Ladislav Sedláček

Grupoidy a grupy s operátory

Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica-Physica-Chemica, Vol. 2 (1961), No. 1, 33--66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/119781

1961 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS.
FACULTAS RERUM NATURALIUM. TOM 7.

Katedra algebry a geometrie přírodovědecké fakulty.
Vedoucí: Prof. RNDr. Josef Metelka.

GRUPOIDY A GRUPY S OPERÁTORY.

LADISLAV SEDLÁČEK
(Došlo 11. října 1960)

Úvod

Ve své práci vycházím z knihy Otakara Borůvky „Úvod od theorie grup". Protože v této monografii jsou vlastnosti grup studovány na základě grupoidů v širším smyslu, a tedy pojetí je od jiných podobných spisů odlišné, proto se také moje práce liší se od jiných prací, jež se týkají tohoto thematu, a to hlavně v první polovině.

Nejdříve jsou studovány množiny s operátory a přípustné rozklady v těchto množinách. Pak se přechází k pojmu grupoidu s operátory a k přípustnému faktoroidu v tomto grupoidu. Konečně jsou zkoumány vlastnosti grup a faktorových grup s operátory.

Poněvadž vycházím ze zmíněné knihy, používám také — až na nepatrné výjimky — názvů a označení tak, jak jsou uvedeny v této knize. Odvolání na zmíněnou knihu označuji například takto:
B,8.1.2./72, což znamená: odstavec 8.1.2, str. 72 zmíněné knihy, vydání z r. 1952. Věty označuji velkým písmenem **V**, takže **V1/II** znamená větu **1** z kapitoly II: Definice značím velkým **D**. Definice, důsledky, poznámky a úmluvy jsou číslovány analogicky jako věty. Věty, definice, důsledky, poznámky a úmluvy jsou číslovány jen tehdy, nejsou-li uvedeny v citované knize nebo jsou-li pro další výklad zásadní důležitosti a nejsou v ostatní literatuře běžné.

Ve své práci užívám některých symbolů a názvů podle knihy „Grundlagen der Gruppoid — und Gruppentheorie" od téhož autora (vyd. r. 1960), jež se liší od symbolů a názvů, jež jsou užívány v citované knize (vyd. r. 1952). Tak pro součet množin užívám symbolu „$\cup$" místo „$\vee$", pro součet systému množin symbolu „$\bigcup$" místo „Σ" a pro průnik systému množin užívám symbolu „$\bigcap$" místo symbolu „π". Místo „jednotka" grupoidu říkám „jednotkový prvek" grupoidu.

§ 1. Základní pojmy a věty

Množiny budeme značit velkými latinskými písmeny $A, B, C, \ldots$, jejich prvky malými latinskými písmeny $a, b, c, \ldots$. Jestliže prvky dané množiny jsou opět množiny, pak mluvíme o systému množin. $A = B$ znamená rovnost dvou množin, $A \subset B$ značí, že A je podmnožinou v B nebo že B je nadmnožinou na A. Je-li prvek a z množiny B, značíme to $a \in B$, není-li a prvkem množiny B, píšeme $a \bar{\in} B$.

Součtem množiny A a množiny B rozumíme množinu všech prvků, které patří do množiny A nebo B a značíme jej symbolem $A \cup B$. Součtem libovolného systému množin $\bar{A}$ rozumíme množinu všech prvků, které patří aspoň do jedné z množin, které jsou prvky systému $\bar{A}$ a označujeme jej zpravidla symbolem $\mathbf{s}\bar{A}$. Jesliže jsme prvky systému $\bar{A}$ označili písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots$, tj. jestliže $\bar{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots\}$, označujeme součet systému $\bar{A}$ symbolem $\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots$ nebo stručněji $\bigcup \bar{a}$.

Průnik dvou množin A, B značíme $A \cap B$. Průnik libovolného systému množin $\bar{A}$ značíme $\mathbf{p}\bar{A}$. V případě, že jsme označili prvky systému $\bar{A}$ písmeny $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots$, značíme jeho průnik $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{a}_3 \cap \ldots$ nebo stručněji $\bigcap \bar{a}$.

D 1/I: Budiž dána neprázdná množina $A = \{a,b,c, \ldots\}$ a neprázdná množina $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ jistých symbolů, jež budeme značit malými řeckými písmeny. Jestliže každé uspořádané dvojici (a, α), $a \in A$, $\alpha \in \Omega$, je přiřaděn určitý prvek b z množiny A, což zapisujeme symbolem

$$(1{,}1) \qquad a\alpha = b\,,$$

pak říkáme, že množina Ω je *oborem operátorů* pro množinu A nebo že A je množina s oborem operátorů Ω, a značíme to symbolem A/Ω. Prvky z Ω nazýváme *operátory*. Přiřazení prvku b uspořádané dvojici (a,α) nazýváme operací, $a\alpha$ nazýváme *operátorovým součinem* a operaci při tomto způsobu zápisu nazýváme *operátorovým násobením*.

Poněvadž v (1,1) stojí operátor α vpravo, nazýváme tento přesněji pravý operátor. Analogicky se zavádí pojem levého operátoru. Je zřejmé, že všechny věty platící pro pravé operátory jsou také správné pro levé operátory. V dalším budeme uvažovat jen pravé operátory. Z naší definice **D 1/I** je zřejmé, že užití operátoru $\alpha \in \Omega$ na prvky z A definuje zobrazení množiny A do sebe. Dvěma různým operátorům α, $\beta \in \Omega$ odpovídá totéž zobrazení do sebe, jestliže platí $a\alpha = a\beta$ pro každé $a \in A$.

Úmluva 1/I: Všude v dalším předpokládáme, že uvažované množiny a obory operátorů nejsou prázdné.

D 2/I: Operátor ε z Ω nazýváme *identickým* operátorem pro množinu A, je-li vždy

$$(2{,}1) \qquad a\varepsilon = a$$

pro každé $a \in A$.

Zřejmě se může v Ω vyskytnout více identických operátorů.

Úmluva 2/I: Když Ω je obor operátorů pro množinu A a $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, pak množinu všech operátorových součinů $a\alpha$, kde $a \in B$, $\alpha \in \Omega$, označíme symbolem $B\Omega$.

Pozn. 1/I: Zřejmě pak platí $B\Omega \subset A\Omega$, a poněvadž $A\Omega \subset A$, je také $B\Omega \subset A$. Jestliže platí vztah $A\Omega \subset A$, pak také $A\{\alpha\} \subset A$ pro každé $\alpha \in \Omega$ a obráceně. Místo $A\{\alpha\}$ píšeme stručněji $A\alpha$.

D3/I: Neprázdná podmnožina B množiny A/Ω se nazývá *přípustnou podmnožinou* pro obor operátorů Ω, když platí

(3,1) $b\alpha \in B$ pro každé $b \in B$ a každé $\alpha \in \Omega$, tj. když

(3',1) $B\Omega \subset B$.

Pozn. 2/I: Na přípustnou podmnožinu B dané množiny A s oborem operátorů Ω se tedy můžeme dívat jako na množinu s týmž oborem operátorů Ω, tj. B/Ω.

Úmluva 3/I: Mluvíme-li o přípustných podmnožinách, pak to znamená, pokud není řečeno jinak, že jde o neprázdné přípustné podmnožiny jedné a téže množiny s daným oborem operátorů Ω.

V 1/I: a) Součet libovolného neprázdného systému přípustných podmnožin je přípustná podmnožina.

b) Pro operátorové násobení vzhledem k neprázdnému součtu neprázdných podmnožin množiny B/Ω platí zákon distributivní, tj.

$(\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots)\,\alpha = \bar{a}_1\alpha \cup \bar{a}_2\alpha \cup \bar{a}_3\alpha \cup \ldots$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Nechť $\bar{A}$ je neprázdný systém přípustných podmnožin množiny B/Ω, tj. nechť platí $\bar{a}_i\alpha \subset \bar{a}_i$, $\bar{a}_i \subset B$, $i = 1,2,3,\ldots$ a pro každé $\alpha \in \Omega$. Nechť $\mathbf{s}\bar{A} = \bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots$. Protože každý prvek $a \in \mathbf{s}\bar{A}$ patří do některé z přípustných podmnožin, třeba do $\bar{a}_i$, pak pro každý operátor $\alpha \in \Omega$ platí $a\alpha \in \bar{a}_i\alpha \subset \bar{a}_i$, a tedy také $a\alpha \in \mathbf{s}\bar{A}$, tj. $(\mathbf{s}\bar{A})\alpha \subset \mathbf{s}\bar{A}$ pro každé $\alpha \in \Omega$, a $\mathbf{s}\bar{A}$ je přípustná podmnožina.

b) Každý prvek $a\alpha \in (\mathbf{s}\bar{A})\alpha$ patří alespoň do jedné z podmnožin $\bar{a}_i\alpha$, neboť a patří aspoň do jedné podmnožiny $\bar{a}_i$, tj. platí

$$(4,1)\quad (\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots)\,\alpha \subset \bar{a}_1\alpha \cup \bar{a}_2\alpha \cup \bar{a}_3\alpha \cup \ldots$$

pro každé $\alpha \in \Omega$. Uvažujme nyní prvek $a_1 \in \bar{a}_1\alpha \cup \bar{a}_2\alpha \cup \ldots$. Pak prvek a_1 patří aspoň do jedné z uvedených podmnožin, např. do $\bar{a}_i\alpha$. Podmnožina $\bar{a}_i\alpha$ je tvořena všemi prvky $a\alpha$, kde $a \in \bar{a}_i$, $\bar{a}_i \subset \mathbf{s}\bar{A}$, a tedy v $\bar{a}_i$ existuje aspoň jeden prvek a tak, že $a_1 = a\alpha$, tj. $a\alpha \in (\mathbf{s}\bar{A})\alpha$. Platí tedy

$$(5,1)\quad (\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots)\,\alpha \supset \bar{a}_1\alpha \cup \bar{a}_2\alpha \cup \bar{a}_3\alpha \cup \ldots$$

pro každé $\alpha \in \Omega$. Pak (4,1) a (5,1) dávají vztah

$$(6,1)\quad (\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots)\,\alpha = \bar{a}_1\alpha \cup \bar{a}_2\alpha \cup \bar{a}_3\alpha \cup \ldots,$$

pro každé $\alpha \in \Omega$. Podle úmluvy 2/I můžeme tedy psát

$$(\bar{a}_1 \cup \bar{a}_2 \cup \bar{a}_3 \cup \ldots)\Omega = \bar{a}_1\Omega \cup \bar{a}_2\Omega \cup \bar{a}_3\Omega \ldots.$$

Úmluva 4/I: Číslice 1,2,3, ... v důkazu **V 1/I** a všude jinde v práci, kde jsou používány jako indexy, slouží jenom k označení různých prvků a nikterak to neznamená, že by množina, jejíž prvky mají za indexy číslice, musela být spočetná.

V 2/I: Neprázdný průnik libovolného systému přípustných podmnožin je přípustná podmnožina.

Důkaz: Nechť $\bar{A}$ je neprázdný systém přípustných podmnožin $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots$ množiny B/Ω, tj. nechť platí

$$(7,1)\quad \bar{a}_i\,.\,\alpha \subset \bar{a}_i, \text{ pro každé } \bar{a}_i \in \bar{A} \text{ a každé } \alpha \in \Omega\,.$$

Označme $P = \bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{a}_3 \cap \ldots$, pak $P\alpha = (\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots)\alpha$. Každý prvek $a \in P$ patří současně do všech podmnožin $\bar{a}_1$ $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, ... daného systému $\bar{A}$. Podle předpokladu alespoň jeden takový prvek existuje. Pak podle (7,1) patří prvek $a\alpha$ současně do všech podmnožin $\bar{a}_i\alpha$. Patří tedy $a\alpha \in P\alpha$ do průniku $\bar{a}_1\alpha \cup \bar{a}_2\alpha \cap \bar{a}_3\alpha \cap \ldots$, tj. platí

$$(8,1)\quad P\alpha = (\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{a}_3 \cap \ldots)\alpha \subset \bar{a}_1\alpha \cap \bar{a}_3\alpha \cap \bar{a}_3\alpha \cap \ldots,$$

a tedy vzhledem k (7,1) je $P\alpha \subset P$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Je tedy P přípustná podmnožina v B/Ω.

Pak podle úmluvy 2/1 můžeme psát

$$P\Omega = (\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{a}_3 \cap \ldots)\Omega \subset \bar{a}_1\Omega \cap \bar{a}_2\Omega \cap \bar{a}_3\Omega \cap \ldots.$$

V. 3/I: Nechť přípustné podmnožiny B, C množiny A/Ω jsou incidentní (disjunktní). Pak také podmnožiny $B\Omega$, $C\Omega$, množiny $A\Omega$ jsou incidentní (disjunktní).

