдущим двум уравнениям применить лемму 1, то получаем, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ должны удовлетворять системе (1). Причем $u(t)$, имея ввиду существование уравнения (2) есть как раз то решение, которое удовлетворяет начальным условиям $u(t_0) = K(t_0)\, U_0$.

Замечание: Вместо $u(t)$ можно выбрать любое решение системы (a) т. е. решение, определенное какими-то начальными условиями $u(t_0) = u_0$. Тогда при предположениях, приведенных в лемме 3, нельзя призвольно выбрать начальные условия α_0, β_0, γ_0, δ_0, но так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$u_{10} = \alpha_0 U_{10} + \beta_0 U_{20}.$$
$$u_{20} = \gamma_0 U_{10} + \delta_0 U_{20},$$

В системе (1) есть четыре уравнения и пять неизвестных функций. Как вытекает из леммы 3, можно в какой-то степени произвольно выбирать функцию

$Z(t)$ а другие четыре функции потом однозначно определены начальными условиями. Остается вопросом можно ли рассмотреть и другую специализацию.

Разберем особые случаи, когда одну из функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ приравниваем нулю.

Будем рассматривать уравнения

$$-\{Z, t\} + Q_r(Z)\, Z'^2 = q_s(t), \qquad (r, s = 1, 2), \tag{$b_{r,s}$}$$

в которых применяем обозначение

$$\{Z, t\} = \frac{1}{2}\frac{Z'''}{Z'} - \frac{3}{4}\frac{Z''^2}{Z'^2},$$

$$q_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{b''}{b} + \frac{3}{4}\frac{b'^2}{b^2} + bc, \qquad q_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{c''}{c} + \frac{3}{4}\frac{c'^2}{c^2} + bc,$$

$$Q_1(T) = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{3}{4}\frac{\dot{B}^2}{B^2} + BC, \qquad Q_2(T) = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{C}}{C} + \frac{3}{4}\frac{\dot{C}^2}{C^2} + BC.$$

Для более обозримого и сжатого формулирования следующих двух теорем обозначим числами предположения и соотношения (где M означает постоянную):

1° Функция b (C) имеет в интервале j (J) производную до второго порядка включительно и имеет место $b(t)\, C(T) > 0$ для всех $t \in j$, $T \in J$.

1°′ Положим

$$\alpha = 0, \qquad \beta = M\sqrt{\frac{b(t)}{C[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},$$

$$\gamma = M \operatorname{sgn} Z' \sqrt{\frac{C[Z(t)]}{b(t)}}\sqrt{|Z'(t)|},$$

$$\delta = \frac{M}{2b(t)}\left(\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{C}[Z(t)]\, Z'(t)}{C[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{b(t)}{C[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},$$

где $Z(t)$ есть решение дифференциального уравнения $(b_{2,1})$.

2° Функция b (B) имеет в интервале j (J) производную до второго порядка включительно и имеет место $b(t)\, B(T) > 0$ для всех $t \in j$, $T \in J$.

2°′ Положим

$$\alpha = M\sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}, \qquad \beta = 0$$

$$\gamma = \frac{M}{2b(t)}\left(\frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\,Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{b(t)}{B[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},$$

$$\delta = M \operatorname{sgn} Z' \sqrt{\frac{B[Z(t)]}{b(t)}}\sqrt{|Z'(t)|}\,,$$

где $Z(t)$ есть решение дифференциального уравнения $(b_{1,1})$.

3° Функция c (C) имеет в интервале j (J) производную до второго порядка включительно и имеет место $c(t)\,C(T) > 0$ для всех $t \in j$, $T \in J$.

3°′ Положим

$$\alpha = M \operatorname{sgn} Z' \sqrt{\frac{C[Z(t)]}{c(t)}}\sqrt{|Z'(t)|}\,,$$

$$\beta = \frac{M}{2c(t)}\left(\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\dot{C}[Z(t)]\,Z'(t)}{C[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{c(t)}{C[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},$$

$$\gamma = 0, \qquad \delta = M\sqrt{\frac{c(t)}{C[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},$$

где $Z(t)$ есть решение дифференциального уравнения $(b_{2,2})$.

