Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica

František Havelka

# Některé speciální případy Fresnayeovy mechanické konstrukce perspektiv

*Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica*, Vol. 2 (1961), No. 1, 67--93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/119782`

1961 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 7.

*Katedra matematiky přírodovědecké fakulty.*
*Vedoucí: Prof. Dr. Josef Metelka*

# NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ PŘÍPADY FRESNAYEOVY MECHANICKÉ KONSTRUKCE PERSPEKTIV

FRANTIŠEK HAVELKA

Předloženo dne 25. října 1960

Při studiu vývoje perspektivy se záhy setkáváme se snahami zkrátit, usnadnit a zpřesnit rýsování perspektivních obrazů pomocí různých mechanických pomůcek. V počátečním období jejího vývoje, zhruba do let 1600 n. l., kdy Quido Ubaldi del Monte (1545—1607) formuloval obecně úběžníkový zákon, byla sestrojena řada mechanismů ke kreslení perspektiv existujících předmětů. První z konstruktérů těchto přístrojů byl Leone Battista Alberti (1404—1472), nejznámější z nich byl v této době Albrecht Dürer (1471—1528). V jejich práci pokračovali četní zájemci o perspektivu tím, že obměňovali a zlepšovali první mechanické perspektivní pomůcky. Byli to zvláště Lionardo da Vinci, Wentzel Jamitzer, Ludevico Cardi da Cigoli a další, jak je uvádí ve své knize [7] profesor František Kadeřávek. Jsou známé vtipné konstrukce mechanických perspektivních pomůcek pocházejících i od umělců, mechaniků a hodinářů méně často uváděných v literatuře. Mezi ně patří např. Johann Lenker, Lucas Brunnen de Monte Sanct. Annae, Livinus Hulsius, Jobst Burgi, Benjamin Bramer, Johann Faulhaber a další, kteří se zasloužili o rozvoj mechanických perspektivních pomůcek.

Mezi těmito prvními pomůckami převládaly přístroje niťové nebo opatřené čtvercovými sítěmi. Přístroj Ludevica Cardiho a dalších konstruktérů jsou přístroje užívající světelných přímek.

V druhé polovině 17. stol. a počátkem 18. stol. byly tyto mechanismy podstatně zlepšeny např. Christophem Wrenem (1632—1723), A. L. F. Meisterem aj. V této době dosáhla perspektiva nebývalého tempa rozvoje, způsobeného vznícením zájmu matematiků, v jejichž prvních řadách stál významný matematik Ignatio Danti. Z nich je možno jmenovat zvláště Simona Stevina, Girarda Desarguesa, Brooka Taylora, J. H. Lamberta (1728—1777). Perspektivní mechanismy Lambertovy jsou nové přístroje kvalitativně odlišné od perspektivních přístrojů dřívějších. Je jimi možno kreslit perspektivy myšlených, plánovaných objektů, určených ortogonálními průměty, zvláště perspektivy obrazců incidentních se základní rovinou $\varrho$ [9].

Období rozkvětu těchto perspektivních přístrojů počíná v osmdesátých letech min. století zvláště pracemi Quido Haucka, zejména jeho aplikací trilineárního vztahu v deskriptivní geometrii. ([4], [5]) Od té doby je zájem o mechanické konstrukce perspektiv dodnes živý. Zabývají se jimi matematikové i technikové, teoretikové i praktici, jako E. Brauer [19], H. Ritter [10], A. Brix [10], P. Fiorini [10], M. Stuhler [16], B. O. Holder [15], L. Dietmann [14], J. J. Pillet [10], Ch. Ziegler [10], K. Mayer [17], M. de Arrigunaga [10], C. De La Fresnaye [6], K. Mack [18] a další.

Po Velké říjnové soc. revoluci, zvláště od r. 1923, nastává čilý ruch v konstrukci perspektivních přístrojů v SSSR. Z vedoucích pracovníků v tomto oboru je možno jmenovat M. S. Rosentala, D. G. Baryševa, G. B. Valca, M. N. Judického, G. O. Vilesova, N. L. Ruskeviče aj. [2], [11], [12] U nás se zabývá mechanickými konstrukcemi perspektiv zvláště Ing. A. Salner [12], jehož perspektograf vzbudil na strojírenských výstavách v Brně zaslouženou pozornost.

V literatuře [1], [2] je zvlášť ceněna konstrukce perspektiv uveřejněná C. De La Fresnayem v *La construction moderne* 1909 [6]. Tato konstrukce je základem jednoduchého a tedy levného, snadno ovladatelného polomechanismu k usnadnění rýsování perspektiv a zasluhuje si pozornosti i z dalších důvodů. Jednak je možno uvedený přístroj upravit a zlepšit, jednak aplikovat základ Fresnayeovy konstrukce v perspektivní afinitě, homotetii i v shodných zobrazeních. Na základě příslušných konstrukcí lze sestrojit jednoduché mechanismy ke kreslení afinních, stejnolehlých (podobných) i shodných obrazů daných rovinných útvarů. [21]. V deskriptivní geometrii je možno užít těchto mechanismů ke kreslení ortogonálních, axonometrických i kosoúhlých obrazů, dále jako pantografů a jednoduchých kopírovacích pomůcek. O tom stručně informuje tento článek předpokládající základní znalosti deskriptivní, projektivní a elementární geometrie. Nechť jsou připomenuty pojmy: *báze* $(O, \pi)$ persp. promítání, *rozšířená báze* $(O, \pi \perp \varrho)$ o základní rovinu $\varrho$ (*Dürerova soustava*), ekvivalence Dürerovy soustavy $(O, \pi \perp \varrho)$ a persp. kolineace $(O_0, z, A_1 \to A_c)$ mezi perspektivou $\varrho_c$ základní roviny $\varrho$ a sklopenou základní rovinou $\varrho_1$ kolem základnice $z \equiv \pi \,.\, \varrho$ do persp.-průmětny $\pi$ ($^1\Omega$-, resp. $^2\Omega$-*průmětem* základní roviny $\varrho$ do $\pi$) při zvoleném $\Omega$-promítání a orientaci prostoru. Jde, jak je známo, o **speciální Stevinovu větu.** Dále nechť je připomenut obecně kolineární a perspektivně kolineární vztah dvou soumístných rovinných soustav [8] a elementární geometrické transformace (afinita, homotetie, shodná zobrazení).

### 1. Fresnayeova konstrukce perpspektiv

Základem Fresnayeovy mechanické konstrukce perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou $\varrho$ Dürerovy soustavy $(O, \pi \perp \varrho)$, případně objektu stojícího na základní rovině jsou:

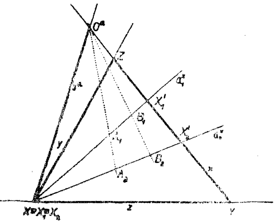
a) některé vlastnosti obecně kolineárního vztahu dvou soumístných rovinných soustav,

b) perspektivně kolineární vztah dvou soumístných rovinných soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ podle uvedené Stevinovy věty, při čemž je středem perspektivní kolineace

$^1\Omega$-průmět ($^2\Omega$-průmět) $O_0$ ($O_0'$) středu $O$ do persp. průmětny $\pi$, osou je základnice $z \equiv \pi \,.\, \varrho$.

Nechť jsou dány dvě soumístné rovinné kolineární soustavy $\varrho_1$, $\varrho_2$. Z projektivní geometrie je známo, že jsou určeny čtyřmi páry přiřazených bodů $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$, $C_1 \to C_2$, $D_1 \to D_2$, vyhovujícími známým podmínkám. Tyto soustavy mají nejvýš tři reálné nekolineární samodružné body $X$, $Y$, $Z$ (podle Volberga slabě samodružné). Strany trojúhelníka samodružných bodů jsou slabě samodružné přímky obou soumístných kolineárních soustav, ... atd.

Nechť jsou $a_1^x$, $a_2^x$ odpovídající si přímky incidentní se samodružným bodem $X$, $a_1^y$, $a_2^y$ incidentní se samodružným bodem $Y, \ldots$ (obr. 1). Platí důležitá věta:



Obr. 1.

**Věta 1, 1.** *Soustavy přiřazených bodů incidentních s přímkami* $a_1^x$, $a_2^x$; $a_1^y, a_2^y, \ldots$ *jsou perspektivní. Střed jejich perspektivity je incidentní s protilehlou stranou trojúhelníka samodružných bodů.*

**Důkaz.** Z projektivní geometrie je známo, že jsou soustavy bodů $a_1^x$ ($X_1$, $A_1$, $B_1, \ldots$), $a_2^x$ ($X_2$, $A_2$, $B_2, \ldots$) projektivní. Jelikož je jejich společný bod $X_1 \equiv X_2 \equiv X$ samodružný, jsou perspektivní. V této perspektivitě jsou si přiřazeny průsečíky $X_1' \equiv a_1^x \,.\, YZ$, $X_2' \equiv a_2^x \,.\, YZ$. Střed perspektivity $O^a$ je tedy incidentní s přímkou jimi určenou; $O^a \in X_2'X_1' \equiv YZ \equiv x$, cbd.

Této vlastnosti soumístných rovinných kolineárních soustav je možno použít při doplňování soumístných rovinných perspektivně kolineárních soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ v obrazu Dürerovy soustavy ($O$, $\pi \perp \varrho$) perspektivního promítání, jestliže zrušíme jejich perspektivnost. To je možno provést trojím způsobem podle toho, jde-li o zachování samodružnosti středu $O_0$ nebo osy $z$, nebo není-li kladen tento požadavek. Stane se to:

a) *otočením* jedné z obou kolineárních soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ kolem středu $O_0$ dané persp. kolineace o libovolný úhel $\gamma \neq 0°$, $180°$,

b) *posunutím* jedné ze soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ o nenulový vektor kolineární s osou $z$ dané persp. kolineace,

c) *libovolným přemístěním* soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$.

V prvním případě se každá slabě samodružná přímka $a_1 \equiv a_c \in O_0$ rozpadne v dvojici $a_1'$, $a_c$, resp. $a_1$, $a_c'$, při čemž střed $O_0 \equiv O_1 \equiv O_2$ persp. kolineace pozbude své silné samodružnosti a přejde v bod slabě samodružný $O_0 \equiv X$ nového obecně kolineárního vztahu soumístných soustav $\varrho_1'$, $\varrho_c$, resp. $\varrho_1$, $\varrho_c'$. Osa $z$ se rozpadne v dvojici přímek $z_1'$, $z_c$, resp. $z_1$, $z_c'$ a pozbude vůbec své samodružnosti.