Důkaz: Nechť B, C jsou incidentní, tj. nechť $P = B \cap C \neq \emptyset$. Pak podle **V 2/I** $B\Omega \cap C\Omega \supset P\Omega \neq \emptyset$, neboť $P = B \cap C \neq \emptyset$ je přípustná podmnožina. Jsou-li B, C disjunktní, tj. je-li $B \cap C = \emptyset$, pak tím spíše $B\Omega \cap C\Omega = \emptyset$, neboť $B\Omega \subset B$, $C\Omega \subset C$.

V 4/I: Nutná a postačující podmínka k tomu, aby neprázdná podmnožina $B \neq G$ v množině G/Ω byla přípustná, je, aby B byla průnikem (aspoň) dvou navzájem různých přípustných podmnožin A, C množiny G/Ω.

Důkaz: Jsou-li A, C přípustné podmnožiny v G/Ω, pak $A \cap C = B$ je přípustná podmnožina podle **V 2/I.** Jestliže $B = A \neq G$, pak stačí položit $C = G$ a věta je dokázána.

Pozn. 3/I: Zřejmě však podmnožina nepřípustné podmnožiny může být přípustná.

Příklad: Budiž G množina všech zbytkových tříd *mod* 32, tj. $G = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{31}\}$ a obor operátorů Ω nechť je množina přirozených čísel 1, 2, 4, tj. $\Omega = \{1,2,4\}$. Operátorové násobení nechť je definováno jako přirozený násobek zbytkové třídy, tj. pro

$$a \in G, \alpha \in \Omega \text{ je } a\alpha = \alpha \times a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{\alpha\text{-krát}}.$$

Pak přípustné podmnožiny různé od G jsou zřejmě $A = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \ldots, \overline{28}\}$, $F = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}, \overline{24}\}$, $B = \{\bar{0}, \overline{16}\}$. Je $B = A \cap C$, resp. $B = F \cap C, C = B$. Podmnožina $D = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \ldots, \overline{29}, \overline{31}\}$ je nepřípustná, ale $E = \{\bar{0}\}$, jež je podmnožinou v D, je přípustná.

§ 2. Přípustné rozklady

Úmluva 5/I: Nechť G značí všude neprázdnou množinu.

D 4/I: *Rozkladem* $\bar{A}$ v množině G rozumíme každý neprázdný systém neprázdných podmnožin v G, z nichž každé dvě jsou disjunktní. Když rozklad $\bar{A}$ je takový, že každý prvek z G je v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, pak říkáme, že $\bar{A}$ je rozklad na množině G, nebo že pokrývá množinu G nebo že je rozkladem množiny G.

D 5/I: Nechť $\bar{A}$ je rozklad *v* (*na*) množině G/Ω. Nechť každý prvek $\bar{a}$ rozkladu $\bar{A}$ má tu vlastnost, že pro každé libovolné (pevné) $\alpha \in \Omega$ platí

$$(1,2) \qquad \bar{a}\alpha \subset \bar{b},$$

kde $\bar{b} \in \bar{A}$, tj. $a\alpha \in \bar{b}$ pro každé $a \in \bar{a}$. Přiřadíme-li každé uspořadané dvojici $(\bar{a},\alpha)$, $\bar{a} \in \bar{A}$, $\alpha \in \Omega$ onen prvek $\bar{b} \in \bar{A}$, pro nějž platí (1,2), pak říkáme, že $\bar{A}$ je *přípustný rozklad* v (na) množině G/Ω. To, že prvku $\bar{a}$ je operací přiřazen prvek $\bar{b}$ píšeme

$$(2,2) \qquad \bar{a} \cdot \alpha = \bar{b} \text{ (tečka nahoře).}$$

Pozn. 4/I: a) Ve vzorci (2,2) při operátorovém násobení píšeme mezi $\bar{a}$ a α tečku nahoře, abychom naznačili, že $\bar{a}$ uvažujeme jako prvek rozkladu $\bar{A}$ a nikoliv jako podmnožinu v G. Pak totiž platí podle (1,2) jen $\bar{a}\alpha \subset \bar{b}$.

b) Je-li $\bar{A}$ přípustný rozklad v (na) G/Ω, pak zřejmě má rozklad $\bar{A}$ množinu Ω za obor operátorů, což píšeme $\bar{A}/\Omega$. Symbolem $\bar{A}\alpha$ označuji analogicky jako v úmluvě 2/I a pozn. 1/1 množinu všech součinů $\bar{a} \cdot \alpha$, $\bar{a} \in \bar{A}$, $\alpha \in \Omega$, podobně $\bar{A}\Omega$. Platí tedy vždy $\bar{A}\alpha \subset \bar{A}$, $\bar{A}\Omega \subset \bar{A}$. Přitom je zřejmě $\bar{A}\alpha$ rozklad v G/Ω pro každé $\alpha \in \Omega$.

c) Součet $\mathbf{s}\bar{A}$ systému $\bar{A}$ je zřejmě přípustná podmnožina v G/Ω vzhledem k (1,2), tj. $(\mathbf{s}\bar{A})\alpha \subset \mathbf{s}\bar{A}$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

d) Je-li $\bar{A}$ rozklad v (na) množině G/Ω a je-li každý prvek $\bar{a}$ rozkladu $\bar{A}$ přípustná podmnožina v G, pak zřejmě $\bar{A}$ je přípustný rozklad v (na) G a každý operátor z Ω je identický. Platí totiž $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{a}$ pro každé $\bar{a} \in \bar{A}$ a každé $\alpha \in \Omega$, neboť podle předpokladu je vždy $\bar{a}\alpha \subset \bar{a}$.

Důležitými rozklady na množině G jsou oba tzv. krajní rozklady množiny G. *Největší rozklad* množiny G, který označujeme $\bar{G}_{max}$ se skládá z jediného prvku G. *Nejmenší rozklad*, $\bar{G}_{min}$, je systém všech množin skládajících se vždy z jednoho prvku množiny G. Zřejmě je libovolný rozklad $\bar{A}$ v množině G rozkladem na množině $\mathbf{s}\bar{A}$.

V 5/I: Nechť G je množina s oborem operátorů Ω. Pak největší rozklad $\bar{G}_{max}$ je přípustný.

Důkaz: Rozklad $\bar{G}_{max}$ obsahuje jediný prvek, a to celou množinu G. Poněvadž $G\alpha \subset G$ pro každé $\alpha \in \Omega$ podle předpokladu naší věty, proto je $\bar{G}_{max}$ přípustný rozklad na G podle **D 5/1** a podle (2,2) je $(\bar{G}_{max}) \cdot \alpha = \bar{G}_{max}$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

V 6/I: Nechť G je množina s oborem operátorů Ω. Pak nejmenší rozklad $\bar{G}_{min}$ množiny G je přípustný a platí $(\bar{G}_{min})\alpha = (\overline{G\alpha})_{min}$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Rozklad $\bar{G}_{min}$ obsahuje jako prvky jednotlivé prvky z G, tj. $\bar{G}_{min} = G$. Podle předpokladu naší věty je $a\alpha = b$, $a,b \in G$, a tedy $\bar{G}_{min}$ je podle **D 5/I** přípustný rozklad ($\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$). Poněvadž $\bar{G}_{min} = G$, proto $(\bar{G}_{min})\alpha = G\alpha$. Protože $(\overline{G\alpha})_{min}$ je systém všech množin skládajících se vždy z jednoho prvku množiny $G\alpha$, tj. $(\overline{G\alpha})_{min} = G\alpha$, proto platí $(\bar{G}_{min})\alpha = (\overline{G\alpha})_{min}$.

V 7/I: Nechť $\bar{A}$ je přípustný rozklad v G/Ω. Pak $\bar{A}$ je přípustný rozklad na množině $\mathbf{s}\bar{A}/\Omega$.

Důkaz: Předně je $\bar{A}$ rozklad na $\mathbf{s}\bar{A}$, jak bylo shora řečeno. Podle pozn. 4/I c) je $\mathbf{s}\bar{A}$ přípustná podmnožina v G, tj. $\mathbf{s}\bar{A}$ má týž obor operátorů Ω jako rozklad $\bar{A}$. Je tedy $\bar{A}$ přípustný rozklad na $\mathbf{s}\bar{A}$.

D 6/I: Nechť $\bar{A}$ je rozklad a B podmnožina v G. Množina všech prvků $\bar{a} \in \bar{A}$ incidentních s B se nazývá *obal* podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ a označujeme jej symbolem $B \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset B$.

Platí, že $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$ tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{s}\bar{A} \cap B = \emptyset$. Je-li $B \sqsubset A \neq \emptyset$, je $B \sqsubset \bar{A}$ rozkladem v množině G (B,2.3.1./12).

V 8/I: Nechť $\bar{A}$ je přípustný rozklad a B přípustná podmnožina v množině G/Ω a nechť $B \sqsubset \bar{A}$ není prázdná množina. Pak obal $B \sqsubset \bar{A}$ je přípustný rozklad v G/Ω, tj. $(B \sqsubset A)/\Omega$.

Důkaz: Podle předpokladu věty je $B \sqsubset \bar{A} = \bar{C}$ neprázdný systém neprázdných disjunktních podmnožin v G, a tedy rozklad v G. Prvky $\bar{c}$ rozkladu $\bar{C}$ jsou ty prvky rozkladu $\bar{A}$, které jsou incidentní s B, tj. pro každé $\bar{c} \in \bar{C}$ platí $\bar{c} \cap B \neq \emptyset$. Nechť α je libovolný (pevný) operátor z Ω. Protože $\bar{A}$ je přípustný rozklad, pak $\bar{c} \cdot \alpha = \bar{e}$, $\bar{e} \in \bar{A}$, tj. $\bar{c}\alpha \subset \bar{e}$. Nechť $c \in \bar{c} \cap B$, pak $c\alpha \in \bar{e}$ a současně $c\alpha \in B\alpha$. Protože $B\alpha \subset B$, je současně $c\alpha \in B$. Je tedy prvek $\bar{e} \in \bar{A}$ incidentní s B, a tedy $\bar{e} = \bar{c} \cdot \alpha \in B \sqsubset \bar{A}$, tj. pro každé $\bar{c} \in \bar{C} = B \sqsubset \bar{A}$ a každé $\alpha \in \Omega$ platí $\bar{c} \cdot \alpha = \bar{e} \in B \sqsubset \bar{A}$. Tím je dokázáno, že $B \sqsubset \bar{A}$ je přípustný rozklad v G/Ω, tj. $(B \sqsubset A)/\Omega$.

Důsledek 1/I: Je-li $\bar{c} \in \bar{A}$ incidentní s B, pak také $\bar{c}\alpha$ je incidentní s $B\alpha$. Důkaz tvrzení je obsažen v důkazu předešlé věty.

D 7/I: Nechť $\bar{A}$ je rozklad a B podmnožina v množině G. Množina všech neprázdných průniků jednotlivých prvků v $\bar{A}$ s podmnožinou B se nazývá *průsek* rozkladu $\bar{A}$ s podmnožinou B nebo podmnožiny B s rozkladem $\bar{A}$ a označujeme jej symbolem $\bar{A} \sqcap B$ nebo $B \sqcap \bar{A}$.

Průsek $\bar{A} \sqcap B = \emptyset$ tehdy a jen tehdy, když $\mathbf{s}\bar{A} \cap B = \emptyset$. Je-li $\bar{A} \sqcap B \neq \emptyset$, je $\bar{A} \sqcap B$ rozklad v G a dokonce rozklad v B. Když $\bar{A}$ je rozklad na G a $B \neq \emptyset$, pak $B \sqsubset \bar{A}$ i $\bar{A} \sqcap B$ jsou neprázdné systémy množin, z nichž první je podmnožina v $\bar{A}$ a druhý je rozklad na B. Každý rozklad $\bar{A}$ na G a neprázdná podmnožina B v G určují jednak jistou neprázdnou podmnožinu v $\bar{A}$, totiž obal $B \sqsubset \bar{A}$, jednak jistý rozklad na B, totiž průsek $B \sqcap \bar{A}$ (B, 2.3.2/12).

V 9/I: Nechť $\bar{A}$ je rozklad a B podmnožina v G. Pak existuje prosté zobrazení obalu $B \sqsubset \bar{A}$ na průsek $B \sqcap \bar{A}$. Toto zobrazení je dáno incidencí prvků, jestliže $\mathbf{s}\bar{A} \cap B \neq \emptyset$.