4° Функция c (B) имеет в интервале j (J) производную до второго порядка включительно и имеет место $c(t)\,B(T) > 0$ для всех $t \in j$, $T \in J$.

4°′ Положим

$$\alpha = \frac{M}{2c(t)}\left(\frac{c'(t)}{c(t)} - \frac{\dot{B}[Z(t)]\,Z'(t)}{B[Z(t)]} - \frac{Z''(t)}{Z'(t)}\right)\sqrt{\frac{c(t)}{B[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}},$$

$$\beta = M \operatorname{sgn} Z' \sqrt{\frac{B[Z(t)]}{c(t)}}\sqrt{|Z'(t)|}\,,$$

$$\gamma = M\sqrt{\frac{c(t)}{B[Z(t)]}}\,\frac{1}{\sqrt{|Z'(t)|}}, \qquad \delta = 0,$$

где $Z(t)$ есть решение дифференциального уравнения $(b_{1,2})$.

Теорема 2,3. Если удовлетворено одно из четырех условий 1° и 1°′ или же 2° и 2°′ или же 3° и 3°′ или же 4° и 4°′ тогда $u(t)$ определенное уравнением (2) является решением системы (a). Причем функция $Z(t)$ определена начальными условиями

$$Z(t_0) = Z_0(= T_0), \qquad Z'(t_0) = Z_0'(\neq 0), \qquad Z''(t_0) = Z_0'', \tag{b*}$$

(где Z_0, Z_0', Z_0'', произвольные числа) и $u(t)$ определено начальными условиями $u(t_0) = K(t_0)\,U_0$.

Замечание: Эта теорема имеет четыре части в зависимости от того, которое из четырех условий имеет место, и эти части в действительности являются саиостоятельными теоремами. Вторую часть настоящей теоремы сравни с теоремой 4 [2].

Доказательство теоремы осуществляется простой подстановкой. Дело только в том, имеют ли уравнения $(b_{r,s})$ решение, удовлетворяющее всем предположениям теоремы. Для уравнения $(b_{1,1})$ существование такого решения обеспечено теоремой 7 [2], которую можно при подходящих предположениях расширить на все уравнения $(b_{r,s})$:

Если $t_0 \in j$, $Z_0 = T_0 \in J$, $Z_0'(+0)$, Z_0'' произвольные числа и если имеет место одно из условий 1°, 2°, 3° или 4°, то существует как раз одно решение соответствующего уравнения $(b_{r,s})$, определенное в интервале $i \subset j$, удовлетворяющее начальным условиям (b^*) и одновременно являющееся самым общим в том смысле, что любое другое решение рассматриваемого уравнения $(b_{r,s})$ удовлетворяющее тем же условиям является его частью.

Тем гарантировано и существование матрицы $K(t)$ элементы которой определены формулами в 1°′, 2°′, 3°′ или 4°′.

Теорема 2,4. Если удовлетворено одно из условий 1° или же 2° или же 3° или же 4° и если $u(t)$ есть решение системы (a), то функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям в 1°′ или же 2°′ или же 3°′ или же 4°′. Причем $Z(t)$ удовлетворяет начальным условиям (b^*) и мы рассматриваем то решение, которое удовлетворяет начальным условиям $u(t_0) = K(t_0)\,U_0$.

Доказательство проведем на основе теоремы 2,2 например, для предположения 2°; положим далее $\beta = 0$. Из условий доказываемой теоремы следует, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ удовлетворяют системе (1), которая имеет для $\beta = 0$ вид (записано коротко):

$$\alpha' = b\gamma, \tag{1_1}$$

$$0 = -BZ'\alpha + b\delta, \tag{1_2}$$

$$\gamma' = c\alpha - CZ'\delta, \tag{1_3}$$

$$\delta' = -BZ'\gamma. \tag{1_4}$$

Докажем, что из верности этих уравнений вытекают уравнения 2°′. Этим одновременно гарантируется и существование рассматриваемых функций.