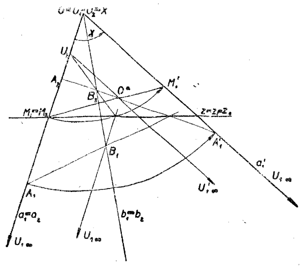
V druhém případě se každá slabě samodružná přímka $a_1 \equiv a_c$ rozpadne v dvojici $a_1' \parallel a_c$, resp. $a_1 \parallel a_c'$, střed $O_0$ pozbude své samodružnosti, zatím co osa $z \equiv z_1 \equiv z_c$ pozbude jen své silné samodružnosti.

V třetím případě se zruší samodružnost středu $O_0$ i osy $z$ dané persp. kolineace. Samodružné prvky nového vztahu se stanou neznámými a v případě potřeby je sestrojíme konstrukcí známou z projektivní geometrie.

Třetí přemístění není výhodné pro doplňování daných persp. kolineárních soustav. První přemístění, kterého používá Fresnaye ve své práci [6], bude východiskem dalších našich úvah. Druhého přemístění je použito v [21]. Jsou známy jeho důsledky pro doplňování persp. kolineárních soustav a pro konstrukci perspektivních mechanismů.

Budeme se zabývat přemístěním *C. De La Fresnaye*. Zavedeme definici:

**Definice 1, 1.** (*rozštěpení persp. kolineace, Dürerovy soustavy*)



Obr. 2.

*Jestliže otočíme jednu z rovinných soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ vázaných persp. kolineací o středu $O_0$ a ose $z$* (zpravidla v kladném smyslu) *kolem středu $O_0$ o libovolný úhel $\gamma \neq 0°$, 180° do polohy $\varrho_1'$, resp. $\varrho_c'$, říkáme, že rozštěpíme danou persp. kolineaci otočením soustavy $\varrho_1$, resp. $\varrho_c$. Mluvíme pak o rozštěpení persp. kolineace otočením $\gamma$.*

O určení tohoto rozštěpení persp. kolineace platí věta:

**Věta 1, 2.** *Rozštěpení dané persp. kolineace je určeno rozštěpením její samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ ve dvojici $a_1'$, $a_c$, resp. $a_1$, $a_c'$* (Obr. 2).

**Důkaz** správnosti věty je zřejmý. Vyslovíme další definici.

**Definice 1,2.** (*dvojice odpovídajících si přímek po rozštěpení persp. kolineace*) *Přímky $a_1'$, $a_c$, resp. $a_1$, $a_c'$, které obdržíme rozštěpením slabě samodružné přímky uvedeným otočením, se nazývá dvojice odpovídajících si přímek po rozštěpení persp. kolineace otočením $\gamma$.*

Tato dvojice přímek $a_1', a_c$, resp. $a_1$, $a_c' \in O_0 \equiv X$ je obdobná dvojici přímek $a_1^x$, $a_2^x$ obecně kolineárního vztahu soumístných rovinných soustav uvedených ve větě 1,1.

Učiníme úmluvu, že budeme nadále štěpit persp. kolineaci jen otočením soustavy $\varrho_1$ do polohy $\varrho_1'$.

Můžeme vyslovit další větu.

**Věta 1, 3.** *Bodové soustavy $a_1'$, $a_c$ incidentní s dvojicí přiřazených přímek po rozštěpení persp. kolineace otočením $\gamma$ jsou perspektivní.*

**Důkaz** správnosti věty je zřejmý. Věta 1, 3. je přímý důsledek věty 1, 1.

Na základě uvedených vět a definic můžeme řešit následující úlohu:

**Úloha 1, 1.** *Je sestrojit střed perspektivity $O^a$ obou bodových soustav incidentních s dvojicí $a_1'$, $a_c$ přiřazených si přímek po rozštěpením dané persp. kolineace otočením $\gamma$.*

**Rozbor.** Nechť je persp. kolineace ($O_0$, $z$, $A_1 \to A_c$) dána středem $O_0 \equiv X$, osou $z$ a párem přiřazených bodů $A_1 \to A_c$ slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$. Při otočení soustavy $a_1$ do polohy $a_1'$ přejde bod $A_1$ do polohy $A_1'$, samodružný bod $M_1 \equiv M_c$ slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ se rozštěpí ve dvojici $M_1'$, $M_c$, pro kterou platí: $O_0M_1 = O_0M_1'$. Tím jsou dány dvě dvojice $A_1' \to A_c$, $M_1' \to M_c$ přiřazených si bodů v perspektivitě soustav $a_1'$, $a_c$ a střed perspektivity $O^a$ je určen.

**Sestrojení.** 1. Sestrojíme $a_1'$ ; $\sphericalangle\, a_c\, O_0\, a_1' = \gamma$ .
2. Sestrojíme body $A_1'$, $M_1'$ .
3. Sestrojíme $O^a \equiv A_1'A_c \,.\, M_1'M_c$ .

Při konstrukci středu $O^a$ je možno užít dvojice $U_{1\infty} \in a_1$, $U_c \in a_c$, která přejde rozštěpením v dvojici $U_{1\infty}'$, $U_c$ : $O^a \in U_cU_{1\infty}'$. (Obr. 2)

Z řešení této úlohy vyplývá zdůvodnění podmínky pro úhel otočení $\gamma \neq 0°$, 180°.

Pro doplňování persp. kolineárních soustav podle Fresnaye má značný význam přímka určená středem $O_0$ a středem perspektivity $O^a$ obou perspektivních bodových soustav $a_1'$, $a_c$.

**Definice 1, 3.** (*přímky perspektivity*)

*Přímka určená středem $O_0$ persp. kolineace a středem perspektivity $O^a$ se nazývá přímka perspektivity $o^a$ přináležící slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, resp. dvojici $a_1'$, $a_c$.* (Obr. 2)

Podle věty 1, 3. a definice 1, 3. je každé dvojici odpovídajících si přímek $a_1'$, $a_c$ po rozštěpení persp. kolineace přiřazen určitý bod, střed perspektivity $O^a$ a určitá přímka, přímka perspektivity $o^a$. Přímky svazku o středu $O_0 \equiv X$ se tak seskupují v trojice $a_1'$, $a_c$, $o^a$; $b_1'$, $b_c$, $o^b$; . . . O nich platí následující důležitá věta:

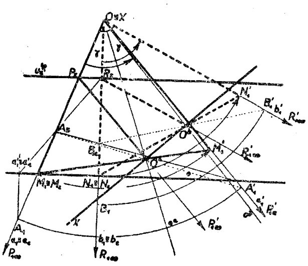
**Věta 1, 4.** *Trojice přímek $a_1'$, $a_c$, $o^a$; $b_1'$, $b_c$, $o^b$; . . . jsou shodné.*

**Důkaz elementární** (obr. 3) [21] je jen naznačen. Rozštěpme dvě slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$, $b_1 \equiv b_c$ dané persp. kolineace. Ze vztahů:

$$\begin{array}{ll}
\triangle\, O_0M_1'M_c \sim \triangle\, O_0N_1'N_c & \\
\triangle\, O_0M_1'M_c \sim \triangle\, P_cO^aM_c & \\
\triangle\, O_0N_1'N_c \sim \triangle\, R_cO^bN_c & \text{vyplývá} \\
\triangle\, M_cO^aO_0 \sim \triangle\, N_cO^bO_0 & \text{a tedy} \\
\sphericalangle\, M_cO_0O^a = \sphericalangle\, N_cO_0O^b , &
\end{array}$$

což dokazuje správnost věty.

Tuto správnost je možno dokázat i prostředky projektivní geometrie, a to na základě pojmu dvojpoměru a vlastnosti isotropické přímky, která tvoří s reálnými přímkami svazku, do kterého náleží, úhly konstantní velikosti.



Obr. 3.

Rozštěpením dané persp. kolineace obou soumístných rovinných soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ jsme obdrželi obecný kolineární vztah soumístných rovinných soustav $\varrho_1'$, $\varrho_c$. Střed $O_0$ persp. kolineace je jedním z tří slabě samodružných bodů $O_0 \equiv X$ této obecné kolineace. Platí následující dvě věty, jejichž správnost lze dokázat pomocí právě získaných výsledků a pomocí poznatků projektivní geometrie.

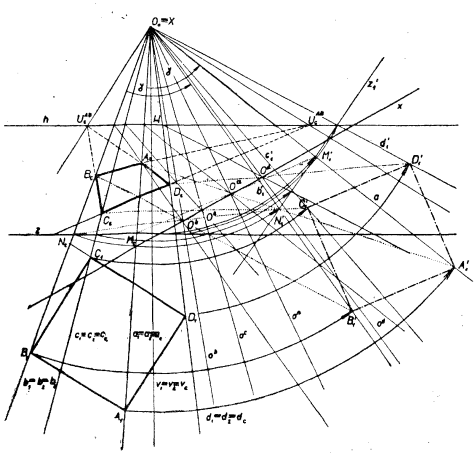
**Věta 1, 5.** *Geometrické místo středů perspektivity $O^a$, $O^b$, . . . , přináležících slabě samodružným přímkám $a_1 \equiv a_c$, $b_1 \equiv b_c$, . . . je samodružná přímka x proti-*

*lehlá k slabě samodružnému bodu $O_0 \equiv X$ kolineace obou soumístných rovinných soustav $\varrho_1'$, $\varrho_c$.*

**Věta 1, 6.** *Ostatní dva samodružné body $Y$, $Z$ incidentní se samodružnou přímkou $x$ jsou sdružené imaginární.*

Tím je připraveno vše k sestrojení perspektivy obrazce incidentního se základní rovinou Dürerovy soustavy rozštěpením jejího obrazu, perspektivní kolineace ($O_0$, $z$, $A_1 \to A_c$), resp. ($O_0$, $z$, $h$), kde $h$ je horizont soustavy.

**Úloha 1, 2.** *Je sestrojit perspektivu čtverce $ABCD$ incidentního se základní rovinou Dürerovy soustavy dané jejím obrazem ($O_0$, $z$, $h$).*




Obr. 4.

**Rozbor.** Nechť je ${}^1\Omega$-průmět daného čtverce $A_1B_1C_1D_1$ určen body $A_1$, $B_1$, perspektiva jeho nechť je $A_cB_cC_cD_c$. Perspektivnost obou soustav $\varrho_1$, $\varrho_c$ zrušíme otočením soustavy $\varrho_1$ do polohy $\varrho_1'$. Čtverec $A_1B_1C_1D_1$ zaujme polohu $A_1'B_1'C_1'D_1'$, slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$, $b \equiv b_c$ se rozpadnou v dvojice $a_1'$, $a_c$; $b_1'$, $b_c$. Jejich samodružné body $M_1 \equiv M_c$, $N_1 \equiv N_c$ se rozpadnou v dvojice $M_1'$, $M_c$; $N_1'$, $N_c$, a dvojice bodů $A_1$, $A_c$; $B_1$, $B_c$ přejdou v dvojice $A_1'$, $A_c$; $B_1'$, $B_c$. $O^a$, $O^b$ jsou příslušné středy perspektivity, $o^a$, $o^b$ přímky perspektivity. Čtverec $A_1'B_1'C_1'D_1'$ je v obecně kolineárním vztahu s pespektivou $A_cB_cC_cD_c$. Silně samodružný bod $O_0$ se stane slabě samodružným bodem nového vztahu, přímka $x \equiv O^aO^b$ je slabě samodružnou přímkou protilehlou k samodružnému bodu $O_0 \equiv X$. Je možno aplikovat věty 1, 3. a 1, 4. (Obr. 4).