Důkaz: Jestliže $\bar{A} \sqcap B = \emptyset$, pak také $B \sqsubset \bar{A} = \emptyset$ a obráceně a věta je dokázána. Jestliže $\mathbf{s}\bar{A} \cap B \neq \emptyset$, pak každému prvku $\bar{a} \in B \sqsubset \bar{A}$ přiřadíme ten prvek $\bar{x} \in B \sqcap \bar{A}$, pro nějž platí $\bar{x} = \bar{a} \cap B$. Poněvadž prvky rozkladu $\bar{A}$ jsou disjunktní podmnožiny v G, pak toto zobrazení je zřejmě prosté zobrazení $B \sqsubset \bar{A}$ na $B \sqcap \bar{A}$.

V 10/1: Nechť $\bar{A}$ je přípustný rozklad a B přípustná podmnožina v G/Ω a nechť průsek $B \sqcap \bar{A} \neq \emptyset$. Pak průsek $B \sqcap \bar{A}$ je přípustný rozklad v G/Ω, tj. $(B \sqcap \bar{A})/\Omega$.

Důkaz: Podle předpokladu průsek $B \sqcap \bar{A} = \bar{X}$ je neprázdný systém neprázdných disjunktních podmnožin v G, a tedy rozklad v G. Prvky $\bar{x}$ rozkladu $\bar{X}$

jsou ty, pro něž platí $\bar{x} = \bar{a} \cap B \neq \emptyset$. Poněvadž $\bar{a}$ je prvek přípustného rozkladu $\bar{A}$ a $\bar{x} \subset \bar{a}$, pak pro každý operátor $\alpha \in \Omega$ platí $\bar{x}\alpha \subset \bar{a}\alpha$ a současně $\bar{x}\alpha \subset \subset B\alpha$, neboť $\bar{x} \subset B$ a B je přípustná podmnožina. Je tedy $\bar{x}\alpha \neq \emptyset$ a $\bar{x}\alpha \subset \subset \bar{a}\alpha \cap B\alpha$. Protože $\bar{A}$ je přípustný rozklad, je $\bar{a}\alpha \subset \bar{b}$, kde $\bar{b} \in \bar{A}$. Poněvadž $B\alpha \subset B$, je také $\bar{x}\alpha \subset \bar{b} \cap B = \bar{y}$, $\bar{y} \in B \sqcap \bar{A}$. Je tedy splněna podmínka (1,2) z D 5/I. Označíme-li pak $\bar{x} \cdot \alpha = \bar{y}$, je $B \sqcap A$ přípustný rozklad, tj. $(B \sqcap \bar{A})\alpha \subset \subset B \sqcap \bar{A}$ pro každé $\alpha \in \Omega$, čili $(B \sqcap \bar{A})/\Omega$.

D 8/I: Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné rozklady na G. Nechť každý prvek rozkladu $\bar{A}$ je součtem některých prvků rozkladu $\bar{B}$. Pak říkáme, že $\bar{A}$ je *zákryt* rozkladu $\bar{B}$ a $\bar{B}$ je že *zjemněním* rozkladu $\bar{A}$, což označujeme symbolem $\bar{A} \geqq \bar{B}$ nebo $\bar{B} \leqq \bar{A}$. Systém všech podmnožin v rozkladu $\bar{B}$, z nichž každá se skládá ze všech prvků rozkladu $\bar{B}$, které jsou části vždy téhož prvku v $\bar{A}$, je jistý rozklad $\bar{\bar{B}}$ rozkladu $\bar{B}$. Říkáme, že tento rozklad $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{B}$ vynucuje zákryt $\bar{A}$ rozkladu $\bar{B}$, nebo že zákrytu $\bar{A}$ rozkladu $\bar{B}$ přísluší rozklad $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{B}$.

V 11/I: Nechť $\bar{B}$ je rozklad na G a $\bar{\bar{B}}$ rozklad na $\bar{B}$. Nechť $\bar{A}$ je zákryt rozkladu $\bar{B}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$. Pak existuje prosté zobrazení $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{A}$, v němž každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ je přiřaděn právě ten prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, pro který platí, že $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, kde $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$.

Důkaz: Součet $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, kde $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$, je určen jednoznačně, a tedy každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ je přiřaděn právě jeden prvek $\bar{a} \in \bar{A}$ a naopak.

V 12/I: Nechť $\bar{B}$ je přípustný rozklad na G/Ω a nechť přípustný rozklad $\bar{A}$ na G je zákrytem $\bar{B}$. Pak rozklad $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{B}$ příslušný zákrytu $\bar{A}$ je přípustný rozklad na $\bar{B}$, tj. $\bar{\bar{B}}/\Omega$.

Důkaz: Jak víme, je $\bar{\bar{B}}$ rozklad na $\bar{B}$. Stačí dokázat, že je přípustný. Každý prvek $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ je množina všech prvků $\bar{b} \in \bar{B}$, pro něž platí

(3,2) $$\mathbf{U}\bar{\bar{b}} = \bar{a}\,, \quad \text{kde} \quad \bar{a} \in \bar{A}\,.$$

Nyní pro každý operátor $\alpha \in \Omega$ platí $\bar{a}\alpha = (\mathbf{U}\bar{\bar{b}})\alpha = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}\alpha$ podle **V 1/I** b). Protože $\bar{A}$ je přípustný rozklad, je $\bar{a}\alpha \subset \bar{a} \cdot \alpha = \bar{d}$, $\bar{d} \in \bar{A}$. Protože také $\bar{B}$ je přípustný rozklad, je $\bar{b}\alpha \subset \bar{b} \cdot \alpha$, a tedy

(4,2) $$\bar{a}\alpha = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}\alpha \subset \mathbf{U}\bar{\bar{b}} \cdot \alpha = \bar{e}\,, \quad \text{kde} \quad \bar{e} \subset G\,.$$

Protože jednak $\bar{a}\alpha \subset \bar{d}$ a jednak $\bar{a}\alpha \subset \bar{e}$, pak $\bar{e}$ a $\bar{d}$ jsou incidentní, neboť $\bar{a}\alpha \neq \emptyset$, při čemž

(5,2) $$\bar{e} \subset \bar{d}\,, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{U}\bar{\bar{b}} \cdot \alpha \subset \bar{d}\,.$$

Protože $\bar{A} \geqq \bar{B}$, pak $\bar{b} \cdot \alpha$ je podmnožina právě jednoho prvku rozkladu $\bar{A}$. Kdyby nyní neplatilo $\bar{e} \subset \bar{d}$, pak v $\bar{e}$ existuje aspoň jeden prvek e tak, že $e \bar{\in} \bar{d}$. Tento prvek e musí ležet právě v jednom prvku $\bar{b} \cdot \alpha$ rozkladu $\bar{B}$. Pak by $\bar{b} \cdot \alpha$ nebylo podmnožinou v $\bar{d}$, přitom však $\bar{a}\alpha = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}\alpha \subset \bar{d}$, a to je spor. Je tedy vždy splněn vztah (5,2). Označme nyní $\bar{c} \in \bar{\bar{B}}$ množinu všech prvků $\bar{c} \in \bar{B}$, pro něž platí $\mathbf{U}\,\bar{c} = \bar{d}$. Vzhledem k (5,2) pak platí

(6,2) $$\bar{\bar{b}}\alpha \subset \bar{\bar{c}}\,,$$

neboť $\bar{\bar{b}}\alpha$ je množina všech prvků $\bar{b} \cdot \alpha$, $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$. Tedy podle **D 5/I** můžeme psát $\bar{\bar{b}} \cdot \alpha = \bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{c}} \in \bar{\bar{B}}$, a $\bar{\bar{B}}$ je tedy přípustný rozklad na $\bar{\bar{b}}/\Omega$, tj. $\bar{\bar{B}}/\Omega$.

V 13/I. Nechť $\bar{B}$ je přípustný rozklad na G/Ω a $\bar{\bar{B}}$ přípustný rozklad na $\bar{B}$. Pak zákryt $\bar{A}$ rozkladu $\bar{B}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$ je přípustný rozklad na G, tj. $\bar{A}/\Omega$.

Důkaz: Zákryt $\bar{A}$ je rozklad na G, jak víme. Zbývá dokázat, že je přípustný. Zákryt $\bar{A}$ rozkladu $\bar{B}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{B}$ je systém všech disjunktních podmnožin $\bar{a} \subset G$, pro něž platí

(7,2) $$\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}\,, \quad \text{kde} \quad \bar{b} \in \bar{B} \quad \text{a současně} \quad \bar{b} \in \bar{\bar{b}},\ \bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}.$$

Protože $\bar{\bar{B}}$ je přípustný rozklad, je

(8,2) $$\bar{\bar{b}} \cdot \alpha = \bar{\bar{c}}\,, \quad \text{tj.} \quad \bar{\bar{b}}\alpha \subset \bar{\bar{c}}\,, \quad \text{kde} \quad \bar{\bar{c}} \in \bar{\bar{B}}\,,$$

a vzhledem k tomu, že $\bar{B}$ je rovněž přípustný platí

(9,2) $$\bar{b} \cdot \alpha = \bar{c}\,, \quad \text{tj.} \quad \bar{b}\alpha \subset \bar{c}\,, \quad \text{kde} \quad \bar{c} \in \bar{B} \text{ a současně}$$
$$\bar{c} \in \bar{\bar{c}}\,, \quad \bar{\bar{c}} \in \bar{\bar{B}}\,.$$

Uvažujme nyní onen prvek $\bar{d} \in \bar{A}$, pro který platí $\bar{d} = \mathbf{U}\bar{\bar{c}}$, kde pro $\bar{\bar{c}}$ platí podmínky (9,2). Pak vzhledem k těmto podmínkám platí

(10,2) $$\bar{d} \supset \mathbf{U}\bar{\bar{b}}\alpha\,.$$

Protože $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, pak $\bar{a}\alpha = (\mathbf{U}\bar{\bar{b}})\alpha = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}\alpha$ podle **V 1/I** b), a tedy ze vztahu (10,2) nyní plyne $\bar{a}\alpha \subset \bar{d}$. Pak podle **D 5/1** můžeme psát $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{d}$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Jest tedy zákryt $\bar{A}$ přípustný rozklad na G/Ω, tj. $\bar{A}/\Omega$.

§ 3. Ω — zobrazení

D 9/I: Nechť G, $G^\star$ jsou neprázdné množiny s týmž oborem operátorů Ω. Nechť existuje zobrazení $\mathbf{g}$ množiny G do množiny $G^\star$, jež má tuto vlastnost: Je-li a libovolný prvek z G a $a^\star = \mathbf{g}a$ jeho obraz v $G^\star$, pak pro každý operátor $\alpha \in \Omega$ platí

(1,3) $$(\mathbf{g}a)\alpha = \mathbf{g}(a\alpha)\,, \quad \text{tj.} \quad a^\star\alpha = (a\alpha)^\star\,.$$

Pak toto zobrazení $\mathbf{g}$ nazýváme *Ω-zobrazení* množiny G *do* množiny $G^\star$.

Pozn. 5/I: a) Analogicky definujeme Ω-zobrazení množiny G *na* množinu $G^\star$, *prosté* Ω-zobrazení množiny G *do* množiny $G^\star$ respektive na množinu $G^\star$.

b) Je-li $a\alpha = b$, a, $b \in G$, $\mathbf{g}a = a^\star$, $\mathbf{g}b = b^\star$, $a^\star$, $b^\star \in G$, pak (1,3) má tvar

(1′,3) $$a^\star\alpha = (a\alpha)^\star = b^\star.$$

Nechť nyní $\mathbf{g}$ značí libovolné zobrazení množiny G na množinu $G^\star$. Pak systém $\bar{G}$ všech podmnožin v G, z nichž každá se skládá ze všech vzorů v zobrazení $\mathbf{g}$ vždy téhož prvku v $G^\star$, je rozklad množiny G. O tomto rozkladu pravíme, že přísluší nebo patří k zobrazení $\mathbf{g}$.

Když každému prvku $\bar{a} \in \bar{G}$ přiřadíme onen prvek $a^\star \in G^\star$, z jehož vzorů se skládá, obdržíme jisté zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{G}$ na množinu $G^\star$, a je zřejmé, že $\boldsymbol{i}$ je zobrazení prosté. Odtud plyne, že rozklad $\bar{G}$ množiny G, příslušný k zobrazení $\mathbf{g}$, a množina $G^\star$ jsou ekvivalentní množiny.

Všimněme si zejména krajních případů: Když $G^\star$ se skládá z jednoho prvku, pak příslušný rozklad G je $\bar{G}_{max}$; když $\mathbf{g}$ je prosté zobrazení G na $G^\star$, pak příslušný rozklad je $\bar{G}_{min}$ (B, 3.5/29—30).