Из (1_2) следует

$$\delta = \frac{B}{b}Z'\alpha. \tag{3}$$

Из (1_4) имеем

$$\gamma = -\frac{1}{BZ'}\left(\frac{B}{b}Z'\alpha\right)' = -\frac{1}{BZ'}\left(\frac{\dot B}{b}Z'^2\alpha + \frac{B}{b}Z''\alpha - \frac{B\dot b}{b}Z'\alpha + \frac{B}{b}Z'\alpha'\right) =$$
$$= \frac{1}{b}\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot B}{B}Z' - \frac{Z''}{Z'}\right)\alpha - \frac{1}{b}\alpha'.$$

Так как согласно (1_1) $\gamma = \alpha'/b$, то

$$\frac{1}{b}\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot{B}Z'}{B} - \frac{Z''}{Z'}\right)\alpha - \frac{1}{b}\alpha' = \frac{\alpha'}{b},$$

и отсюда

$$\frac{2\alpha'}{\alpha} = \frac{b'}{b} - \frac{\dot{B}Z'}{B} - \frac{Z''}{Z'},$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln\alpha^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{b}{B|Z'|}\right),$$

и из этого

$$\alpha = M\sqrt{\frac{b}{B}}\frac{1}{\sqrt{|Z'|}}, \tag{4}$$

где $M \neq 0$ произвольная постоянная.

Согласно (1_1)

$$\gamma = \frac{\alpha'}{b} = \frac{1}{2b}\left(\frac{b'}{b} - \frac{\dot{B}Z'}{B} - \frac{Z''}{Z'}\right)\alpha; \tag{5}$$

отсюда получаем

$$\gamma' = \frac{1}{2b}\left(-\frac{3}{2}\frac{b'^2}{b^2} + \frac{b''}{b} + \frac{3}{2}\frac{\dot{B}^2}{B^2}Z'^2 - \frac{\ddot{B}}{B}Z'^2 - \frac{Z'''}{Z'} + \frac{3}{2}\frac{Z''^2}{Z'^2}\right)\alpha \tag{6_1}$$

Согласно (1_3) также

$\gamma' = c\alpha - \delta CZ'$ и после подстановки за δ получаем

$$\gamma' = \frac{1}{2b}(2bc - 2BCZ'^2)\alpha. \tag{6_2}$$

Если подставить α из уравнения (4) в уравнение (3) и (5), то получаем вместе с уравнением (4) первые четыре уравнения из $2°'$ ($\beta = 0$) и из сравнения правых сторон уравнений (6_1) и (6_2) следует, что функция $Z(t)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению $(b_{1,1})$.

Положение теоремы о начальных условиях вытекает из теорем 2,2 и 2,3.

3. Пусть в теореме 2,1 имеет место $Z'(t) \neq 0$ для всех $t \in i$, $|K(t_0)| \neq 0$ для $t_0 \in \boldsymbol{i}$. Тогда для функции $Z(t)$ существует обратная функция $\xi(T)$, которая отображает интервал $I \subset J$ на интервал $i \subset j$ и которая имеет в I ограниченную отличную от нуля производную $\dot{\xi}(T)$, причем $Z'(t)\,\dot{\xi}(T) = 1$.

Теорема 3,1. Решение $U(T)$ системы (A), рассматриваемое в теореме 2,1, удовлетворяет в интервале I по отношению к решению $u(t)$ системы (a) обратному соотношению

$$U(T) = K^{-1}[\zeta(T)]\,u[\zeta(T)],$$

где $K^{-1}(t)$ есть матрица обратная к $K(t)$ и $\xi(T)$ есть функция обратная к $Z(t)$ Решение $U(T)$ удовлетворяет начальным условиям