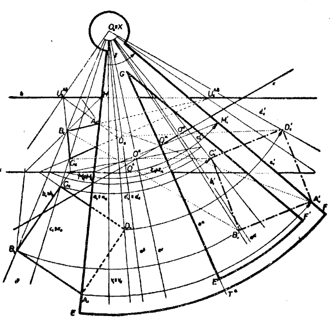
Sestrojení. 1. Rozštěpíme danou persp. kolineaci.
2. Sestrojíme středy $O^a, O^b$, přímky $o^a$, $o^b$ a samodružnou přímku $x$.
3. Sestrojíme čtverec $A_1'B_1'C_1'D_1'$.

Při konstrukci perspektivy $C_c$ bodu $C$ sestrojíme:

4. přímku $c_1' \equiv O_0C_1'$ ,
5. přímku $c_c$ a $o^c$ : $\sphericalangle C_1'O_0C_c = \sphericalangle a_1'O_0a_c$, $\sphericalangle c_1'O_0o^c = \sphericalangle a_1'O_0o^a$,
6. střed perspektivity $O^c \equiv o^c . x$ .
7. Bod $C_c \equiv c_c . C_1'O^c$ řeší úkol.

Uvedená konstrukce je teoretickým základem jednoduchého mechanismu k usnadnění rýsování perspektiv obrazců incidentních se základní rovinou Dürerovy soustavy. K určení perspektivy daného bodu stačí narýsovat tři přímky: dvě podél hran přístroje, jednu určenou dvěma body.

Přístroj pozůstává z pravítka o třech hranách $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$, $b^a$, které procházejí týmž bodem $O_0$, a z dalších vedlejších součástí, sloužících např. k upevnění pravítka v středu persp. kolineace apod. (Obr. 5) Hrany $a_c$, $a_1'$ svírají úhel rozštěpení dané persp. kolineace. Dále je pravítko omezeno kruhovou hranou $EF$ a zpevněno v středu $O_0 \equiv X$.



Obr. 5.

Pravítko je možno zhotovit z *lepenky* (*kovu*) nebo z *celuloidu*. V prvním případě je nutno vyříznout část pravítka tvaru kruhové výseče $GE'F'$, jejíž hrana $GE'$ představuje přímku perspektivity $o^a \equiv O_0O^a$. Protože poloha této přímky vzhledem k hranám $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$ závisí na distanci a výšce oka, jak se dá přesně zdůvodnit, je nutno pro různé velikosti distance a výšky oka buď užít různých pravítek, nebo zpevnit hranu $EF$ k označení přímky perspektivity $o^a$. Jisté výhody má pravítko celuloidové, Nicholsonovo pravítko, upravené k rýsování perspektiv podle Fresnaye, nebo jiné úpravy pravítka.

Nechť je dána Dürerova soustava $(O, \pi \perp \varrho)$ perspektivního promítání svým obrazem $(O_0, z, h)$ a nechť je dán čtverec $ABCD \in \varrho$ $\Omega$-průmětem $A_1$, $B_1$ dvou svých vrcholů $A$, $B$. Při konstrukci perspektivy $A_cB_cC_cD_c$ daného čtverce si počínáme takto:

1. Za předpokladu, že je pravítko uzpůsobeno pro danou Dürerovu soustavu, upevníme pravítko, aby jím bylo možno otáčet kolem bodu $O_0 \equiv X$.

2. Otočíme jím tak, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ byla incidentní s bodem $A_1$ a narýsujeme rayony podél hran $a_1 \equiv a_c, a_1'$. Pomocí kružítka vyznačíme body $A_1'$, $M_1'$ $(A_1', M_1' \in a_1', O_0A_1 = O_0A_1', O_0M_1 = O_0M_1')$. Totéž učiníme pro bod $B_1$ a získáme body $B_1'$, $N_1'$.

3. Pomocí těchto bodů $M_c(\equiv M_1) \to M_1'$ a hrany $o^a$ pravítka sestrojíme středy perspektivity $O^a$, $O^b$, které určují samodružnou přímku $x \equiv O^aO^b$ protilehlou k samodružnému bodu $O_o \equiv X$.

4. Narýsujeme otočený obrazec $A_1'B_1'C_1'D_1'$.

5. Jde-li např. o sestrojení perspektivy $C_c$ bodu $C$, otočíme pravítkem, až jeho hrana $a_1'$ se stane incidentní s vrcholem $C_1'$ a narýsujeme rayony podél hran $a_1 \equiv a_c$, $o^a$ pravítka (přímky $c_1 \equiv c_c$, $o^c$).

6. Odsuneme pravítko, vytkneme průsečík $O^c \equiv o^c \,.\, x$ a narýsujeme přímku $C_1'O^c$. Perspektiva $C_c$ bodu $C$ pak je: $C_c \equiv C_1'O^c \,.\, (c_1 \equiv c_c)$.

Je třeba poznamenat, že lze dát pravítku na základě dalších zkoumání různé tvary a podstatně je zdokonalit.

## 2. Paralelní promítání v Dürerově soustavě

Při perspektivním zobrazení základní roviny $\varrho$ do perspektivní průmětny $\pi$ se zavádí pojem nevlastních prvků (bodů, přímek, roviny). Důvod toho je všeobecně znám. Přitom považujeme zavedené nevlastní prvky za rovnocenné s prvky vlastními, ačkoli nemají tytéž vlastnosti.

Je tedy otázka, týkající se Dürerovy soustavy této vlastnosti:

a) její střed je nevlastní bod $O_\infty$,

b) její základnice je nevlastní přímka $z_\infty$ a důsledků této vlastnosti pro rýsování perspektiv podle Fresnaye, případně pro mechanické způsoby rýsování těchto perspektiv.

Uvažujme případ a), v němž jde zřejmě o rovnoběžné promítání základní roviny $\varrho$ do persp. průmětny $\pi$. Soustavu $(O_\infty, \pi \perp \varrho)$ budeme nazývat Dürerovou soustavou (**D.**-soustavou) rovnoběžného promítání. Jsou tyto možnosti:

1. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod hlavní promítací přímky $O_\infty H \perp \pi$.
2. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod rovnoběžky se základní rovinou, nikoli bod hlavní promítací přímky.
3. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod kolmice $O_1O_\infty$ k základní rovině $\varrho$.
4. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod rovnoběžky s persp. průmětnou, nikoli kolmé k základnici $z$.
5. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod kolmice k základnici $z$, incidentní s rovinou souměrnosti ${}^1\omega$, resp. ${}^2\omega$.
6. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod kolmice k základnici, nikoli však k rovinám $\pi$, $\varrho$ a nikoli rovnoběžné s rovinou ${}^1\omega$ nebo ${}^2\omega$.
7. Střed $O_\infty$ je nevlastní bod přímky nikoli kolmé k základnici $z$.

Lze snadno ukázat, že první čtyři případy vedou k rozpadlým zobrazením a nemají praktického významu.

5. V pátém případě Dürerovy soustavy rovnoběžného promítání platí následující věta:

**Věta 2, 1.** *Obě perspektivní promítání a obě $\Omega$- promítání můžeme sdružovat po dvou čtyřmi způsoby. Dva z nich vedou k identickému zobrazení a dva k osové pravoúhlé souměrnosti.*

**Důkaz** správnosti věty je prostý. Na obr. 6, 7 je sdruženo jedno perspektivní promítání s oběma $\Omega$-projekcemi.

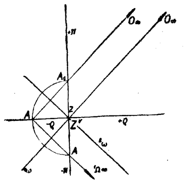
Vyloučíme-li zatím identická zobrazení, můžeme říci:

**Věta 2, 2.** *Dürerova soustava rovnoběžného promítání v případě* 5. *se zobrazuje ortogonální osovou souměrností o ose souměrnosti v základnici $z$.*

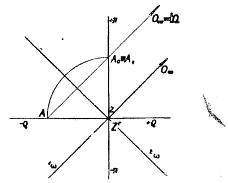
**Důkaz** správnosti je na základě správnosti věty předešlé zřejmý.

Lze dokázat, že **D.**-soustava 5 je ekvivalentní s ortogonální osovou souměrností podle základnice $z$.

Nechť je dána **D.**-soustava 5 svým obrazem ($z$, $A_1 \rightarrow A_c$) tj. osou $z$ a párem přiřazených bodů $A_1 \rightarrow A_c$, při čemž je $O_{0\infty} \in A_1A_c \equiv a_1 \equiv a_c$, $A_1A_c \perp z$, $M_1 \equiv M_c \equiv A_1A_c \,.\, z$, $A_1M_1 = A_cM_c$ (obr. 8).



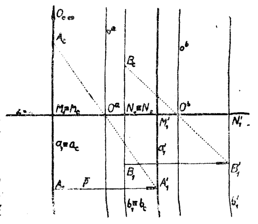
Obr. 6.



Obr. 7.

Je patrné, že obraz **D.**-soustavy 5 je obdoba obrazu **D.**-soustavy středového promítání dříve uvažovaného. Proto můžeme i zde definovat pojmy zavedené v §1, jako je pojem slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$, pojem rozštěpení ortogonální osové souměrnosti, atd . . . Je možno ukázat, že platí věty obdobné větám předešlého paragrafu.

Uvažujme předně rozštěpení ortogonální osové souměrnosti otočením soustavy základní roviny $\varrho_1$ kolem středu $O_{0\infty}$ o libovolný úhel $\gamma$. Z elementární geometrie je známo, že toto otočení přejde v posunutí soustavy $\varrho_1$ směrem základnice $z$ např. o vektor $\bar{p}$ do polohy $\varrho_1'$. Konkrétně přejde přímka $a_1$ slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$ do polohy $a_1'$ (obr. 8). Přitom zaujmou body $A_1$, $M_1 \in a_1$ polohu $A_1'$, $M_1' \in a_1'$. Platí následující věta:



Obr. 8.

**Věta 2, 3.** *Soustavy bodů $a_1'(A_1', M_1', \ldots)$, $a_c\,(A_c, M_c, \ldots)$ jsou perspektivní. Střed jejich perspektivity $O^a \equiv A_1'A_c \,.\, M_1'M_c$ je incidentní se základnicí $z$ a je středem jejího úseku $M_1'M_c$. Přímka perspektivity $o^a$ náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ je kolmá k základnici $z$. Samodružná přímka $x$ protilehlá k samodružnému bodu $O_{0\infty} \equiv X$ splývá se základnicí $z$* (obr. 8).