V 14/I: Nechť $\mathbf{g}_1$ je Ω-zobrazení množiny G_1/Ω do množiny G_2/Ω a $\mathbf{g}_2$ nechť je Ω-zobrazení množiny G_2 do množiny G_3/Ω. Pak složené zobrazení $\mathbf{g} = \mathbf{g}_2\mathbf{g}_1$ je Ω-zobrazení množiny G_1 do množiny G_3.

Důkaz: Předně $\mathbf{g} = \mathbf{g}_2\mathbf{g}_1$ je zobrazení G_1 do G_3, při čemž pro každé $a_1 \in G_1$ platí $\mathbf{g}a_1 = \mathbf{g}_2(\mathbf{g}_1a_1) = a_3$, kde $a_3 \in G_3$ (B, 3.7.1/30—31). Označme $\mathbf{g}_1a_1 = a_2$, $a_2 \in G_2$, $a_1\alpha = a_1'$, $a_2\alpha = a_2'$, $a_3\alpha = a_3'$. Pak $\mathbf{g}_1a_1' = \mathbf{g}_1(a_1\alpha) = (\mathbf{g}_1a_1)\alpha = a_2\alpha = a_2'$; $\mathbf{g}_2a_2' = \mathbf{g}_2(a_2\alpha) = (\mathbf{g}_2a_2)\alpha = a_3\alpha = a_3'$. Pak $\mathbf{g}a_1' = \mathbf{g}_2(\mathbf{g}_1a_1') = a_3'$, a tedy $\mathbf{g}(a_1\alpha) = a_3\alpha = (\mathbf{g}a_1)\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Tím je věta dokázána.

V 15/I: Pro skládání Ω-zobrazení platí zákon asociativní.

Důkaz: Nechť $\mathbf{g}_i$ je Ω-zobrazení G_i/Ω do G_{i+1}/Ω, $i = 1, 2, 3$. Pak pro zobrazení $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ platí $(\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2)\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1(\mathbf{g}_2\mathbf{g}_3)$ (viz B, 3.7.2/31). Avšak podle V 14/I zobrazení $\boldsymbol{h} = \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ a zobrazení $\mathbf{g} = \mathbf{g}_2\mathbf{g}_3$ jsou Ω-zobrazení, a tedy také $\boldsymbol{h}\mathbf{g}_3$, $\mathbf{g}_1\mathbf{g}$ jsou Ω-zobrazení a věta je dokázána.

V 16/I: Nechť G je množina s oborem operátorů Ω. Pak existuje prosté Ω-zobrazení G na G.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{i}$ je identické zobrazení množiny G na sebe. Pak je zřejmě Ω-zobrazením.

V 17/I: Nechť $\mathbf{g}$ je prosté Ω-zobrazení G_1/Ω na G_2/Ω. Pak zobrazení $\mathbf{g}^{-1}$ inversní k zobrazení $\mathbf{g}$ je prosté Ω-zobrazení G_2 na G_1.

Důkaz: Jestliže $\mathbf{g}a_1 = a_2$, kde $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$, pak $\mathbf{g}^{-1}a_2 = a_1$ (B, 3.4.1/28). Nechť $a_1\alpha = a_1'$, $a_2\alpha = a_2'$. Pak $\mathbf{g}a_1' = \mathbf{g}(a_1\alpha) = (\mathbf{g}a_1)\alpha = a_2\alpha = a_2'$, a tedy $\mathbf{g}^{-1}a_2' = a_1'$. Pak $\mathbf{g}^{-1}(a_2\alpha) = \mathbf{g}^{-1}a_2' = a_1' = a_1\alpha = (\mathbf{g}^{-1}a_2)\alpha$. Protože $\mathbf{g}^{-1}$ je prosté zobrazení G_2 na G_1, je věta dokázána.

V 18/I: Nechť existuje prosté Ω-zobrazení $\mathbf{g}_1$ množiny G_1/Ω na množinu G_2/Ω a prosté Ω-zobrazení $\mathbf{g}_2$ množiny G_2 na množinu G_3/Ω. Pak $\mathbf{g} = \mathbf{g}_2\mathbf{g}_1$ je prosté Ω-zobrazení množiny G_1/Ω na množinu G_3/Ω.

Důkaz: Zobrazení $\mathbf{g} = \mathbf{g}_2\mathbf{g}_1$ je prosté zobrazení G_1 na G_3 (B, 3.7.1/31) a podle V 14/I je to Ω-zobrazení. Tím je věta dokázána.

Shrneme-li věty V 16, 17, 18/I v jednu větu, máme:

Důsledek 2/I: Prosté Ω-zobrazení množiny s oborem operátorů Ω na množinu s týmž oborem operátorů Ω je vztah reflexivní, symetrický a transitivní.

V 19/I: Nechť množiny A a B' mají týž obor operátorů Ω a nechť A' je přípustná podmnožina v A.

a) Nechť existuje prosté Ω-zobrazení $\mathbf{g}$ podmnožiny A' na B'. Pak existuje taková nadmnožina B na B', jež připouští obor operátorů Ω tak, že existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}$ množiny A/Ω na B/Ω. Zobrazení $\boldsymbol{f}$ v sobě obsahuje původní zobrazení $\mathbf{g}$.

b) Nechť existuje prosté Ω-zobrazení $\mathbf{g}_1$ množiny B' na podmnožinu A'. Pak existuje nadmnožina B na B', jež připouští obor operátorů Ω tak, že existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}_1$ množiny B na množinu A. Zobrazení $\boldsymbol{f}_1$ v sobě obsahuje původní zobrazení $\boldsymbol{g}_1$.

Důkaz: a) Nechť A^+ je množina všech prvků množiny A, které nepatří do A'. Nechť D je množina disjunktní s množinou B', jež je ekvivalentní s A^+, tj. taková, že existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{h}$ množiny A^+ na D. Nyní přiřadíme každému prvku $a \in A$ právě jeden prvek $b \in B = B' \cup D$ takto. Je-li $a \in A'$, pak $\boldsymbol{f}a = \boldsymbol{g}a = b$, $b \in B'$, je-li $a \in A^+$, pak $\boldsymbol{f}a = \boldsymbol{h}a = b$, $b \in D$. Užití operátorů z Ω na prvky z D definujeme takto. Je-li $a \in A$, $a\alpha = a' \in A$ a je-li $\boldsymbol{f}a' = b'$, $\boldsymbol{f}a = b$, $b, b' \in B$, pak definujeme $b\alpha = b'$. Platí tedy $\boldsymbol{f}(a\alpha) = \boldsymbol{f}a' = b' = b\alpha = (\boldsymbol{f}a)\alpha$ a tvrzení a) je dokázáno.

b) Sestrojme množinu $B = B' \cup D$ jako v případě a). Podle **V 17/I** existuje zobrazení inversní $\boldsymbol{g}_1^{-1} = \boldsymbol{g}$ podmnožiny A' na B', jež je prostým Ω-zobrazením. Pak podle a) existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}$ množiny A/Ω na B/Ω a podle **V 17/I** existuje inversní Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}^{-1} = \boldsymbol{f}_1$ množiny B/Ω na A/Ω, které je prostým zobrazením a obsahuje v sobě zobrazení $\boldsymbol{g}_1$. Tím je věta dokázána.

V 20/I: Nechť existuje zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G/Ω na množinu $G^\star$. Pak lze definovat operátorové násobení prvků z $G^\star$ operátory z Ω tak, že $\boldsymbol{g}$ je Ω-zobrazení G na $G^\star$.

Důkaz: Nechť a, b jsou prvky z G, $a^\star$, $b^\star$ prvky z $G^\star$ takové, že $\boldsymbol{g}a = a^\star$, $\boldsymbol{g}b = b^\star$, $a\alpha = b$, $\alpha \in \Omega$. Definujeme-li nyní operátorový součin prvku $a^\star$ s operátorem α tak, že $a^\star\alpha = b^\star$, pak platí jednak $G^\star\alpha \subset G^\star$ pro každé $\alpha \in \Omega$, tj. $G^\star/\Omega$ a jednak $(\boldsymbol{g}a)\alpha = a^\star\alpha = b^\star = \boldsymbol{g}b = \boldsymbol{g}(a\alpha)$. Je tedy splněna podmínka (1,3) z D 9/I pro každé $\alpha \in \Omega$, a tedy $\boldsymbol{g}$ je Ω-zobrazení G/Ω na $G^\star/\Omega$.

V 21/1: Nechť existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G/Ω na množinu $G^\star$. Pak lze definovat operátorové násobení prvků z $G^\star$ operátory z Ω tak, že $\boldsymbol{g}$ je prosté Ω-zobrazení G na $G^\star$.

Důkaz: Definujeme-li násobení prvků z $G^\star$ operátory z Ω jako v důkazu předešlé věty, pak $\boldsymbol{g}$ je Ω-zobrazení G na $G^\star$, a protože $\boldsymbol{g}$ je prosté zobrazení G na $G^\star$, je věta dokázána.

V 22/I: Nechť existuje zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G na množinu $G^\star$ s oborem operátorů Ω. Pak rozklad $\bar{G}$ na G příslušný zobrazení $\boldsymbol{g}$ připouští obor operátorů Ω tak, že existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{G}$ na $G^\star$.

Důkaz: Nechť $\bar{a} \in \bar{G}$ je množina všech prvků $a \in G$, pro něž $\boldsymbol{g}a = a^\star$. Pak $\boldsymbol{i}$ je takové zobrazení $\bar{G}$ na $G^\star$, pro které $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^\star$. Jak již víme, je toto zobrazení prosté. Existuje tedy inversní zobrazení $\boldsymbol{i}^{-1}$ tak, že $\boldsymbol{i}^{-1}a^\star = \bar{a}$. Podle předchozí věty **V 21/I** lze definovat násobení prvků z $\bar{G}$ operátory z Ω tak, že $\boldsymbol{i}^{-1}$ je prosté Ω-zobrazení $G^\star$ na $\bar{G}$. Pak podle V 17/I je $\boldsymbol{i}$ rovněž prosté Ω-zobrazení $\bar{G}$ na $G^\star$. Tím je věta dokázána.

V 23/I: Nechť existuje zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G na množinu $G^\star/\Omega$. Pak lze definovat operátorové násobení prvků z G operátory z Ω tak, že $\boldsymbol{g}$ je Ω-zobrazení G na $G^\star$.

Důkaz: Podle **V 22/I** existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{G}$, příslušného k zobrazení $\boldsymbol{g}$, na množinu $G^\star$. Platí tedy pro $\bar{a}$, $\bar{b} \in \bar{G}$, $a^\star$, $b^\star \in G^\star$ vztahy $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^\star$, $\boldsymbol{i}\bar{b} = b^\star$, a jestliže $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{b}$, pak také $a^\star\alpha = b^\star$. Při tom platí $\boldsymbol{g}a = a^\star$ pro každé $a \in \bar{a}$, $\boldsymbol{g}b = b^\star$ pro každé $b \in \bar{b}$. Definujeme-li násobení prvku $a \in \bar{a}$

operátorem $\alpha \in \Omega$ tak, aby $a\alpha$ byl prvek z $\bar{b}$, tj. $a\alpha = b$, $b \in \bar{b}$, pak zřejmě jednak $G\alpha \subset G$ a jednak $\boldsymbol{g}(a\alpha) = (\boldsymbol{g}a)\alpha$. Jest totiž $\boldsymbol{g}(a\alpha) = \boldsymbol{g}b = b^\star = a^\star\alpha = (\boldsymbol{g}a)\alpha$ pro každé $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $\alpha \in \Omega$. Je tedy splněna podmínka (1,3) z D 9/I, a tedy $\boldsymbol{g}$ je Ω-zobrazení G na $G^\star$.

V 24/I: Nechť existuje Ω-zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G/Ω na množinu $G^\star/\Omega$. Pak platí:
a) Rozklad $\bar{G}$ množiny G příslušný k danému zobrazení $\boldsymbol{g}$ je přípustný, tj. $\bar{G}/\Omega$.
b) Existuje zobrazení množiny $G\alpha$ na množinu $G^\star\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Toto zobrazení je původní zobrazení $\boldsymbol{g}$.