$$U(T_0) = K(\zeta_0)\, u(\zeta_0) \qquad (\zeta_0 = \zeta(T_0)).$$

Доказательство: Согласно теореме 2,1 имеет место следующее: если $u(t)$ есть решение системы (a), определенное в интервале j начальными условиями $u(t_0) = u_0$, и если $\xi(T)$ есть функция, отображающая интервал $I \subset J$ на интервал $i \subset j$ и имеет ли место $\xi(T_0) = t_0 = \xi_0(t_0 \in i)$, и если функции $\bar{\alpha}(T)$, $\bar{\beta}(T)$, $\bar{\gamma}(T)$, $\bar{\delta}(T)$, $\xi(T)$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\bar{\alpha}}(T) &= \qquad\qquad -c[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T)\,\bar{\beta}(T) + B(T)\,\bar{\gamma}(T)\\
\dot{\bar{\beta}}(T) &= -b[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T)\,\bar{\alpha}(T) \qquad\qquad + B(T)\,\bar{\delta}(T)\\
\dot{\bar{\gamma}}(T) &= C(T)\,\bar{\alpha}(T) \qquad\qquad - c[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T)\,\bar{\delta}(T)\\
\dot{\bar{\delta}}(T) &= \qquad\qquad C(T)\,\bar{\beta}(T) - b[\zeta(T)]\,\dot{\zeta}(T)\,\bar{\gamma}(T)
\end{aligned}\right\} \qquad (\bar{1})$$

то $\bar{U}(T) = \bar{K}(T)\, u[\xi(T)]$, где

$$\bar{K}(T) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}(T) & \bar{\beta}(T) \\ \bar{\gamma}(T) & \bar{\delta}(T) \end{pmatrix}$$

есть решение системы (A), определенное начальными условиями $\bar{U}(T_0) = \bar{K}(T_0)u_0$.

Легко определить, что можно положить $\bar{K}(T) = K^{-1}\,[\xi(T)]$ для $T \in I$. Так как если же $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$ функции, которые вместе с $Z(t)$ удовлетворяют системе (1), и если $\xi(T)$ есть обратная функция к $Z(t)$, то функции

$$\bar{\alpha}(T) = \frac{\delta[\xi(T)]}{|K[\xi(T)]|}, \qquad \bar{\beta}(T) = \frac{-\beta[\xi(T)]}{|K[\xi(T)]|},$$

$$\bar{\gamma}(T) = \frac{-\gamma[\xi(T)]}{|K[\xi(T)]|}, \qquad \bar{\delta}(T) = \frac{\alpha[\xi(T)]}{|K[\xi(T)]|}$$

удовлетворяют системе $(\bar{1})$.

Согласно первому замечанию в абзаце 2 имеем например

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\alpha}}(T) = \frac{\delta'[\xi(T)]\,\dot{\zeta}(T)}{|K[\xi(T)]|} &= \frac{\dot{\zeta}(T)}{|K[\xi(T)]|}\left(c[\xi(T)]\,\beta[\xi(T)] - B(T)\,\frac{1}{\dot{\zeta}(T)}\,\gamma[\xi(T)]\right) = \\
&= -c[\xi(T)]\,\dot{\zeta}(T)\left(-\frac{\beta[\xi(T)]}{|K[\xi(T)]|}\right) + B(T)\left(-\frac{\gamma[\xi(T)]}{|K[\xi(T)]|}\right) = \\
&= -c[\xi(T)]\,\dot{\zeta}(T)\,\bar{\beta}(T) + B(T)\,\bar{\gamma}(T),
\end{aligned}$$

и подобным образом докажем, что удовлетворены и остальные уравнения системы $(\bar{1})$.

Далее имеет место

$$\bar{U}(T_0) = K^{-1}[\zeta(T_0)]\, u[\zeta(T_0)] = K^{-1}(t_0)\, K(t_0)\, U(Z_0) = U(T_0)$$

и следовательно действительно $\bar{U}(T) = U(T)$ в интервале J.

Замечание: Если применить теорему 3,1 к второй части теоремы 2,3, то получаем теорему 5 [2]. Подобные теоремы получили бы использованием теоремы 3,1 на остальные части теоремы 2,3.

4. Теоремы из абзаца 2 и 3 верны очевидно и в случае, если система (A) тождественна с системой (a).

Из теоремы 2,1 таким образом следует:

Теорема 4,1. Пусть $u(t)$ есть решение системы (a), определенное в интервале j начальным условиям $u(Z_0) = u_0$ $(Z_0 \in j)$, функция $Z(t)$ пусть отображает интервал $i \subset j$ на интервал $i' \subset j$ и имеет место $Z(t_0) = Z_0$ $(t_0 \in i)$.