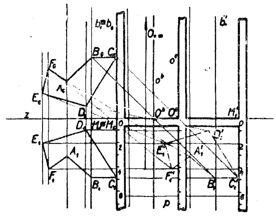
**Důkaz** správnosti věty je na základě podobnosti trojúhelníků v obr. 8 zcela jednoduchý.

Po rozštěpení osové souměrnosti se přímky $a_c$, $a_1'$, $o^a$; $b_c$, $b_1'$, $o^b$; . . . seskupují v trojice, o nichž platí věta obdobná větě 1, 4.

**Věta 2, 4.** *Trojice přímek $a_c$, $a_1'$, $o^a$; $b_c$, $b_1'$, $o^b$; . . . jsou shodné.*

**Důkaz** správnosti věty je jednoduchý (obr. 8).

Na základě těchto poznatků můžeme sestrojit v **D**.-soustavě 5 dané jejím obrazem ($z$, $A_1 \to A_c$) perspektivitu $A_cB_cC_c \dots$ obrazce $ABC \dots \in \varrho$, jehož ${}^1\Omega$-průmět je $A_1B_1C_1 \dots$ Posuneme ${}^1\Omega$-průmět o libovolný vektor $\bar{p}$ kolineární s osou $z$ do polohy $A_1'B_1'C_1' \dots$ a užijeme vět 2, 3.; 2, 4. Sestrojení je zřejmé (obr. 9). Přitom můžeme s výhodou použít tříramenného pravítka, znázorněného v obr. 9. Skládá se z opěrného pravítka $P$ a tří pravítek kolmých k pravítku $P$ a pevně k němu přimontovaných. Tato pravítka zastupují přímky $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$, $o^a$. Místo pravítka $o^a$ je možno upevnit na pravítku $P$ index $O^a$, zastupující střed perspektivity $O^a$. Při konstrukci perspektivy $A_cB_cC_c \dots$ obrazce $ABC \dots$ je přístroj opřen pravítkem $P$ o příložník, zastupující osu $z$, a posouvá se po něm. Zacházení s mechanismem při kreslení perspektivy je zřejmé.

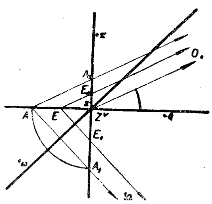


Obr. 9.

Pravítko je *pravoúhlý symetrograf.* Jeho praktický význam není velký. Jeho teoretický základ je zajímavý proto, že je speciálním případem Fresnayovy konstrukce perspektiv.

Právě tak lze uvažovat o druhém obrazu **D**.-soustavy 5, o identitě. Na jejím rozštěpení, určení středu perspektivity $O^a, \dots$ atd. lze ukázat, jak je konstrukce obrazců shodných s obrazci danými zvláštním případem uvedené Fresnayovy konstrukce perspektiv. Prosím čtenáře, aby provedl konstrukci sám.

6. Nechť je dána **D**.-soustava 6 (obr. 10). Aplikujeme-li na základní rovinu $\varrho$ $\Omega$-promítání, pak platí následující věta:



Obr. 10.

**Věta 2, 5.** *Perspektivní průmět základní roviny $\varrho$ a její $\Omega$-průmět jsou ve vztahu perspektivní ortogonální afinity, jejíž osa je základnice $z$.* **D**.*-soustava 6 je ekvivalentní s touto persp. ortogonální afinitou. Je-li dán střed $O_\infty$, jak ukazuje obr.* 10, *a je-li aplikováno ${}^1\Omega$-promítání, jde o persp. afinitu charakteristiky záporné, při aplikaci ${}^2\Omega$-promítání o afinitu charakteristiky kladné.*

**Důkaz** správnosti věty pozůstává v uvážení základních poznatků stereometrie a definice persp. ortogonální afinity.

Při srovnání **D**.-soustavy 5 a **D**.-soustavy 6 je možno konstatovat, že se obě liší jen charakteristikou $q$. U první soustavy je $q = 1, -1$, u druhé je $q \neq 1, -1, 0$. Proto i u **D**.-soustavy 6 je možno zavést pojmy a vyslovit věty uvedené v teorii Fresnayovy konstrukce perspektiv, jmenovitě pojem rozštěpení persp. afiinty, středu perspektivity $O^a, \dots$ atd. Platí věta obdobná větě 2, 3.

**Věta 2, 6.** *Střed perspektivity $O^a$ náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ po rozštěpení dané ortog. afinity známým posunutím je incidentní se základnicí $z$. Přímka perspektivity $o^a$ příslušná jmenované přímce $a_1 \equiv a_c$ je s touto přímkou* *rovnoběžní a dělí vzdálenost přímek $a_c$, $a_1'$ v poměru charakteristiky $q$ dané afinity. Samodružní přímka $x$, protilehlá k samodružnému bodu $O_{0\infty} \equiv X$, splývá se základnicí $z$.*

**Důkaz** správnosti věty je obdobný důkazu věty 2, 3. Nechť jej čtenář provede sám.

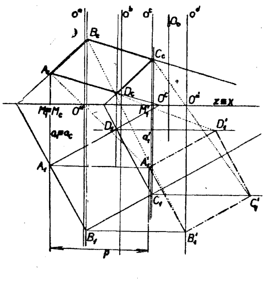
Právě tak platí důležitá věta o shodnosti trojic rovnoběžných přímek $a_c$, $a_1'$, $o^a$; $b_c$, $b_1'$, $o^b$; . . . uvedená v případě persp. kolineace a osové ortog. souměrnosti. Důkaz správnosti věty nechť provede čtenář.

Na základě těchto poznatků lze řešit následující úlohu:

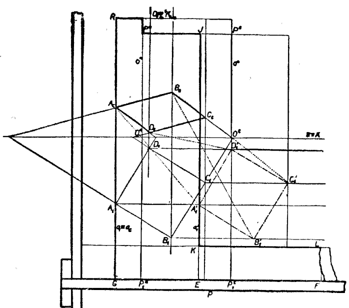
**Úloha 2, 2.** V **D**-*soustavě 6, určené svým obrazem ( $z$, $A_1 \to A_c$), je sestrojit perspektivu obrazce $ABC$ . . . $\epsilon$ $\varrho$ daného ${}^1\Omega$-průmětem $A_1B_1C_1$. . . (půdorysem).*

**Rozbor** nechť provede čtenář.

**Sestrojení.** 1. Určíme střed perspektivity $O^a$ a přímku perspektivity $o^a$ náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při posunutí $\vec{p}$ soustavy $a_1 . O^a \equiv A_cA_1'$ . . $M_cM_1'$ ($\equiv z$), $o^a \equiv O_{0\infty}O^a$.



Obr. 11.



Obr. 12.

2. Narýsujeme přímku $c_1 \equiv c_c \in C_1$ kolmou k základnici $z$.

3. Posuneme průmět $A_1B_1C_1$ . . . o vektor $\vec{p}$ do polohy $A_1'B_1'C_1'$ . . ., zejména bod $C_1$ do polohy $C_1'$.

4. Sestrojíme přímku $c_1' \in C_1'$ a $o^c$, aby trojice $a_c$, $a_1'$, $o^a$; $c_c$, $c_1'$, $o^c$ byly shodné a vytkneme střed perspektivity $O^c \equiv x . o^c$.

5. Přímka $C_1'O^c$ určuje na přímce $c_1 \equiv c_c$ perspektivu $C_c$ bodu $C$ (obr. 11).

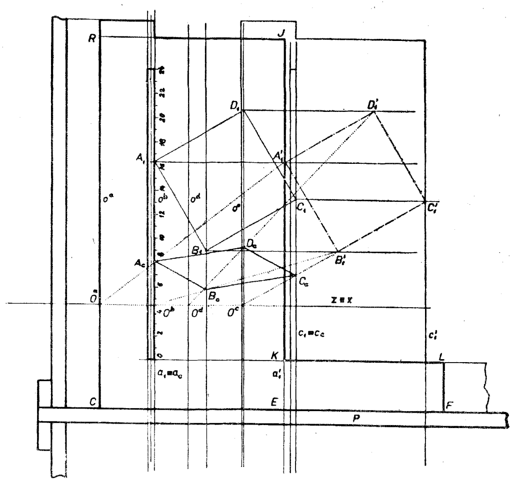
Tuto konstrukci lze snadno mechanisovat afinními pravítky (afinografy) různých tvarů. Jsou to např.

a) *lepenkové nebo celuloidové afinní pravítko* pro případ, že přímka perspektivity $o^a$ náleží rovinnému pásu určenému přímkami $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$ (obr. 12 při aplikaci ${}^1\Omega$-projekce).

b) Totéž pravítko pro případ, že přímka perspektivity $o^a$ náleží vnějšku tohoto pásu (obr. 13 při aplikaci ${}^2\Omega$-projekce).

c) *Tyčové afinní pravítko* s posuvným indexem $O^a$ po jeho opěrné části (obr. 14).

První z pravítek (obr. 12) je nejjednodušší mechanická pomůcka k rýsování rovnoběžných projekcí obrazců incidentních se základní rovinou **D**.-soustavy 6. Je složeno ze dvou pravítek tvaru obdélníka, *EFLK*, *EJRG* pevně spojených v celek. Z nich první je pravítko opěrné, spočívající hranou *EF* na příložném




Obr. 13.

pravítku *P*, jehož hrana je rovnoběžná se základnicí $z$. Hlavní část je pravítko *EJRG*, jehož hrany $a_1 \equiv a_c, a_1' \in O_{0\infty}$ zastupují slabě samodružnou přímku téhož označení po jejím rozštěpení. Na této části pravítka je naznačena přímka perspektivity $o^a$ rovnoběžná s hranami $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$ a incidentní se středem perspektivity $O^a$ náležejícím slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ a získaným známým způsobem.

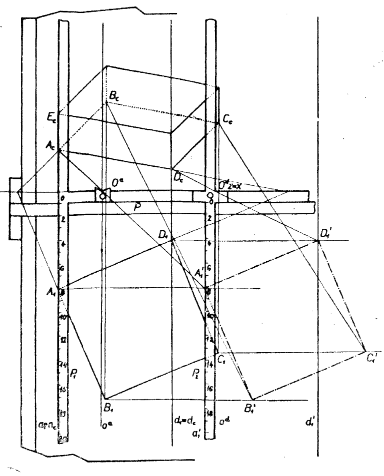
Zacházení s pravítkem je snadno pochopitelné. Na obr. 12 je pravítko v poloze určující perspektivu $A_c$ bodu $A$.

7. Nechť je dána **D**.-soustava 7. Je znázorněna v obr. 15ab v pohledu rovnoběžném se základnicí $z$ a v pohledu kolmém k perspektivní průmětně $\pi$. Jde zřejmě o kosoúhlé promítání základní roviny $\varrho$ do perspektivní průmětny $\pi$. Z nauky o tomto zobrazení je znám pojem Mongeovy projekce přidružené kosoúhlému promítání [13]. Půdorys objektu incidentního se základní rovinou $\varrho$

v této Mongeově projekci je jeho $\Omega$-průmět do persp. průmětny $\pi$, což lze snadno dokázat.