Důkaz: a) Nechť $\bar{G}$ je rozklad příslušný k zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G/Ω na $G^\star/\Omega$. Nechť $\bar{a} \in \bar{G}$ je množina všech prvků $a \in G$, pro něž $\boldsymbol{g}a = a^\star$. Užijeme-li označení z pozn. 5/I b) a **D 9/I,** pak platí $a\alpha = b$, $\boldsymbol{g}(a\alpha) = \boldsymbol{g}b = b^\star$, a tedy $a\alpha \in \bar{b}$, kde $\bar{b} \in \bar{G}$ je množina všech vzorů prvku $b^\star$ v zobrazení $\boldsymbol{g}$, tj. $\bar{a}\alpha \subset \bar{b}$. Podle **D 5/1** definujeme $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{b}$ a $\bar{G}$ je přípustný rozklad na G, tj. $\bar{G}/\Omega$.
b) Podle **D 9/I** platí $\boldsymbol{g}(a\alpha) = (\boldsymbol{g}a)\alpha$. Užijeme-li označení z pozn. 5/I b), máme $\boldsymbol{g}b = \boldsymbol{g}(a\alpha) = (\boldsymbol{g}a)\alpha = a^\star\alpha = b^\star$. Je tedy každému prvku $b = a\alpha \in G\alpha$ zobrazením $\boldsymbol{g}$ přiřaděn jediný prvek $b^\star = a^\star\alpha \in G^\star\alpha$, a je tedy $\boldsymbol{g}$ zobrazení množiny $G\alpha$ do $G^\star\alpha$. Protože $\boldsymbol{g}$ je zobrazení G na $G^\star$, pak probíhá-li prvek a celou množinu G, probíhá prvek $a^\star$ celou množinu $G^\star$, a tedy $a^\star\alpha = b^\star$ celou množinu $G^\star\alpha$. Je tedy $\boldsymbol{g}$ zobrazení $G\alpha$ na $G^\star\alpha$, což platí pro každé $\alpha \in \Omega$.

V 25/I: Nechť existuje Ω-zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G/Ω na množinu $G^\star/\Omega$. Pak existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{G}$, příslušného k zobrazení $\boldsymbol{g}$, na množinu $G^\star$.

Důkaz: Jestliže každému prvku $\bar{a} \in \bar{G}$ rozkladu, příslušného k zobrazení $\boldsymbol{g}$, přiřadíme onen prvek $a^\star \in G^\star$, z jehož vzorů se skládá, dostaneme prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{G}$ na množinu $G^\star$ (B, 3.5/29—30). Jsou-li $a, b \in G$, $a^\star$, $b^\star \in G^\star$, $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{G}$ a platí-li $a\alpha = b$, $\boldsymbol{g}a = a^\star$ pro každé $a \in \bar{a}$, $\boldsymbol{g}b = b^\star$ pro každé $b \in \bar{b}$, pak také $a^\star\alpha = (\boldsymbol{g}a)\alpha = \boldsymbol{g}(a\alpha) = \boldsymbol{g}b = b^\star$. Tedy pro zobrazení $\boldsymbol{i}$ platí $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^\star$, $\boldsymbol{i}\bar{b} = b^\star$, při čemž $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{b}$, neboť $\bar{G}$ je přípustný rozklad. Nyní máme $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \alpha) = \boldsymbol{i}\bar{b} = b^\star = a^\star \cdot \alpha = (\boldsymbol{i}\bar{a}) \cdot \alpha$, tj. $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \alpha) = (\boldsymbol{i}\bar{a}) \cdot \alpha$.[1] To platí pro každé $\alpha \in \Omega$, a tedy je splněna podmínka (1,3) z D 9/I a $\boldsymbol{i}$ je prosté Ω-zobrazení rozkladu $\bar{G}$ na množinu $G^\star$.

V 26/I: Nechť rozklad $\bar{G}$ na G/Ω je přípustný a nechť existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{G}$ na množinu $G^\star$. Pak existuje Ω-zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G/Ω na $G^\star/\Omega$.

Důkaz: Nechť $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{G}$, $a^\star, b^\star \in G^\star$ a nechť platí $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{b}$, $\boldsymbol{i}\bar{a} = a^\star$, $\boldsymbol{i}\bar{b} = b^\star$. Pak také $a^\star\alpha = b^\star$, neboť $a^\star \cdot \alpha = (\boldsymbol{i}\bar{a}) \cdot \alpha = \boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \alpha) = \boldsymbol{i}\bar{b} = b^\star$[1]). Sestrojme nyní zobrazení $\boldsymbol{g}$ množiny G do množiny $G^\star$ tak, že pro každý prvek $a \in \bar{a}$ platí $\boldsymbol{g}a = a^\star$. Pak každý prvek z $G^\star$ má vzor v G a každý prvek z G obraz v $G^\star$, a tedy $\boldsymbol{g}$ je zobrazení G na $G^\star$. Nyní, protože $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{b}$, je $a\alpha \in \bar{b}$ pro každé $a \in \bar{a}$, a tedy platí $\boldsymbol{g}(a\alpha) = \boldsymbol{g}b = b^\star = a^\star\alpha = (\boldsymbol{g}a)\alpha$, tj. $\boldsymbol{g}(a\alpha) = (\boldsymbol{g}a)\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Je tedy splněna podmínka (1,3) z D 9/I a $\boldsymbol{g}$ je Ω-zobrazení množiny G/Ω na $G^\star/\Omega$.

[1]) Viz pozn. 6/I za V 28/I.

V 27/I: Nechť $\bar{A}$ je přípustný rozklad a B přípustná podmnožina v G/Ω a nechť $s\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Pak existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ obalu $B \sqsubset \bar{A}$ na průsek $B \sqcap \bar{A}$. Toto zobrazení je dáno incidencí prvků.

Důkaz: Podle **V 9/1** existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ obalu $B \sqsubset \bar{A}$ na průsek $B \sqcap \bar{A}$, jež je dáno incidencí prvků. Jsou-li $\bar{a}$, $\bar{b}$ ty prvky z $\bar{A}$, které jsou incidentní s B a označíme-li $\bar{x} = \bar{a} \cap B$, $\bar{y} = \bar{b} \cap B$, pak $\bar{x}$, $\bar{y}$ jsou z $B \sqcap \bar{A}$ a platí $\boldsymbol{i}\bar{a} = \bar{x}$, $\boldsymbol{i}\bar{b} = \bar{y}$. Podle **V 8/I** a **V 10/1** jsou $B \sqsubset \bar{A}$ a $B \sqcap \bar{A}$ přípustné rozklady, v G. Nechť tedy dále $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{b}$, pak také $\bar{x} \cdot \alpha = \bar{y}$, jak plyne z důkazu **V 10/I** Nyní platí $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \alpha) = (\boldsymbol{i}\bar{a}) \cdot \alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$, neboť $\boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \alpha) = \boldsymbol{i}\bar{b} = \bar{y} = \bar{x} \cdot \alpha = (\boldsymbol{i}\bar{a}) \cdot \alpha$. Protože prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ splňuje podmínku (1,3) z **D 9/1.** je $\boldsymbol{i}$ prosté Ω-zobrazení $B \sqsubset \bar{A}$ na $B \sqcap \bar{A}$.

V 28/I: Nechť $\bar{B}$ je přípustný rozklad na množině G/Ω, $\bar{\bar{B}}$ přípustný rozklad na $\bar{B}$ a $\bar{A}$ zákryt rozkladu $\bar{B}$ vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$. Pak existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{\bar{B}}$ na rozklad $\bar{A}$, v němž každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ je přiřaděn právě ten prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, pro který platí $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, kde $\bar{b} \in \bar{B}$, $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$.

Důkaz: Podle **V 11/I** existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ rozkladu $\bar{\bar{B}}$ na rozklad $\bar{A}$, v němž každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ je přiřaděn onen prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, pro který platí $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Nechť nyní $\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}} = \bar{a}$, $\boldsymbol{i}\bar{\bar{c}} = \bar{d}$, $\bar{\bar{b}}, \bar{\bar{c}} \in \bar{\bar{B}}$, $\bar{a}, \bar{d} \in \bar{A}$. Nechť dále $\bar{\bar{b}} \cdot \alpha = \bar{\bar{c}}$. Podle **V 13/I** je $\bar{A}$ přípustný rozklad na G a platí $\bar{a} \cdot \alpha = \bar{d}$, jak plyne z důkazu **V 13/I.** Protože $\boldsymbol{i}(\bar{\bar{b}} \cdot \alpha) = \boldsymbol{i}\bar{\bar{c}} = \bar{d} = \bar{a} \cdot \alpha = (\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}) \cdot \alpha$, proto $\boldsymbol{i}(\bar{\bar{b}} \cdot \alpha) = (\boldsymbol{i}\bar{\bar{b}}) \cdot \alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Je tedy splněna podmínka (1,3) z **D 9/I** a zobrazení $\boldsymbol{i}$ je prosté Ω-zobrazení $\bar{\bar{B}}$ na $\bar{A}$.

Pozn. 6/I: V důkazu **V 25/I** a **V 26/I** je operátorový součin prvku $a^\star \in G^\star$ s operátorem α značen $a^\star \cdot \alpha$, tečka nahoře. To je možné, neboť na prvek $a^\star$ se můžeme dívat jako na prvek přípustného rozkladu $\bar{G}^\star_{min}$. Tohoto způsobu zápisu budeme používat podle potřeby i v dalším výkladu.

II. GRUPOIDY S OPERÁTORY

§ 1. Základní pojmy a věty

D 1/II: Neprázdnou množinu G, v níž každé uspořádané dvojici (a, b) prvků $a, b \in G$ je nějakým pravidlem $\boldsymbol{M}$ přiřaděn určitý prvek $c \in G$, což zapisujeme

$$ab = c\,,$$

se nazývá *grupoid.* Pravidlo $\boldsymbol{M}$ se nazývá násobení v množině G a množina G pole grupoidu. Jestliže pro libovolné prvky $a, b, c \in G$ platí $ab = ba$, nazývá se grupoid abelovský nebo komutativní, a platí-li $a(bc) = (ab)c$, nazývá se asociativní.

Grupoidy budeme označovat velkými německými písmeny, a to zpravidla stejnými jako jejich pole. Na příklad označujeme grupoid, jehož pole jsme označili G, písmenem $\mathfrak{G}$, a když jsme nějaký grupoid označili $\mathfrak{G}$, pak písmeno G značí zpravidla jeho pole. Z definice **D 1/I** a **D 1/II** je zřejmé, že každá neprázdná množina G, jež má sebe samu za obor operátorů, je grupoid.

Na grupoidy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole. Tak např. mluvíme o prvcích grupoidu místo o prvcích pole grupoidu a píšeme $a \in \mathfrak{G}$ místo $a \in G$, podobně mluvíme o podmnožinách v grupoidu a píšeme např. $A \subset \mathfrak{G}$ nebo $\mathfrak{G} \supset A$. Mluvíme o rozkladech v grupoidu a na grupoidu, o zobrazení grupoidu do nějaké množiny, do nějakého grupoidu nebo na grupoid atd.

Nechť A, B značí nějaké podmnožiny v $\mathfrak{G}$. Podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze součinů ab každého prvku $a \in A$ s každým prvkem $b \in B$, se nazývá součin podmnožiny A s podmnožinou B a označuje se symbolem AB. Když některá z podmnožin je prázdná, rozumíme symbolem AB prázdnou množinu.

Pro $a \in \mathfrak{G}$ píšeme zpravidla místo $\{a\}A$ stručněji aA a podobně místo $A\{a\}$ píšeme Aa, místo AA píšeme A^2. Platí-li rovnost $AB = BA$, nazývají se podmnožiny A, B vzájemně zaměnitelné neboli komutativní.

Nechť K značí nějakou neprázdnou podmnožinu v $\mathfrak{G}$. V tomto případě násobení $\mathbf{M}$ v $\mathfrak{G}$ určuje jisté, tzv. částečné násobení $\mathbf{M}_K$ v K, které je definováno takto: $\mathbf{M}_K$ přiřazuje každé uspořádané dvojici prvků $a, b \in K$ týž prvek $ab \in \mathfrak{G}$ jako násobení $\mathbf{M}$.

D 2/II: Neprázdnou podmnožinu K grupoidu $\mathfrak{G}$ spolu s částečným násobením $\mathbf{M}_K$ nazýváme *komplexem* a značíme $\mathfrak{K}$.

Množinu K nazýváme také polem komplexu $\mathfrak{K}$. Jestliže nyní $\mathfrak{A}$ je komplex v grupoidu $\mathfrak{G}$ a jestliže platí $A^2 \subset A$, pak říkáme, že A je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$ nebo že $\mathfrak{A}$ je grupoidní komplex v $\mathfrak{G}$. Z uvedené podmínky plyne, že každé uspořádané dvojici prvků $a, b \in \mathfrak{A}$ je částečným násobením $\mathbf{M}_A$ přiřazen týž prvek $ab \in \mathfrak{A}$ jako násobením $\mathbf{M}$ v $\mathfrak{G}$. Pak také říkáme, že $\mathfrak{A}$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}$ je nadgrupoid na $\mathfrak{A}$ a píšeme $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ nebo $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$.

Podobně jako na grupoidy přenášíme také na komplexy pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole.