Если функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \qquad\qquad - c[Z(t)]\, Z'(t)\beta(t) + b(t)\,\gamma(t) \\
\beta'(t) &= -b[Z(t)]\, Z'(t)\,\alpha(t) \qquad\qquad + b(t)\,\delta(t) \\
\gamma'(t) &= c(t)\,\alpha(t) \qquad\qquad - c[Z(t)]\, Z'(t)\,\delta(t) \\
\delta'(t) &= \qquad\qquad c(t)\,\beta(t) - b[Z(t)]\, Z'(t)\,\gamma(t)
\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

то

$$y(t) = K(t)\, u[Z(t)], \tag{9}$$

есть также решение системы (a), удовлетворяющее начальным условиям $y(t_0) = K(t_0)\, u_0$.

Из теоремы 2,2 вытекает:

Теорема 4,2. Пусть $u(t)$ есть решение системы (a), определенное в интервале j начальными условиями $u(Z_0) = u_0$ $(Z_0 \in j)$, функция $Z(t)$ пусть отображает интервал $i \subset j$ на интервал $i' \subset j$ и имеет место $Z(t_0) = Z_0$ $(t_0 \in i)$. Если $y(t)$ есть решение системы (a) и если удовлетворено уравнение (9), то функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(t)$, $\delta(t)$, $Z(t)$ являются решением системы (8). Причем рассматриваем то решение $y(t)$, которое удовлетворяет условию $y(t_0) = K(t_0)\, u_0$.

В абзаце 4 имеем таким образом преобразование решения системы (a) на другое решение $y(t)$ той же системы. Из уравнения (9) следует, что это преобразование линейное. Если кроме того удовлетворено еще предположение теоремы 3,1, то это преобразование регулярное, так как существует обратное.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *O. Borůvka:* Sur la transformation des intégrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Annali di matematica pura ed aplicata, Bologna 1956, IV, T. XLI.

[2] *S. Šantavá-Krohová:* Transformace integrálů systémů dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Kandidátská disertační práce, Brno 1960.

[3] *G. Sansone:* Equazioni differenziali nel campo reale I. Русское издание, Москва 1953.

Shrnutí

O TRANSFORMACÍCH ŘEŠENÍ SOUSTAV DVOU LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC 1. ŘÁDU

STANISLAV TRÁVNÍČEK

V článku se zabývám soustavami dvou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu (a), (A) ve speciálním tvaru.

Ve větách 2,1 a 2,2 studuji vzájemnou transformaci řešení $u(t)$ soustavy (a) a $U(T)$ soustavy (A), a to pomocí soustavy (1) a transformační rovnice (2). Ve větách 2,3 a 2,4 uvažuji zvláštní případy těchto obecných transformací, je-li některý z prvků matice $K(t)$ roven nule. Ukazuji, že jedním z těchto zvláštních případů je věta 4[2].

V odstavci 3 se zabývám problémem inversní transformace a ukazuji, že z těchto úvah vyplývá jako zvláštní případ věta 5[2].

V odstavci 4 je probrán případ, že soustava (A) je totožná se soustavou (a), a kdy tudíž jde o vzájemné transformace různých řešení soustavy (a).

Zusammenfassung

ÜBER DIE TRANSFORMATIONEN DER LÖSUNGEN DER SYSTEME VON ZWEI LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Im Artikel behandelt der Autor Systeme von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung (a), (A) von spezieller Form.

In den Sätzen 2,1 und 2,2 befasst er sich mit gegenseitigen Transformationen der Lösungen $u(t)$ des Systems (a) und $U(T)$ des Systems (A) unter Benutzung des Systems (1) und der Transformationsgleichung (2). In den folgenden zwei Sätzen 2,3 und 2,4 werden spezielle Fälle dieser allgemeinen Transformationen studiert, und zwar diejenigen, wo ein der Elemente der Matrix $K(t)$ gleich Null ist. Es wird gezeigt, dass der Satz 4[2] einer dieser Spezialfälle ist.

Im Absatz 3 wird das Problem der inversen Transformationen betrachtet und es wird gezeigt, dass Satz 5[2] wieder nur ein Sonderfall dieser allgemeineren Überlegungen ist.

Im vierten Absatz wird der Fall behandelt, wo beide Systeme (A), (a) identisch sind.