V teorii konstrukcí perspektiv v **D.**-soustavě 7 rovnoběžného promítání je výhodné určit tyto průměty:

a) Mongeovy průměty $s_1^1, s_2^1; s_1^2, s_2^2$ směru perspektivního promítání při aplikaci obou $\Omega$- promítání (obr. 16).



Obr. 14.

b) Perspektivní průměty $p_c$, $p_{1c}$; $q_c$, $q_{1c}$ směru $^1\Omega$-promítání (obr. 17) i $^2\Omega$-promítání (obr. 18). Pomocí těchto průmětů je možno sestrojit několika způsoby perspektivu obrazce incidentního se základní rovinou, daného jeho $\Omega$-projekcí. Platí tyto věty:

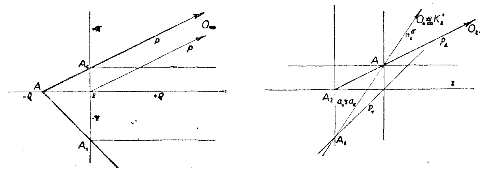
**Věta 2, 7.** *Slabě samodružné přímky uvažovaného persp. zobrazení tvoří soustavu rovnoběžných přímek určenou přímkou* $a_1 \equiv a_c \equiv A_1A_c$.

**Důkaz** správnosti věty vyplývá z definice samodružné přímky jako té přímky persp. průmětny, s níž splývá perspektivní průmět i $\Omega$-průmět určité přímky základní roviny $\varrho$.

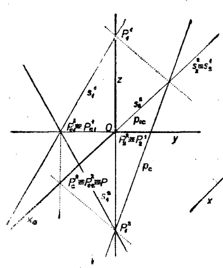
**Věta 2, 8.** *Perspektiva obrazce incidentního se zákl. rovinou* $\varrho$ **D.**-*soustavy 7 je v klinogonálně afinním vztahu s $\Omega$- průmětem obrazce do průmětny $\pi$ pro základnici z jako osu afinity. Slabě samodružné přímky této afinity jsou perspektivní průměty promítacích přímek příslušné $\Omega$-projekce. Tj. aplikujeme-li $^1\Omega$- promítání na základní rovinu $\varrho$, je perspektiva $^1\Omega$- promítací přímky bodu $A \in \varrho$ slabě samo-*

*družnou přímkou incidentní s ${}^1\Omega$-průmětem $A_1$ bodu $A$ a s perspektivou $A_c$ tohoto bodu. Podobně je tomu při aplikaci ${}^2\Omega$- promítání.*

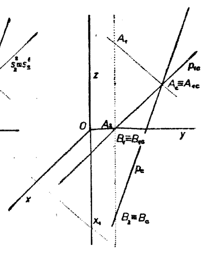
**Důkaz** správnosti první části věty vyplývá z konstrukce perspektivy obrazce incidentního se zákl. rovinou $\varrho$ a z vlastností základnice $z$. Správnost druhé části věty plyne z konstrukce persp. průmětů $p_c, p_{1c}, q_c, q_{1c}$.



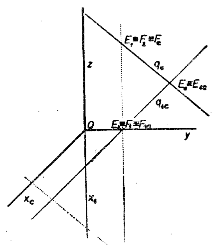
Obr. 15ab.



Obr. 16.



Obr. 17.



Obr. 18.

Z nauky o persp. kosoúhlé afinitě je známa řada pojmů a vlastností této afinity, např. pojem charakteristiky, podobnost soumístných bodových soustav na přímkách $a_1 \equiv a_c, \ldots$ atd. Další pojmy je možno zavést, např. pojem rozštěpení persp. kosoúhlé afinity, pojem středu a přímky perspektivity náležející slabě samodružné přímce, ... atd., jak tomu bylo dříve. Platí věty obdobné větám 1, 3.; 2, 3, resp. 1, 4.; 2, 4.

**Věta 2, 9.** *Posuneme-li soustavu bodů $a_1$ o vektor $\bar{p}$ do polohy $a_1'$, jsou bodové soustavy $a_c$, $a_1'$ perspektivní. Střed perspektivity $O^a$ je incidentní se základnicí $z$.*

**Důkaz** správnosti je obdobný důkazu vět 1,3.; 2,3.

**Věta 2, 10.** *Trojice přímek $a_1 \equiv a_c, a_1', o^a$; $b_1 \equiv b_c, b_1', o^b; \ldots$ (trojice bodů $S^a, S^{a'}, O^a$; $S^b, S^{b'}, O^b; \ldots$) jsou shodné. $S^a = (a_1 \equiv a_c) \,.\, z$, $S^b \equiv (b_1 \equiv b_c) \,.\, z$, $S^{a'} = a_1' \,.\, z$, $S^{b'} \equiv b_1' \,.\, z$.*

**Důkaz** správnosti je elementární (obr. 19). Uváží se v něm homotetie trojúhelníků: $\triangle\, SS^aA_c \sim \triangle\, SS^bB_c$, $\triangle\, SS^aA_1 \sim \triangle\, SS^bB_1$ a $\triangle\, S^aO^aA_c \sim$ $\sim \triangle\, A_1A_1'A_c$, kde $S \equiv A_1B_1 \,.\, A_cB_c \,.\, z$.

Věty potvrzují, že doplňování klinogonálních afinních soustav se provede stejně jako v afinitě ortogonální a v persp. kolineaci.

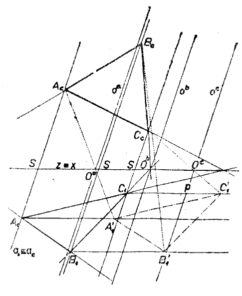
**Úloha 2, 3.** *Nechť je dána* **D.**-*soustava* 7 *svým obrazem, persp. klinogonální afinitou* $(z, A_1 \to A_c)$. *Je sestrojit perspektivu* $A_cB_cC_c \ldots$ *obrazce* $ABC \ldots \in \varrho$.

**Řešení** úlohy je zřejmé. Je provedeno v obr. 19, 20.

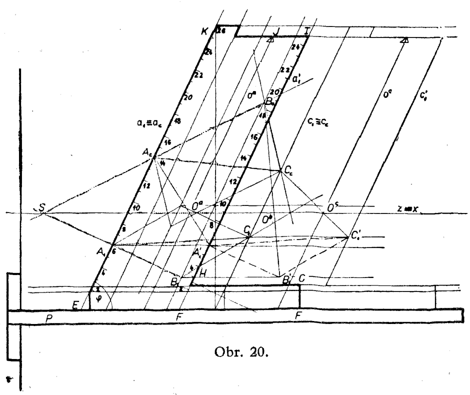
Toto doplňování můžeme provádět mechanicky jednoduchými pomůckami, *lepenkovými, celuloidovými* nebo *tyčovými kosoúhlými afinografy*, obdobnými afinografům ortogonálním. Jsou znázorněny na obr. 20, 21. Tyčový (pravítkový) afinograf je možno získat úpravou tyčového pravoúhlého afinografu, jestliže jsou jeho ramena $a_c$, $a_1'$ otáčivá kolem čepů ${}^1K$, ${}^2K$ na opěrném pravítku Q a upevnitelná v každé vzájemně rovnoběžné poloze.

Upotřebení pravítek je zřejmé.

Při rýsování kosoúhlých projekcí je možno užít i pravítek a afinografů ortogonálních. Je k tomu však třeba kosoúhlého příložného pravítka (obr. 22) nebo pevného pravítka s hranou kolmou k směru slabě samodružných přímek. Zdůvodnění toho podává následující věta a konstrukce.



Obr. 19.

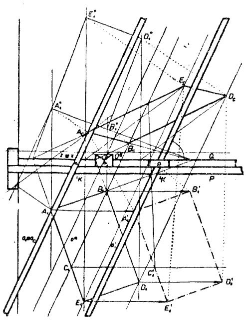


Obr. 20.

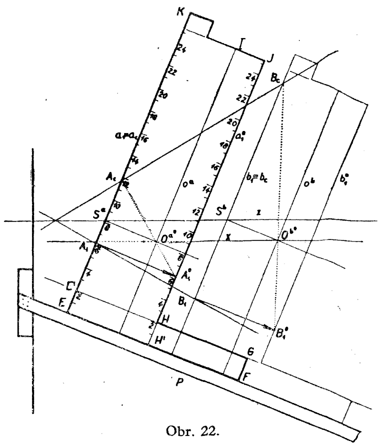
**Věta 2, 11.** *Rozštěpíme-li kosoúhlou afinitu posunutím soustavy* $\varrho_1$ *o vektor* $\overline{\mathrm{p}}$ *kolmého směru k slabě samodružné přímce* $a_1 \equiv a_c$, *platí pro střed perspektivity* $O_0^a$: $S^aO_0^a \perp a_1 \equiv a_c$, $S^aO_0^a = S^aO^o$, *kde* $S^a \equiv M_1 \equiv M_c$ *je samodružný bod přímky*

*$a_1 \equiv a_c$, $O^a$ je střed perspektivity náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ při rozštěpení posunutím o vektor* $\bar{p}$ *rovnoběžný se základnicí z.* (Obr. 23.)

**Důkaz** správnosti věty provedeme tak, že uvážíme posunutí ve směru základnice $z$ a homotetické trojúhelníky $\triangle A_1A_1'A_c \sim \triangle S^aO^aA_c$. Dále uvážíme posunutí uvedené ve větě 2, 11 a homotetické trojúhelníky $\triangle A_1^0A_1A_c \sim \triangle O_0^aS^aA_c$. Z toho vyplývá: $x = y = S^aO_0^a = S^aO^a$, cbd.



Obr. 21.



Obr. 22.

Lze dokázat, že je tato věta speciálním případem věty obecnější, která mluví o rozštěpení persp. klinogonální afinity posunutím soustavy $\varrho_1$ v libovolném směru s výjimkou směru určeného slabě samodružnými přímkami dané afinity.

Samodružná přímka $x$, geometrické místo středů perspektivity $O_0^a$, $O_0^b$, ..., je v případě posunutí 2, 11 různá od osy afinity $z$ ve vzdálenosti $v$ od ní: $v = S^aO^a \cdot \cos \alpha$, kde $\alpha$ je úhel slabě samodružných přímek s osou afinity.

Na obr. 22 je znázorněno *lepenkové* nebo *celuloidové pravoúhlé pravítko* k rýsování kosoúhlých projekcí. Lze sestrojit k témuž účelu i *pravítko tyčové.*

8. Jestliže je charakteristika klinogonální afinity $q = -1$, 1, jde o kosoúhlou *osovou souměrnost* nebo o *identitu*. V prvním případě je přímka perspektivity náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ osou rovinného pásu, ohraničeného přímkami $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$. V případě druhém je to nevlastní přímka roviny. Důkaz správnosti těchto tvrzení je jednoduchý.