V souhlase s tím, že na grupoidy a na komplexy přenášíme pojmy a symboly, které jsme definovali pro jejich pole, mluvíme někdy např. o průniku nějaké množiny $B \subset \mathfrak{G}$ a podgrupoidu $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ ve smyslu průniku podmnožiny B a pole A grupoidu $\mathfrak{A}$; v podobném smyslu mluvíme o součinu podmnožiny B s podgrupoidem nebo komplexem $\mathfrak{A}$, o součinu podgrupoidu nebo komplexu $\mathfrak{A}$ s podmnožinou B, dále o obalu podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v nějakém rozkladu $\bar{A}$, o průseku rozkladu $\bar{A}$ s podgrupoidem či komplexem $\mathfrak{A}$, atp., a užíváme označení např. $B \cap \mathfrak{A}$ nebo $\mathfrak{A} \cap B$, $B\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}B$, $\mathfrak{A} \sqsubset \bar{A}$ nebo $\bar{A} \sqsupset \mathfrak{A}$, $\bar{A} \sqcap \mathfrak{A}$ nebo $\mathfrak{A} \sqcap \bar{A}$, atp.

Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou podgrupoidy v $\mathfrak{G}$ a nechť průnik $A \cap B$ jejich polí A, B není prázdný. Pak $A \cap B$ je prupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$ a příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá průnik podgrupoidů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a označuje se symbolem $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$. Pamatujme si, že pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ je definován jenom v případě, že pole obou podgrupoidů mají společné prvky.

Pojem průniku dvou podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ se dá rozšířit na pojem průniku systému podgrupoidů v $\mathfrak{G}$. Máme-li nějaký systém $\{\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2\, \bar{\mathfrak{a}}_3, \ldots\}$ podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ a průnik $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \bar{a}_3 \cap \ldots$ jejich polí není prázdný, pak tento průnik je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}$; příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ se nazývá průnik systému podgrupoidů $\{\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \bar{\mathfrak{a}}_3, \ldots\}$ a označuje se symbolem $\bar{\mathfrak{a}}_1 \cap \bar{\mathfrak{a}}_2 \cap \bar{\mathfrak{a}}_3 \cap \ldots$, stručněji $\bigcap \bar{\mathfrak{a}}$ (B, 5.1, 5.2, 6.1—6.7.2/55—56, 60—64).

D 3/II: Nechť pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ je množina s oborem operátorů Ω a nechť pro libovolné prvky $a, b \in \mathfrak{G}$ platí

$$(1,1) \qquad (ab)\alpha = (a\alpha) \,.\, (b\alpha)$$

pro každé $\alpha \in \Omega$. Pak $\mathfrak{G}$ se nazývá grupoid s oborem operátorů Ω, což značíme $\mathfrak{G}/\Omega$.

Obyčejně místo $(a\alpha) \,.\, (b\alpha)$ píšeme stručněji $(a\alpha)\,(b\alpha)$ nebo $a\alpha \,.\, b\alpha$.

Úmluva 1/II: Je-li $\mathfrak{G}$ grupoid s oborem operátorů Ω a $\mathfrak{K}$ komplex v $\mathfrak{G}$, pak množinu všech operátorových součinů $a\alpha$, kde $a \in \mathfrak{K}$, $\alpha \in \Omega$ spolu s příslušným částečným násobením značíme symbolem $\mathfrak{K}\Omega$.

Pozn. 1/II: Zřejmě platí $\mathfrak{K}\Omega \subset \mathfrak{G}\Omega$, a poněvadž $\mathfrak{G}\Omega \subset \mathfrak{G}$, je také $\mathfrak{K}\Omega \subset \mathfrak{G}$. Jestliže platí vztah $\mathfrak{K}\Omega \subset \mathfrak{K}$, pak také $\mathfrak{K}\alpha \subset \mathfrak{K}$ pro každé $\alpha \in \Omega$ a obráceně.

D 4/II: Komplex $\mathfrak{A}$ grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ nazýváme přípustným komplexem pro obor operátorů Ω, když pole A komplexu $\mathfrak{A}$ je přípustná podmnožina, tj. když platí

$$\mathfrak{A}\alpha \subset \mathfrak{A} \quad \text{pro každé} \quad \alpha \in \Omega\,, \quad \text{jinak psáno} \quad \mathfrak{A}\Omega \subset \mathfrak{A}\,. \tag{2,1}$$

Je-li speciálně $\mathfrak{A}$ podgrupoid, pak mluvíme o přípustném podgrupoidu.

Pozn. 2/II: Na přípustný podgrupoid $\mathfrak{A}$ grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ se tedy můžeme dívat jako na grupoid s týmž oborem operátorů Ω, tj. $\mathfrak{A}/\Omega$.

Úmluva 2/II: Mluvíme-li o přípustných komplexech resp. podgrupoidech, pak to znamená, pokud není jinak řečeno, že jde o přípustné komplexy resp. podgrupoidy jednoho a téhož grupoidu s daným oborem operátorů Ω.

V 1/II: Neprázdný průnik libovolného systému přípustných podgrupoidů v $\mathfrak{G}/\Omega$ je přípustný podgrupoid.

Důkaz: Podle **V 2/I** a) je neprázdný průnik polí přípustných podgrupoidů přípustná podmnožina, a protože neprázdný průnik systému podgrupoidů v $\mathfrak{G}$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}$, jsou splněny podmínky **D 4/II** a tvrzení je dokázáno.

V 2/II: Nechť $\mathfrak{A}$ je přípustný podgrupoid v $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak $\mathfrak{A}\alpha$ je podgrupoid v $\mathfrak{A}$ i v $\mathfrak{G}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Speciálně $\mathfrak{G}\alpha$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}/\Omega$.

Důkaz: Předně $a\alpha \in \mathfrak{A}\alpha$ je prvek z $\mathfrak{A}$ podle předpokladu, že $\mathfrak{A}$ je přípustný podgrupoid. Pro libovolné prvky a, $b \in \mathfrak{A}$ platí jednak $ab = c \in \mathfrak{A}$ a jednak $(a\alpha)\,(b\alpha) = (ab)\alpha = c\alpha \in \mathfrak{A}\alpha$, kde $a\alpha$, $b\alpha$, $c\alpha$ jsou prvky z $\mathfrak{A}\alpha$, při čemž $c\alpha$ je určen jednoznačně. Je tedy $\mathfrak{A}\alpha$ podgrupoid v $\mathfrak{A}$, speciálně $\mathfrak{G}\alpha$ podgrupoid v $\mathfrak{G}$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Protože $\mathfrak{A}\alpha \subset \mathfrak{G}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$ podle pozn. 1/II, je věta dokázána.

Důsledek 1/II: Je-li $\mathfrak{K}$ přípustný komplex v $\mathfrak{G}/\Omega$, pak $\mathfrak{K}\alpha$ je komplex v $\mathfrak{G}\alpha$. To plyne z důkazu **V 2/II**. Při tom částečné násobení v $K\alpha$ je definováno jako v $G\alpha$, a tedy jako v G.

D 5/II: Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou komplexy v grupoidu $\mathfrak{G}$. Komplex $\mathfrak{C}$, jehož polem je podmnožina $C = AB$ grupoidu $\mathfrak{G}$, nazýváme součinem komplexů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ a značíme symbolem $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Platí-li $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ nazýváme komplexy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ navzájem zaměnitelné nebo komutativní.

V 3/II: Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou komplexy grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$.

Pak platí

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\alpha = (\mathfrak{A}\alpha)\,(\mathfrak{B}\alpha) \tag{3,1}$$

pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Podle **D 5/II** pro pole C komplexu $\mathfrak{C}$ platí $C = AB$, kde C je množina všech prvků c tvaru $c = ab$, $a \in A$, $b \in B$. Protože prvky a, b jsou z grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$, proto podle **D 3/II** platí $c\alpha = (a\alpha)\,(b\alpha)$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Při tom

$a\alpha \in A\alpha$, $b\alpha \in B\alpha$. Pro pole C komplexu $\mathfrak{C}$ platí tedy $C\alpha = (A\alpha)(B\alpha)$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Protože v komplexech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\alpha$, $\mathfrak{B}\alpha$, $\mathfrak{C}\alpha$ se podle definice a důsledku 1/II násobení zachovává, platí vztah (3,1) pro každé $\alpha \in \Omega$.

V 4/II: Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou přípustné komplexy v grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak také součin $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ je přípustný komplex v $\mathfrak{G}$, tj. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\Omega$.

Důkaz: Podle **V 3/II** platí $\mathfrak{C}\alpha = (\mathfrak{A}\alpha)(\mathfrak{B}\alpha)$ pro každé $\alpha \in \Omega$, tj. $c\alpha = (a\alpha)(b\alpha)$, kde $a\alpha \in A\alpha$, $b\alpha \in B\alpha$, $c\alpha \in C\alpha$. Poněvadž A, B jsou přípustné podmnožiny, proto $A\alpha \subset A$, $B\alpha \subset B$, a tedy $C\alpha = (A\alpha)(B\alpha) \subset AB = C$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Tím je věta dokázána.

V 5/II: Nutná a postačující podmínka pro to, aby komplex $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{G}$ v grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ byl přípustný, je, aby $\mathfrak{B}$ byl neprázdným průnikem dvou navzájem různých přípustných komplexů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ v grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 4/I** a **D 4/II.**

Pozn.: 3/II: Je-li komplex $\mathfrak{B}$ z předchozí věty podgrupoid v $\mathfrak{G}$, pak je přípustný podgrupoid.

§ 2. Přípustné faktoroidy.

D 6/II: Libovolný rozklad $\bar{A}$ v grupoidu $\mathfrak{G}$ se nazývá *vytvořující*, když součin každé uspořádané dvojice jeho prvků je částí prvku téhož rozkladu. Jinými slovy, když ke každé uspořádané dvojici $(\bar{a}, \bar{b})$ prvků $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$ existuje prvek $\bar{c} \in \bar{A}$ takový, že $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$.

Pozn. 4/II: Rozklady $\bar{G}_{max}$ a $\bar{G}_{min}$ jsou vytvořující (B, 8.1.1/72).

V 6/II: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupoid s oborem operátorů Ω. Pak největší rozklad $\bar{G}_{max}$ je přípustný vytvořující rozklad na $\mathfrak{G}$.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 6/I** a pozn. 4/II.

V 7/II: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupoid s oborem operátorů Ω. Pak nejmenší rozklad $\bar{G}_{min}$ je přípustný vytvořující rozklad na $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Správnost tvrzení plyne bezprostředně z **V 6/I** a pozn. 4/II.

Nechť $\bar{A}$ značí libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$. Podmnožina $\mathbf{s}\bar{A} \subset \mathfrak{G}$, tj. podmnožina v $\mathfrak{G}$, skládající se ze všech prvků v $\mathfrak{G}$, které jsou v některém prvku rozkladu $\bar{A}$, je grupoidní. Vskutku, k libovolným prvkům a, $b \in \mathbf{s}\bar{A}$ existují prvky $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \bar{A}$ takové, že $a \in \bar{a}$, $b \in \bar{b}$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, a odtud vychází, že $ab \in \bar{a}\bar{b} \subset \bar{c} \subset \mathbf{s}\bar{A}$, takže ab je prvkem v $\mathbf{s}\bar{A}$. Příslušný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ označujeme symbolem $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$. Je zřejmé, že $\bar{A}$ je vytvořující rozklad na grupoidu $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$ (B, 8.1.3/72).

V 8/II: Nechť $\bar{A}$ je přípustný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a $\bar{A}$ je přípustný vytvořující rozklad na přípustném podgrupoidu $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$.

Důkaz: Podle předešlého je $\bar{A}$ vytvořující rozklad na podgrupoidu $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$. Podgrupoid $\mathbf{s}\bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný, neboť jeho pole $\mathbf{s}\bar{A}$ je přípustná podmnožina v $\mathfrak{G}/\Omega$ podle pozn. 4/I c). Podle **V 7/I** je $\bar{A}$ přípustný rozklad na množině $\mathbf{s}\bar{A}$. Tím je věta dokázána.

V 9/II: Nechť $\bar{A}$ je libovolný přípustný vytvořující rozklad a B libovolná přípustná grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathbf{s}\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Pak

a) obal $B \sqsubset \bar{A}$ podmnožiny B v rozkladu $\bar{A}$ a
b) průsek $B \sqcap \bar{A}$ podmnožiny B s rozkladem $\bar{A}$
jsou přípustné vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Obal $B \sqsubset \bar{A}$ a průsek $B \sqcap \bar{A}$ jsou vytvořující rozklady v $\mathfrak{G}$ (B, 8.1.3.2/72—73), jež jsou přípustné podle **V 8/I** a **V 10/I**.

D 7/II: Nechť $\bar{A}$ je libovolný vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$. Grupoid $\bar{\mathfrak{A}}$, jehož polem je vytvořující rozklad $\bar{A}$ a jehož násobení je dáno pravidlem, že součin libovolného prvku $\bar{a} \in \bar{A}$ s libovolným prvkem $\bar{b} \in \bar{A}$ je onen prvek $\bar{c} \in \bar{A}$, pro nějž platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, nazýváme *faktoroid* v grupoidu $\mathfrak{G}$. Násobení značíme tečkou nahoře, tj. $\bar{a} \cdot \bar{b} = c$.

Pozn. 5/II: V případě, že rozklad $\bar{A}$ je na grupoidu $\mathfrak{G}$, nazýváme $\bar{\mathfrak{A}}$ faktoroid na grupoidu nebo faktoroid grupoidu $\mathfrak{G}$.
Každý vytvořující rozklad v grupoidu $\mathfrak{G}$ určuje tedy jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$, a to onen, jehož je polem; pravíme, že každému vytvořujícímu rozkladu v $\mathfrak{G}$ přísluší neboli patří jistý faktoroid v $\mathfrak{G}$.
Všimněme si, že na grupoidu $\mathfrak{G}$ existují alespoň dva faktoroidy, a to tzv. největší faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{max}$, který přísluší k největšímu vytvořujícímu rozkladu $\bar{G}_{max}$, a nejmenší faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{min}$ příslušný k nejmenšímu rozkladu $\bar{G}_{min}$ (B, 8.2/75—76).

V 10/II: Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$ je faktoroid v grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$, jehož pole $\bar{A}$ je přípustný (vytvořující) rozklad v $\mathfrak{G}$. Pak pro každé $\alpha \in \Omega$ platí, že $\bar{\mathfrak{A}}\alpha$ je faktoroid v $\mathfrak{G}$ a jeho polem je (vytvořující) rozklad $\bar{A}\alpha$.

Důkaz: Podle pozn. 4/I b) je $\bar{A}\alpha$ rozklad v G/Ω pro každé $\alpha \in \Omega$. Protože $\bar{A}$ je vytvořující rozklad v G, pak pro každé dva prvky $\bar{a}$, $\bar{b}$ rozkladu $\bar{A}$ platí $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, kde $\bar{c} \in \bar{A}$. Protože $\bar{A}$ je přípustný rozklad, proto platí $\bar{a}\alpha \subset \bar{a}'$, $\bar{b}\alpha \subset \bar{b}'$, $\bar{c}\alpha \subset \bar{c}'$, kde $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$ jsou prvky rozkladu $\bar{A}$. Podle **V 3/II** platí $(\bar{a}\bar{b})\alpha = (\bar{a}\alpha)(\bar{b}\alpha)$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Avšak $\bar{a}\alpha \subset \bar{a}'$, $\bar{b}\alpha \subset \bar{b}'$, $\bar{a}\bar{b} \subset \bar{c}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c}$, a tedy jednak $(\bar{a}\bar{b})\alpha \subset \subset \bar{c}\alpha \subset \bar{c}'$, tj. $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \alpha = \bar{c} \cdot \alpha = \bar{c}'$, a jednak $(\bar{a}\alpha)(\bar{b}\alpha) \subset \bar{a}'\bar{b}'$, tj. $(\bar{a} \cdot \alpha) \cdot (\bar{b} \cdot \alpha) = = \bar{a}' \cdot \bar{b}'$. Poněvadž $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ jsou prvky vytvořujícího rozkladu $\bar{A}$, je $\bar{a}'\bar{b}' \subset \bar{d}$, kde $\bar{d} \in \bar{A}$, tj. $\bar{a}' \cdot \bar{b}' = \bar{d}'$. Protože však každé dva prvky rozkladu $\bar{A}$ jsou buď totožné, jsou-li incidentní, nebo disjunktní podmnožiny v G a $(\bar{a}\bar{b})\alpha = (\bar{a}\alpha)(\bar{b}\alpha)$, je nutně $\bar{d} = \bar{c}'$. Je tedy každým dvěma prvkům $\bar{a}' = \bar{a} \cdot \alpha$, $\bar{b}' = \bar{b} \cdot \alpha$ z $\bar{A}\alpha$ jednoznačně jako jejich součin přiřazen prvek $\bar{c}' = \bar{c} \cdot \alpha$. Je tedy $\bar{A}\alpha$ vytvořující rozklad v $\mathfrak{G}$, tj. $\bar{\mathfrak{A}}\alpha$ je faktoroid v $\mathfrak{G}$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důsledek 2/II: Je-li přípustný rozklad $\bar{A}$ polem faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ v $\mathfrak{G}/\Omega$. pak pro $\bar{a}$, $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{A}}$ a pro každé $\alpha \in \Omega$ platí vztah $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \alpha = (\bar{a} \cdot \alpha) \cdot (\bar{b} \cdot \alpha)$.
Můžeme tedy definovat:

D 8/II: Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$ je faktoriod v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť jeho pole $\bar{A}$ je přípustný (vytvořující) rozklad. Pak říkáme, že faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ připouští obor operátorů Ω nebo že je přípustný, což značíme symbolem $\bar{\mathfrak{A}}/\Omega$.

Pozn. 6/II: Pro každé dva prvky $\bar{a}$, $\bar{b} \in \bar{\mathfrak{A}}$ a každé $\alpha \in \Omega$ platí

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \alpha = (\bar{a} \cdot \alpha) \cdot (\bar{b} \cdot \alpha). \tag{1,2}$$

Tečky nahoře značí, že $\bar{a}$, $\bar{b}$ uvažujeme jako prvky z $\bar{\mathfrak{A}}$ a nikoliv podmnožiny z $\mathfrak{G}$. Vztah (1,2) ukazuje, že pro prvky z $\bar{\mathfrak{A}}$ je plněna podmínka (1,1) z **D 3/II.**

Důsledek 3/II: Přísluší tedy každému přípustnému vytvořujícímu rozkladu $\bar{A}$ v $\mathfrak{G}/\Omega$ jistý přípustný faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}/\Omega$ v $\mathfrak{G}/\Omega$, a to onen, jehož polem je přípustný vytvořující rozklad $\bar{A}$. Speciálně na každém grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ existují aspoň dva přípustné faktoroidy, tzv. největší faktorid $\bar{\mathfrak{G}}_{max}$ a nejmenší faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}_{min}$, jak plyne přímo z **V 6/II a V 7/II.**

D 9/II: Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$ značí libovolný faktoroid v $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ libovolný podgrupoid v $\mathfrak{G}$ a nechť $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$. Pak faktoroid, který přísluší vytvořujícímu rozkladu $B \sqsubset \bar{A}$, nazýváme obalem podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ a značíme $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ nebo $\bar{\mathfrak{A}} \sqsupset \mathfrak{B}$. Faktoroid příslušný k vytvořujícímu rozkladu $B \sqcap \bar{A}$ nazýváme průsek faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$ nebo průsek podgrupoidu $\mathfrak{B}$ s faktoroidem $\bar{\mathfrak{A}}$ a značíme $\bar{\mathfrak{A}} \sqcap \mathfrak{B}$ nebo $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$. (B, 8.4/76—77).

V 11/II: Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný faktoroid a $\mathfrak{B}$ přípustný podgrupoid v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$. Pak obal $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný faktoroid v $\mathfrak{G}/\Omega$, tj. $(\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}})/\Omega$.

Důkaz: Poněvadž jsou splněny předpoklady **V 8/I**, je obal $B \sqsubset \bar{A}$ přípustný rozklad v $\mathfrak{G}$; tento rozklad je vytvořující (B, 8.1.3.2./72—73). Je tedy $\mathfrak{B} \sqsubset \bar{\mathfrak{A}}$ přípustný faktoroid podle **D 8/II.**

V 12/II: Nechť $\bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný faktoroid a $\mathfrak{B}$ přípustný podgrupoid v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$. Pak průsek $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$ podgrupoidu $\mathfrak{B}$ s faktoroidem $\bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný faktoroid v $\mathfrak{G}/\Omega$, tj. $(\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{A}})/\Omega$.

Důkaz: Poněvadž jsou splněny předpoklady **V 10/I**, je průsek $B \sqcap \bar{A}$ přípustný rozklad v $\mathfrak{G}$, jenž je vytvořující (B, 8.1.3.2/73), a tedy $\mathfrak{B} \sqcap \bar{\mathfrak{A}}$ je přípustný faktoroid podle **D 8/II.**

Když $\bar{B}$ je vytvořující rozklad faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ a $\bar{A}$ zákryt vytvořujícího rozkladu $\bar{B}$, jenž je polem faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$, vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$, pak $\bar{A}$ je vytvořující rozklad na grupoidu $\mathfrak{G}$. Také naopak platí, že když rozklad $\bar{A}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, jenž je zákrytem vytvořujícího rozkladu $\bar{B}$, je vytvořující, pak totéž platí o rozkladu $\bar{\bar{B}}$. Vidíme tedy, že oba rozklady $\bar{A}$, $\bar{\bar{B}}$ jsou vytvořující současně tj. když jeden z nich je vytvořující, pak je vytvořující také druhý. Když jsou vytvořující, pak k rozkladu $\bar{A}$ příluší jistý faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ a podobně k rozkladu $\bar{\bar{B}}$ příluší jistý faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$.

D 10/II: Faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ se nazývá *zákryt faktoroidu* $\bar{\mathfrak{B}}$ vynucený faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ a faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ se nazývá *zjemnění faktoroidu* $\bar{\mathfrak{A}}$; označení $\bar{\mathfrak{A}} \geqq \bar{\mathfrak{B}}$ nebo $\bar{\mathfrak{B}} \leqq \bar{\mathfrak{A}}$. Říkáme také, že faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ je příslušný k zákrytu $\bar{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$.

Každý faktoroid na libovolném faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ vynucuje tedy jistý zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ a naopak, každý zákryt faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ je vynucen jistým faktoroidem na $\bar{\mathfrak{B}}$. Zřejmě platí vztahy $\bar{\mathfrak{G}}_{max} \geqq \bar{\mathfrak{B}} \geqq \bar{\mathfrak{G}}_{min}$ pro každý faktoroid $\bar{\mathfrak{B}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ (B,8.5/78—79).

V 13/II: Nechť $\bar{\mathfrak{B}}$ je přípustný faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť přípustný faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{G}$ je jeho zákrytem. Pak faktoroid $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ na faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$, příslušný k zákrytu $\bar{\mathfrak{A}}$, je rovněž přípustný, tj. $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}/\Omega$.

Důkaz: Podle předchozího je pole $\bar{\bar{B}}$ faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ vytvořující rozklad, při čemž tento rozklad je příslušný k přípustnému rozkladu $\bar{A}$, jenž je zákrytem přípustného rozkladu $\bar{B}$. Podle **V 12/I** je $\bar{\bar{B}}$ přípustný rozklad na $\bar{B}$ a věta je dokázána.

V 14/II: Nechť $\bar{\mathfrak{B}}$ je přípustný faktoroid na grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ je přípustný faktoroid na $\bar{\mathfrak{B}}/\Omega$. Pak faktoroid $\bar{\mathfrak{A}}$, jenž je zákrytem faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ vynuceným faktoroidem $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$, je přípustný, tj. $\bar{\mathfrak{A}}/\Omega$.

Důkaz: Podle předpokladu jsou pole $\bar{B}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{B}}$ a pole $\bar{\bar{B}}$ faktoroidu $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}$ přípustné rozklady. Pak podle **V 13/I** je zákryt $\bar{A}$ rozkladu $\bar{B}$, vynucený rozkladem $\bar{\bar{B}}$, přípustný rozklad na $\mathfrak{G}/\Omega$. Podle předchozího je $\bar{A}$ vytvořující rozklad, tj. $\bar{A}$ je polem faktoroidu $\bar{\mathfrak{A}}$, jenž je přípustný.

§ 3. Ω — deformace

Nechť $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^\star$ značí nějaké grupoidy. Jak jsme se již zmínili, rozumíme zobrazením grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$ zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ do pole G grupoidu $\mathfrak{G}^\star$, a podobně přenášíme na grupoidy všechny další pojmy a symboly z teorie zobrazení množin. Podle této definice týká se tedy pojem zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ jenom polí a nikterak nezávisí na násobení obou grupoidů. Některá zobrazení mohou ovšem míti nějaký vztah k násobení v grupoidu $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^\star$. Pro teorii grupoidů jsou nejdůležitější tzv. homomorfní zobrazení.