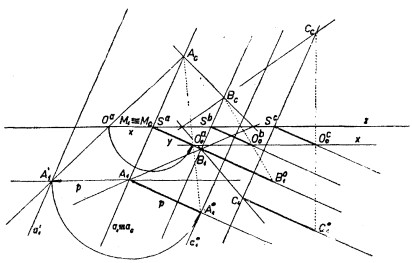
Na základě toho lze doplňovat mechanicky rovinné soustavy klinogonálně symetrické a soustavy shodné a lze sestrojit *kosoúhlý symetrograf* a mechanickou *kopírovací pomůcku.* Jejich praktický význam je však jiná otázka.

### 3. Soustava perspektivního promítání o nevlastní základnici

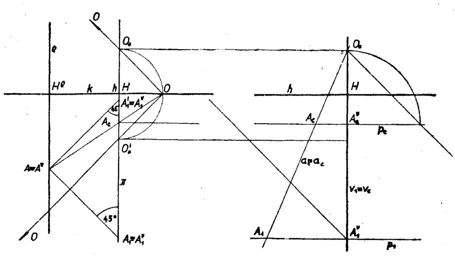
Jestliže je základnice $z$ **D.**-soustavy nevlastní přímka, pak platí věta:

**Věta 3, 1.** *V uvedeném případě je základní rovina* $\varrho$ *buď rovina nevlastní, nebo je rovina vlastní rovnoběžná s průmětnou* $\pi$. *Soustava přestává být Dürerovou ve smyslu původní její definice.*

**Důkaz** správnosti věty vyplývá z pojmu nevlastní přímky a pojmu rovnoběžných rovin.



Obr. 23.



Obr. 24ab.

Perspektivní zobrazení v prvním případě vzájemné polohy rovin $\pi$, $\varrho$ nemá praktického významu. V druhém případě jsou obě roviny $\pi$, $\varrho$, jak je známo z elementární geometrie, ve vztahu *prostorové homotetie*, jejíž střed je střed persp. zobrazení $O$. Koeficient homotetie je $q = OA : OA_c = OH^{\varrho} : OH$, kde $A$, $A_c$ je pár přiřazených bodů (obr. 24ab), $H$, $H^{\varrho}$ jsou paty kolmice $k$ spuštěné ze středu $O$ na obě roviny $\pi$, $\varrho$. Soustavu homotetie označíme $(O, \pi \parallel \varrho)$.

Abychom uvedený vztah homotetie obou od sebe různých rovin zobrazili v průmětně $\pi$, počínáme si podobně jako při zobrazení Dürerovy soustavy.

Zavedeme pojem $\Omega$-promítání, jehož definice se nekryje zcela s definicí $\Omega$-promítání aplikovaném v **D.**-soustavě středového promítání. Jeho pojem je patrný z obr. 24a, v němž je nákresna rovina incidentní s body $O$, $H$, $O_0$, $O_0'$ a roviny $\pi$, $\varrho$ jsou kolmé k nákresně. Taková promítání jsou dvě. $^1\Omega$-promítáním se zobrazuje bod $A$ bodem $A_1$ a střed $O$ středem $O_0$. Podobně $^2\Omega$-promítáním se zobrazuje bod $A$ bodem $A_1'$, střed $O$ středem $O_1'$. Platí důležitá věta:

**Věta 3, 2.** (*Stevinova*) *Mezi perspektivním průmětem* $A_c, B_c, \ldots$ *bodů* $A, B, \ldots$ *incidentních se základní rovinou* $\varrho$ *a jejich* $\Omega$*-průmětem* $A_1, B_1, \ldots$, *resp.* $A_1'$, $B_1' \ldots$ *do persp. průmětny* $\pi$ *soustavy homotetie platí vztah rovinné homotetie. Její střed je* $\Omega$*-průmět* $O_0$, *resp.* $O_0'$ *středu* $O$ *soustavy, koeficient homotetie je* $q = OA : OA_c = O_0A_1 : O_0A_c$.

**Důkaz** správnosti věty provedeme na základě pouček stereometrie a pojmu homotetie.

Je třeba připomenout, že platí známé věty uváděné v elementární geometrii.

**Věta 3, 3.** *Průměty* $p_1$, $p_c$ *přímky* $p \in \varrho$ *jsou přiřazené v homotetii rovin* $\varrho_1 \equiv \equiv \varrho_c \equiv \pi$ *a jsou navzájem rovnoběžné.*

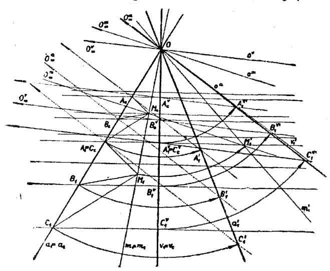
**Věta 3, 4.** *Homotetie soumístných rovinných soustav* $\varrho_1 \equiv \varrho_c \equiv \pi$ *je dána středem* $O_0$ *a dvojicí přiřazených bodů* $A_1 \to A_c$. *Označíme ji* $(O_0, A_1 \to A_c)$.

O přiřazení homotetie $(O_0, A_1 \to A_c)$ soumístných rov. soustav $\varrho_1 \equiv \varrho_c$ a prostorové homotetie $(O, \pi \parallel \varrho)$ platí důležitá věta:

**Věta 3, 5.** *Dané prostorové homotetii* $(O, \pi \parallel \varrho)$ *jsou přiřazeny dvě homotetie* $(O_0, A_1 \to A_c)$, $(O_0', A_1' \to A_c)$ *soumístných rov. soustav* $\varrho_1 \equiv \varrho_c \equiv \pi$. *Obráceně však je homotetií těchto soumístných soustav dána příslušná prostorová soustava nekonečně mnohoznačně.*

**Důkaz.** Správnost první části věty je na základě pojmu $\Omega$-projekce v soustavě homotetie a na základě věty 3, 2. zřejmá. Správnost části druhé nechť zdůvodní laskavý čtenář sám za pomoci obr. 24ab.

V elementární geometrii se učí, kdy je obraz základní roviny v soustavě homotetie fyzický a geometrický, kdy jde o zvětšení, případně o zmenšení originálu, atd.



Obr. 25.

Nechť je dán obraz prostorové soustavy homotetie, homotetie $(O_0, A_1 \to A_c)$ soumístných rovinných soustav $\varrho_1 \equiv \varrho_c \equiv \pi$. Můžeme zavést pojmy, o nichž bylo jednáno v teorii **D.**-soustavy středového a rovnoběžného promítání. Jsou to zejména pojem rozštěpení soustavy homotetie otočením $\gamma$, pojem středu perspektivity a přímky perspektivity náležících dané slabě samodružné přímce apod.

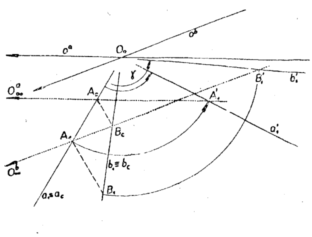
Otočením soustavy základní roviny $\varrho_1$ se rozpadnou slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$, $b_1 \equiv b_c$, $v_1 \equiv v_c, \ldots$ v dvojice $a_c, a_1'$; $b_c, b_1'$; $v_c, v_1', \ldots$ (obr. 25). Platí o nich věta obdobná větám 1, 3. a 2, 3.

**Věta 3, 6.** *Podobné soustavy bodů $A_1'$, $B_1'$, . . ., $A_c$, $B_c$ . . . incidentní s přímkami $a_1'$, $a_c$ jsou perspektivní.*

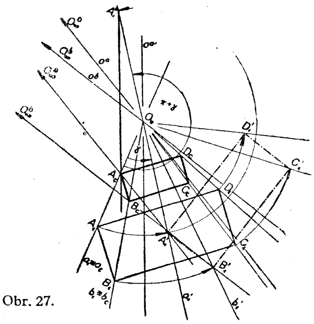
**Důkaz** správnosti je obdobný důkazu vět výše uvedených.

O poloze středu perspektivity soustav přiřazených bodů nositelek $a_c$, $a_1'$; $b_c$, $b_1'$; . . . platí věta:

**Věta 3, 7.** *Střed perspektivity soustav přiřazených bodů incidentních s přímkami dvojice $a_c$, $a_1'$; $b_c$, $b_1'$; . . . je nevlastní bod $O_\infty^a$, $O_\infty^b$, . . . .*



Obr. 26.



Obr. 27.

**Důkaz** správnosti věty je jednoduchý a vyplývá z vlastnosti dělícího poměru jako invariantu rovnoběžného promítání.

O samodružné přímce $x$ protilehlé k středu $O_0 \equiv X$, geom. místu středů perspektivity náležejících slabě samodružným přímkám soustavy, platí věta:

**Věta 3, 8.** *Samodružná přímka $x$ protilehlá ke středu homotetie $O_0 \equiv X$ je nevlastní přímka roviny homotetie.*

**Důkaz** její správnosti je na základě věty 3, 7. zřejmý.

Středem homotetie $O_0$ a středem perspektivity $O^a$ příslušejícím slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$ je určena přímka perspektivity $o^a$ příslušející této slabě samodružné přímce (obr. 26).

Nechť je dána homotetie ($O_0$, $A_1 \to A_c$), v níž je $A_1A_c \equiv a_1 \equiv a_c$, $B_1B_c \equiv \equiv b_1 \equiv b_c$, . . . . Rozštěpíme-li homotetii otočením soustavy základní roviny $\varrho$ kolem středu $O_0$ o úhel $\gamma$, platí věta:

Věta 3, 9. *Trojice přímek $a_c$, $a_1'$, $o^a$; $b_c$, $b_1'$, $o^b$, . . . jsou shodné.*

**Důkaz** správnosti věty vyplývá z podobnosti trojúhelníků $\triangle\, O_0A_cA_1'$, $\triangle\, O_0B_cB_1'$.

Na základě těchto vět můžeme doplňovat homotetii dvou soumístných rovinných soustav $\varrho_1 \equiv \varrho_c$.

**Úloha 3, 1.** *V homotetii ($O_0$, $A_1 \to A_c$) daných rovinných soumístných soustav je sestrojit k bodu $B_1$ soustavy $\varrho_1$ odpovídající bod $B_c$ soustavy $\varrho_c$.*

**Rozbor** úlohy vyplývá z uvedených vlastností homotetie.

**Sestrojení.** (Obr. 27)

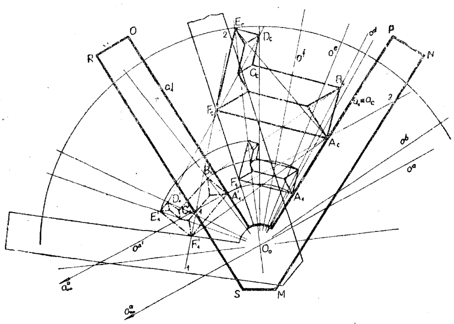
a) Sestrojíme přímku $O_0B_1$, která je incidentní s hledaným bodem $B_c$.

b) Rozštěpíme homotetii otočením $\gamma$ a určíme směr přímky perspektivity $A_cA_1' \equiv O^a_\infty$ náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$.

c) Otočíme bod $B_1$ známým způsobem do polohy $B_1'$.

d) Sestrojíme přímku perspektivity $o^b$ na základě shodnosti trojic: $a_c$, $a_1'$, $o^a \cong b_c$, $b_1'$, $o^b$.

e) Sestrojíme přímku $B_1'B_c \parallel o^b$ a vytkneme průsečík $B_c \equiv B_1O_0 \,.\, B_1'B_c$, který řeší úlohu.




Obr. 28.

Uvedenou konstrukci doplňování homotetických soustav je možno mechanisovat sestrojením jednoduchých *pantografů*, sloužících k rýsování obrazců podobných obrazcům daným v daném měřítku. Nejjednodušší je *lepenkový, celuloidový* nebo *kovový ostroúhlý* nebo *pravoúhlý pantograf* znázorněný na obr. 28. Je tvaru písmene $V$, obě ramena svírají ostrý nebo pravý úhel. Pevný bod $O_0$ zastupuje střed homotetie, vnitřní hrany, procházející středem $O_0$, zastupující dvojici přímek $a_c$, $a_1'$ po rozštěpení homotetie.

Řešme následující úlohu.

**Úloha 3, 2.** *Je zvětšit daný náčrtek (řešení střechy) v poměru* 1 : 2.

**Rozbor** je dán uvedenými vlastnostmi homotetie.

**Sestrojení.**

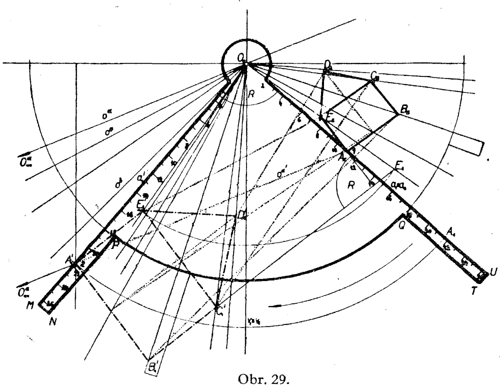
a) Zvolíme střed homotetie $O_0$ a pár přiřazených bodů $A_1 \to A_c$ tak, aby platilo: $O_0A_1 = \frac{1}{2}\, O_0A_c$.

b) Myslíme si originál umístěn v určité poloze $A_1B_1C_1 \ldots$, otočíme jeho bod $A_1$ o úhel $\gamma$ do polohy $A_1'$ a určíme směr $A_cA_1' \equiv o^{a'}$ přímky perspektivity $o^a$ příslušející slabě samodružné přímce $O_0A_1 \equiv O_0A_c \equiv a_1 \equiv a_c$.

c) Upevníme pravítko tak, aby jeho střed splynul se středem homotetie. Otočíme jím, aby hrana $a_1 \equiv a_c$ procházela bodem $A_1$ a vyznačíme na pravítku směr přímky perspektivity $o^{a'}$.

d) Umístíme originál obrazce do polohy $A_1'B_1'C_1' \ldots$ tak, aby byl vzhledem k poloze $A_1B_1C_1 \ldots$ otočen o úhel $\gamma$ rovný úhlu hran pravítka.

e) Bod obrazu, např. bod $F_c$, sestrojíme tak, že otočíme pravítkem, až se jeho hrana $a_1'$ stane incidentní s otočeným originálem $F_1'$ a narýsujeme podél hrany



Obr. 29.

$a_1 \equiv a_c$ přímku, která je incidentní s obrazem $F_c$. Vyznačíme dva body přímky perspektivity $o^a$ nebo jejího směru, odsuneme pravítko, aby byla nákresna volná, a narýsujeme bodem $F_1'$ rovnoběžku se směrem přímky persp. $o^a$. Tato rovnoběžka vytíná na rayonu $O_0F_c$ hledaný bod $F_c$.

Některé výhody má *pantograf tvaru kruhové výseče*, jehož hrany $a_c$, $a_1'$ představují známé přímky téhož označení. Jestliže opatříme hrany pravítka měřítky s nulovým bodem v středu $O_0$, není třeba otáčet originál z jeho původní polohy $A_1B_1C_1 \ldots$ do polohy $A_1'B_1'C_1' \ldots$. Přístroj dostředíme v bodě $O_0$, určíme směr přímky perspektivity a při rýsování perspektivity $A_c$ bodu $A$ si počínáme takto: a) Otočíme pravítkem, aby jeho hrana $a_1 \equiv a_c$ procházela bodem $A_1$ a narýsujeme rayon $O_0A_1$. Zároveň čteme kótu 21,9 bodu $A_1$, vyhledáme na druhé hraně $a_1'$ bod téže kóty a vyznačíme jej na nákresně jako bod $A_1'$.

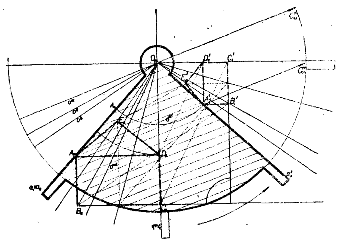
b) Vyznačíme na nákresně body 1′, 2′ přímky $o^{a'}$ určující směr přímky perspektivity $o^a$ a otočíme přístroj, aby byla nákresna volná.

c) Bodem $A_1'$ vedeme rovnoběžku $A_1'A_c$ s přímkou 1′2′ a vytkneme hledanou perspektivu $A_c$: $A_c \equiv O_0A_1 . A_1'A_c$. (Obr. 29)

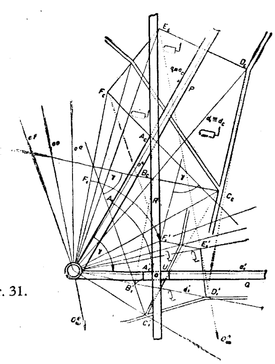
Je-li udán koeficient homotetie číselně, $q = a : b$, není třeba určit na pravítku směr přímky perspektivity. Stačí jej vyznačit v každé poloze pravítka body na hranách $a_c$, $a_1'$.

Jestliže má přístroj sloužit stále zvětšení nebo zmenšení v témž poměru $q = a : b$, můžeme vyloučit operaci b) v řešení předešlé úlohy. Učiníme to tím, že desku přístroje opatříme soustavou přímek rovnoběžných s přímkou $A_1'A_c$ (obr. 30).

Pantograf lze sestrojit též ve formě *dvojpravítka s pomocným třetím pravítkem* (obr. 31). Hrany obou ramen dvojpravítka $P$, $Q$ představují přímky $a_1 \equiv a_c$, $a_1'$, ramena jsou spojena kloubem s osou otáčení přístroje. Třetí pravítko $R$ je posuvné pomocí objímky $V$ a čepu $U$ po pravítku $Q$, k němuž může být upevněno pod libovolným úhlem. Toto pravítko zastupuje rovnoběžku $A_1'A_c$ s přímkou perspektivity $o^a$.



Obr. 30.



Obr. 31.

Funkce pravítka při rýsování perspektivy je patrná. Snad je nutno připomenout, že bod $A_c$ perspektivy $A_cB_cC_c \ldots$ obrazce $A_1B_1C_1 \ldots$ získáme otočením přístroje, aby hrana $a_1'$ pravítka $Q$ byla incidentní s otočeným originálem $A_1'$ a narýsováním dvou přímek podél hran pravítek $P$, $R$.

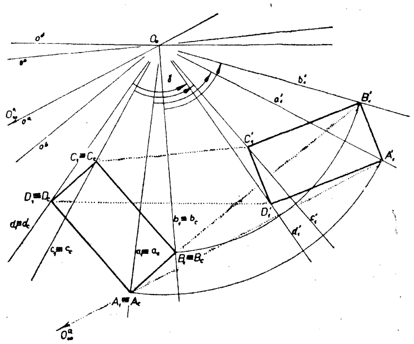
Konstrukce perspektiv podle C. De La Fresnaye lze užít i v homotetii o koeficientu $q = 1$. Jde zřejmě o *identitu*, jak se též učí v elementární geometrii. Tento zvláštní případ homotetie nastane zřejmě tehdy, jestliže základní rovina $\varrho$ splyne s persp. průmětnou $\pi$. Obrazec $ABC \ldots \in \varrho, \pi$ splyne se svým $\Omega$-průmětem $A_1B_1C_1 \ldots$ i s perspektivním průmětem $A_cB_cC_c \ldots$.

Je možno ukázat, že platí věty obdobné větám uvedeným v pojednání o homotetii, např. věta Stevinova, věta o určenosti soustavy jejím obrazem, ... atd. Lze zavést obdobné pojmy jako je rozštěpení identity, střed a přímka perspektivity $O^a$, resp. $o^a$, náležející slabě samodružné přímce $a_1 \equiv a_c$, samodružná přímka $x \ldots$.

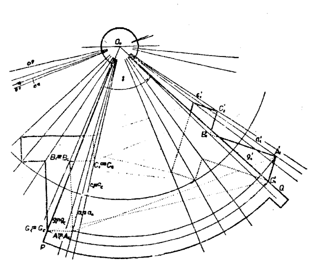
Nechť je dána identita rovin $\pi \equiv \varrho$, tedy homotetie o koeficientu $q = 1$. Lze ukázat, že každý bod roviny $\pi \equiv \varrho$ je možno volit za „*střed*" $O_0$ této identity. Tím jsou dány slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$, $b_1 \equiv b_c, \ldots$ tohoto zobrazení. Rozštěpme tuto identitu otočením soustavy základní roviny $\varrho_1$ o velikost úhlu $\gamma$

rozštěpením slabě samodružné přímky $a_1 \equiv a_c$. Platí věta o perspektivnosti soustav bodů incidentních s přímkami $a_c$, $a_1'$. Střed perspektivity $O^a$ je nevlastní bod přímky $A_1'A_c$, přímka perspektivity $o^a$ je $o^a \parallel A_1'A_c$, $o^a \in O^a$. Můžeme říci přesněji:

**Věta 3, 10.** *Přímka perspektivity $o^a$ po rozštěpení identity otočením $\gamma$ je rovnoběžná s přímkou $A_1'A_c \equiv A_1'A_1$. Trojúhelník $O_0A_1'A_1$ je rovnoramenný.*



Obr. 32.



Obr. 33.

**Důkaz** správnosti je na základě totožnosti bodů $A_1 \equiv A_c$ zřejmý. (Obr. 32)

Po získání těchto poznatků můžeme řešit úlohu:

**Úloha 3, 3.** *Je narýsovat obrazec $A_cB_cC_c$ . . . shodný s obrazcem $A_1'B_1'C_1'$ . . . , aby např. hrana $A_cB_c$ zaujala určitou polohu.*

**Řešení** této úlohy je obdobné řešení úlohy 3, 2.

Při řešení této úlohy je možno užít *lepenkového*, *celuloidového* nebo *kovového úhlového pravítka* (obr. 28), *pravítka tvaru kruhové výseče $O_0PQ$* (obr. 33) nebo *tyčového mechanismu* (obr. 31), kterých bylo užito jako pantografů. Je zřejmé, že se od těchto pantografů liší jen polohou přímky perspektivity. Pracuje se s nimi známým způsobem.

## Závěrečné poznámky

1. U kolineografů, afinografů i pantografů, sestrojených na základě Fresnayeovy konstrukce perspektiv, je *možno předem určit polohu přímky perspektivity* $o^a$ vzhledem k ramenům $a_c$, $a'_1$ úhlu otočení $\gamma$. Za určitých okolností náleží přímka perspektivity $o^a$ vnitřku úhlu otočení $\gamma$, jindy jeho vnějšku. Důkaz této skutečnosti je znám [21], není zde však uveden. Na základě toho lze dát pravítku předem vhodný tvar.

2. Pomocí perspektivního pravítka lze snadno určovat *velikosti perspektiv bočných hran a výšek* objektů stojících podstavou na základní rovině $\varrho$. Konstrukce není v tomto článku uvedena.

3. Konstrukce perspektiv podle Fresnaye má *dvojí význam*: a) Je *teoretickým základem řady jednoduchých mechanických pomůcek* k rýsování perspektiv. Tyto pomůcky mají vzhledem k jiným persp. mechanismům (např. Hauckovu, Brauerovu, Mackovu, . . .) mnohé přednosti [21].

b) Fresnayeovu konstrukci perspektiv *je možno aplikovat i v speciálních případech* persp. kolineace, v elementárních geom. transformacích, jako je persp. afinita, homotetie i shodná zobrazení. I zde lze na jejím základě sestrojit jednoduché mechanické pomůcky, *afinigrafy*, *pantografy* i *kopírovací mechanické pomůcky*.

### Literatura


[1] *Kazimierz Bartel:* Perspektywa malarska, Warszawa 1955.
[2] *N. F. Četveruchin:* Metody načertatělnoj geometrii i jejo priloženija — sbornik statěj, Moskva 1955.
[3] *Albrecht Dürer:* VNderweysung der messung . . . Nürnberg 1525.
[4] *Walther Dyck:* Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892.
[5] Festschrift der königlichen techn. Hochschule zu Berlin, Berlin 1884.
[6] *G. De La Fresnaye:* Les Faisceaux à projeter, La construction moderne, Paris 1909.
[7] *František Kadeřávek:* Perspektiva, Praha 1922.
[8] *F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský:* Deskriptivní geometrie I, Praha 1929.
[9] *J. H. Lambert:* Freye Perspektive oder Anweisung . . . Zurich 1759.
Anlage zur Perspektive, rukopis 1752.
[10] *J. J. Pillet:* Traité de perspective linéaire, Paris 1901.
[11] *N. L. Ruskevič:* Novyje metody vyčerčivanija nagladnych izobraženij, Moskva 1953.
[12] *Artur Salner:* Prostorové zobrazování ve strojnictví, Praha 1954.
[13] *Alois Urban:* Deskriptivní geometrie, Praha 1955.
Auszüge aus den Patentenschriften, Berlin:
[14] Patentní spis č. 73 473 ze dne 15. 6. 1893.
[15] Patentní spis č. 63 721 ze dne 18. 12. 1889.
[16] Patentní spis č. 63 199 ze dne 11. 7. 1891.
[17] Patentní spis č. 195 828 ze dne 23. 3. 1907.
[18] Sitzungsberichte, Akademie der Wissenschaften in Wien, oddíl IIa, roč. 127 — 1918.
[19] Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, roč. 35 — 1891.
[20] Zeitschrift für Instrumentenkunde, roč. 52 — 1932.
[21] *František Havelka:* Teorie mechanických konstrukcí perspektiv a nástin jejich historického vývoje, rukopis habil. práce, 1960.

РЕЗЮМЕ.

# НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ МЕХАНИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ПЕРСПЕКТИВ ФРЕНЕ

ФРАНТИШЕК ГАВЕЛКА, ОЛОМОУЦ
(Поступило в редакцию 25. 11. 1960.)

В развитии перспективы встречаемся очень рано с усилием облегчить, сократить и уточнить черчение перспективных фигур различными механическими пособиями. Первыми конструкторами этих механизмов являлис *Леоне Баттиста Альберти* и *Альбрехт Дюрер*, идеи которых развивали и улучшали ряд авторов. *Й. Г. Ламберт* сконструировал несколько качественно новых приборов коллинеографы. Период расцвета этих приборов, включая перспектографы, начинается в восьмидесятых годах прошлого столетия работами *Квуидо Гаука*, особенно его апликацией трилинеарного соотношения в начертательной геометрии. Из других авторов можно привести *Е. Брауера, Г. Риттера, А. Брикса, Л. Дитманна, Й. Й. Пиллета* и других.

После Великой октябрской революции, особенно начиная с 1923 года, замечаем большой прогресс в конструировании перспективных приборов в СССР. Здесь можно привести имена *М. С. Розентала, Д. Г. Барышева, Г. Б. Валца, М. Н. Юдицкого, Н. Л. Рускевича* и других. У нас занимается механическими конструкциями перспектив инженер *А. Сальнер*, известный конструктор перспектографоф.

В литературе ([1], [2]) особо оценивается конструкция перспектив Френе [6]. Автор исходит из базиса перспективного проектирования (0, п) и расширенного базиса перспективного проектирования $(0, \pi \perp \varrho)$ основной плоскости $\varrho$, образом которой является, согласно теоремы Стевина, перспективная коллинеация двух плоских систем $\varrho_1$ и $\varrho_2$ имеющих общего носителя. Для дополнения этих перспективно коллинеарных систем имеющих общего носителя, используются некоторые свойства общих коллинеарных систем, имеющих общего носителя, особенно перспективности точечных рядов на соответствующих прямых, тождественных с самосопряженной точкой. Это осуществляется переводом рерспективно коллинеарных плоских систем, имеюще общего носителя, так, что совершается поворот плоской системы $\varrho_1$ вокруг центра $0_0$ перспективной коллинеации на произвольный угол $\gamma \neq 0$, $180^0$. Автор настоящей работы вводит для этого поворота понятие *разрыва* перспективной коллинеации. На основе конструкции дополнения перспективных коллинеарных систем конструирует Френе простой коллинеограф для механического черчения перспектив фигур, принадлежащих основной плоскости $\varrho$.

Автор настоящей работы применяет конструкцию перспектив Френе для системы перспективного проектирования с несобственным центром, то есть на конструирование афинных фигур, принадлежащих основной плоскости $\varrho$. Предлагает некоторые механические пособия, афиннографы для облегчения черчения афинных фигур. Далее применяет эту конструкцию на системы центрального проектирования с несобственной основной прямой $z \equiv \pi . \varrho$, которая является системой гомотетии. На основе этого предлагает некоторые механические пособия, *пантографы*, для облегчения черчения подобных фигур. Также применяет конструкцию Френе для конгруентных фигур и тождества и предлагает простые *симетрографы и копировальные пособия*. Ядро работы как раз в применении конструкции Френе на все элементарные геометрические преобразования и предложения соответствующих механических пособий.

SUMMARY

# SOME SPECIAL CASES OF FRESNAYE'S MECHANICAL CONSTRUCTION OF PERSPECTIVE PROJECTION

FRANTIŠEK HAVELKA

On following the course of the evolution of perspective, we meet — at a rather early date — with efforts aimed at making the drawing of perspective figures easier, shorter and more accurate through the use of various mechanical aids. The earliest among the constructors of such mechanisms were *Leone Battista Alberti* and *Albrecht Dürer*, whose ideas were being further developed and improved by a number of other authors. *J. H. Lambert* constructed several, qualitatively new instruments, the collineographs. A real boom for these instruments, which had been augmented by perspectographs, started in the 1880s. It was due, in the first place, to the works of *Quido Hauck*, especially to his application of trilinear relation on descriptive geometry. Of the other authors should be mentioned *E. Brauer*, *H. Ritter*, *A. Brix*, *L. Dietmann*, *J. J. Pillet* and others.

In the USSR a busy activity in the field of construction of perspective instruments set in after the Great October Revolution, mainly after 1923. In this connection we may name *M. L. Rosental*, *D. G. Baryshev*, *G. B. Valc*, *M. N. Juditzki*, *N. L. Ruskevitch* and others. In our country it is *A. Salner*, known for his construction of a perspectograph, who is engaged in mechanical constructions of perspectives.

Technical literature [1], [2] attributes special value to Fresnaye's construction of perspectives [6]. Fresnaye started from the base of perspective projection $(0, \pi)$ enlarged by the basic plane $\varrho$ in such a way that the new enlarged base of perspective projection was $(0, \pi \perp \varrho)$. The picture of this enlarged base constitutes — according to Stevin's theorem — perspective collineation of two coordinate plane systems $\varrho_1$, $\varrho_2$. When completing these perspectively collinear coordinate systems, he makes use of certain qualities of general coordinate collinear systems, in the first place of the perspective of rows of points on coordinated straight lines that are incident with the self-correlative point. He does so by transferring the perspectively collinear coordinate plane systems into general coordinate collinear systems by revolving the plane system $\varrho_1$ round the centre $0_0$ of the perspective collineation by an arbitrary angle $\gamma \neq 0°, 180°$. The author of the present article coins for this transfer the term "*splitting of perspective collineation*". Based upon the construction of the completing of perspective collinear systems Fresnaye has constructed a simple collineograph for purposes of mechanical drawing of perspective figures that are incident with the basic plane $\varrho$.

The author of the present article applies Fresnaye's construction of perspectives to a system of perspective projection of the non-proper centre, i. e. a construction of affined figures of structures that are incident with the basic plane $\varrho$. He has designed several mechanical aids, *affinographs*, in order to facilitate the drawing of affined pictures. He further applies the same construction to a system of central projection of the non-proper basic line $z \equiv \pi \, . \, \varrho$, which represents a system of homothety. Issuing from that fact he has designed a few mechanical aids, *pantographs*, with the purpose of making the drawing of similar figures easier. In the same way he applies Fresnaye's construction to corresponding and identical representations and designs simple *symmetrographs* as well as a *copying device*.

The core of the article lies in the application of Fresnaye's construction to all elementary geometrical transformations and in the design of appropriate mechanical aids.