D 11/II: Libovolné zobrazení $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$ se nazývá *homomorfní*, když součin ab libovolného prvku $a \in \mathfrak{G}$ s libovolným prvkem $b \in \mathfrak{G}$ je zobrazen na součin obrazu prvku a s obrazem prvku b v zobrazení $\boldsymbol{d}$, tj. když pro a, $b \in \mathfrak{G}$ platí rovnost $\boldsymbol{d}(ab) = (\boldsymbol{d}a)(\boldsymbol{d}b)$.

Homomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$ se nazývá také *homomorfismus*. Název homomorfní zobrazení je v literatuře ustálen, ale je dlouhý, a proto budeme zpravidla místo něho užívat název *deformace*.

Nemusí vždy existovat deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Jestliže nějaká deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$ existuje, pak pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}^\star$ je homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$.

Nechť $\boldsymbol{d}$ značí libovolnou deformaci grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$. Nechť A, B, $C \subset \mathfrak{G}$ značí libovolné neprázdné podmnožiny. Jestliže symbolem $\boldsymbol{d}A$ označujeme obraz množiny A v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$, tedy podmnožinu v $\mathfrak{G}$,* která se skládá z obrazů v deformaci $\boldsymbol{d}$ jednotlivých prvků množiny A, pak platí rovnost $\boldsymbol{d}(AB) = (\boldsymbol{d}A)(\boldsymbol{d}B)$. Jestliže $AB \subset C$, pak také $\boldsymbol{d}A \cdot \boldsymbol{d}B \subset \boldsymbol{d}C$. Dále platí, že obraz $\boldsymbol{d}A$ pole A podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v rozšířeném zobrazení $\boldsymbol{d}$ je grupoidní podmnožina v $\mathfrak{G}^\star$. Podgrupoid v $\mathfrak{G}^\star$, jehož pole je $\boldsymbol{d}A$, se nazývá obraz podgrupoidu $\mathfrak{A}$ v deformaci $\boldsymbol{d}$ a označuje se symbolem $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$. Je zřejmé, že $\boldsymbol{d}$ je deformace podgrupoidu $\mathfrak{A}$ na podgrupoid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$, takže podgrupoid $\boldsymbol{d}\mathfrak{A}$ je homomorfní s podgrupoidem $\mathfrak{A}$. Jde-li speciálně o pole G grupoidu $\mathfrak{G}$, pak platí, že obraz $\boldsymbol{d}\mathfrak{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}^\star$ homomorfní s $\mathfrak{G}$. Když $\boldsymbol{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$, máme ovšem $\mathfrak{G}^\star = \boldsymbol{d}\mathfrak{G}$.

D 12/II: Prostou deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ nazýváme *isomorfní* zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$. Isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$ se nazývá také *isomorfismus*.

Ke každé prosté deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$ existuje ovšem inversní zobrazení $\boldsymbol{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ na $\mathfrak{G}$, které je prostou deformací. Když tedy existuje nějaký isomofismus $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$, pak existuje isomorfismus $\boldsymbol{d}^{-1}$ grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ na $\mathfrak{G}$; v tomto případě pravíme, že grupoid $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}^\star$) je isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$ ($\mathfrak{G}$) nebo že grupoidy $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^\star$ jsou isomorfní a píšeme $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{G}^\star$ (B, 7.1—7.4.2/67—70).

V 15/II: Nechť existuje zobrazení $\boldsymbol{d}$ pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ na množinu $G^\star$. Pak lze v $G^\star$ definovat násobení tak, že $G^\star$ je polem grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ a že $\boldsymbol{d}$ je deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$, když rozklad $\overline{G}$ na G příslušný $\boldsymbol{d}$ je vytvořující.

Důkaz: Nechť $a, b, c \in \mathfrak{G}$, $a^\star$, $b^\star$, $c^\star \in G^\star$, nechť $\boldsymbol{d}a = a^\star$, $\boldsymbol{d}b = b^\star$, $\boldsymbol{d}c = c^\star$ a nechť $ab = c$. Definujeme-li násobení v $G^\star$ tak, že $a^\star b^\star = c^\star$, pak $G^\star$ je zřejmě polem grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ a platí $\boldsymbol{d}ab = \boldsymbol{d}a \cdot \boldsymbol{d}b$, a tedy zobrazení $\boldsymbol{d}$ je deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$.

V 16/II: Nechť existuje prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ pole G grupoidu $\mathfrak{G}$ na množinu $G^\star$. Pak v $G^\star$ lze definovat násobení tak, že $G^\star$ je polem grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ a že $\boldsymbol{i}$ je isomorfní zobrazení $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$.

Důkaz: Definujeme-li násobení v $G^\star$ způsobem uvedeným v důkazu **V 15/II**, je věta zřejmě správná.

D 13/II: Nechť grupoidy $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^\star$ mají týž obor operátorů Ω a nechť existuje homomorfní zobrazení $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ takové, že platí

$$(1,3) \qquad \boldsymbol{d}(a\alpha) = (\boldsymbol{d}a)\alpha$$

pro každé $a \in \mathfrak{G}$ a každé $\alpha \in \Omega$. Pak říkáme, že $\boldsymbol{d}$ je *operátor-homomorfní* zobrazení $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$.

Místo operátor-homomorfní zobrazení budeme říkat Ω-homomorfní zobrazení, místo operátor-homomorfismus kratčeji Ω-homomorfismus a analogicky *Ω-deformace*.

D 14/II: Prostou Ω-deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ nazýváme *operátor-isomorfní* zobrazení $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$. Operátor-isomorfní zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$ nazýváme také *operátor-isomorfismus*.

Kratčeji budeme říkat Ω-isomorfní zobrazení a Ω-isomorfismus.

Pozn. 7/II: Píšeme-li $\boldsymbol{d}a = a^\star$, kde $a^\star \in \mathfrak{G}^\star$, pak vzorec (1,3) má tvar $(a\alpha)^\star = a^\star\alpha$.

Vezmeme-li v úvahu definici **D 9/I**, můžeme definici **D 13/II** vyslovit také takto:

D 13'/II: Nechť grupoidy $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^\star$ mají týž obor operátorů Ω. Jestliže deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ do $\mathfrak{G}^\star$ je současně Ω-zobrazení pole G do $G^\star$, pak říkáme, že $\boldsymbol{d}$ je Ω-deformace.

Pozn. 8/II: Analogicky lze definovat Ω-isomorfní zobrazení.

V 17/II: Nechť $\boldsymbol{d}_1$ je Ω-deformace grupoidu $\mathfrak{G}_1/\Omega$ do grupoidu $\mathfrak{G}_2/\Omega$ a nechť $\boldsymbol{d}_2$ je Ω-deformace $\mathfrak{G}_2$ do grupoidu $\mathfrak{G}_3/\Omega$. Pak $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_1$ je Ω-deformace $\mathfrak{G}_1$ do $\mathfrak{G}_3$.

Důkaz: Podle **V 14/I** zobrazení $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_1$ je Ω-zobrazení $\mathfrak{G}_1$ do $\mathfrak{G}_3$ a toto zobrazení je deformace (B, 7.3.4/69). Jsou tedy splněny podmínky **D 13'/II** a věta je dokázána.

V 18/II: Pro skládání Ω-deformací platí zákon asociativní.
Důkaz plyne bez prostředně z **V 15/I** a vlastnosti deformace.

V 19/II: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupoid s oborem operátorů Ω. Pak existuje Ω-isomorfismus $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{i}$ je identické zobrazení pole G grupoidu $\mathfrak{G}$. Pak $\boldsymbol{i}$ je zřejmě deformace a podle **V 16/I** je to Ω-zobrazení. Tím je věta dokázána.

V 20/II: Nechť $\boldsymbol{d}$ je Ω-isomorfismus $\mathfrak{G}_1/\Omega$ na $\mathfrak{G}_2/\Omega$. Pak zobrazení $\boldsymbol{d}^{-1}$ inversní $\boldsymbol{d}$ je Ω- isomorfismus $\mathfrak{G}_2$ na $\mathfrak{G}_1$.

Důkaz: Zobrazení $\boldsymbol{d}^{-1}$ inversní k $\boldsymbol{d}$, je isomorfismus $\mathfrak{G}_2$ na $\mathfrak{G}_1$ (B, 7.4.2/70), jenž je podle **V 17/I** Ω- zobrazením.

V 21/II: Nechť existuje Ω-isomorfismus $\boldsymbol{d}_1$ grupoidu $\mathfrak{G}_1/\Omega$ na $\mathfrak{G}_2/\Omega$ a Ω-isomorfismus $\boldsymbol{d}_2$ grupoidu $\mathfrak{G}_2/\Omega$ na $\mathfrak{G}_3/\Omega$. Pak $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_1$ je Ω-isomorfismus grupoidu $\mathfrak{G}_1$ na $\mathfrak{G}_3$.

Důkaz: Deformace $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2\boldsymbol{d}_1$ je isomorfismus $\mathfrak{G}_1$ na $\mathfrak{G}_3$ (B, 7.4.2/70) a toto zobrazení je Ω-zobrazení podle **V 18/I**.

Shrneme-li **V 19/II, 20/II 22/II**, dostáváme **důsledek 4/II:** Ω-isomorfismus grupoidů s týmž oborem operátorů je vztah reflexivní, symetrický a transitivní.

V 22/II: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupoid s oborem operátorů Ω. Pak každému operátoru $\alpha \in \Omega$ přísluší určitý faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$, který je isomorfní s $\mathfrak{G}\alpha$.

Důkaz: Užití operátoru α na prvky z $\mathfrak{G}$ je zobrazení grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}\alpha$, kde $\mathfrak{G}\alpha$ je grupoid podle **V 2/II.** Užití každého operátoru α na prvky z $\mathfrak{G}$ přísluší tedy určitý faktoroid $\mathfrak{G}$, neboť toto zobrazení je deformace vzhledem k **D 3/II a D 11/II.** Při tom každý prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$ je množina všech prvků $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{G}}$, které znásobeny operátorem α dávají týž operátorový součin $a\alpha$. Je tedy $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorfní s $\mathfrak{G}\alpha$ (B, 9.1/82—83).

V 23/II: Nechť grupoid $\mathfrak{G}/\Omega$ je pologrupa. Pak $\mathfrak{G}\alpha$ je rovněž pologrupa pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Nechť a, b, c jsou prvky z $\mathfrak{G}$. Pak podle předpokladu platí $(ab)c = a(bc)$. Pro prvky z $\mathfrak{G}\alpha$ platí podle **D 3/II** a s použitím asociativního zákona

$$[(a\alpha)(b\alpha)](c\alpha) = [(ab)\alpha](c\alpha) = [(ab)c]\alpha = [a(bc)]\alpha = (a\alpha)[(bc)\alpha] = (a\alpha)[(b\alpha)(c\alpha)]\,.$$

V 24/II: Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je pologrupa. Pak každá uspořádaná skupina několika prvků v $\mathfrak{G}\alpha$, kde α je libovolný operátor z Ω, má jenom jeden součin.

Důkaz: Podle **V 23/II** je $\mathfrak{G}\alpha$ pologrupa pro každé $\alpha \in \Omega$ a pak každá uspořádaná skupina několika prvků v $\mathfrak{G}\alpha$ má jenom jeden součin (B, 10.2.2/89—90).

Důsledek 5/II: Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je pologrupa. Pak faktoroid $\mathfrak{G}$ příslušný libovolnému (pevnému) operátoru $\alpha \in \Omega$ je pologrupa.

Správnost tvrzení plyne z **V 22/II** a **V 23/II.**

V 25/II: Je-li $\mathfrak{G}/\Omega$ grupoid s dělením, je $\mathfrak{G}\alpha$ také grupoid s dělením pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Nechť a', b' jsou libovolné prvky z $\mathfrak{G}\alpha$. Pak v $\mathfrak{G}$ existují prvky a, b tak, že $a\alpha = a'$, $b\alpha = b'$. Protože $\mathfrak{G}$ je grupoid s dělením, existují prvky $x, y \in \mathfrak{G}$ tak, že $ax = b$, $ya = b$. Nyní platí $b' = b\alpha = (ax)\alpha = (a\alpha)(x\alpha) = a'(x\alpha)$ a

$b' = b\alpha = (ya)\alpha = (y\alpha)(a\alpha) = (y\alpha)a'$. Označíme-li $x' = x\alpha$, $y' = y\alpha$ pak v $\mathfrak{G}\alpha$ existují prvky x', y' tak, že $a'x' = b'$, $y'a' = b'$. Tím je věta dokázána.

Důsledek 6/II: Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je grupoid s dělením. Pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ příslušný libovolnému (pevnému) operátoru $\alpha \in \Omega$ je rovněž grupoid s dělením.

Správnost tvrzení plyne z **V 22/II** a **V 25/II.**

Pozn. 9/II: Jednoznačnost dělení se (obecně) při užití operátoru na prvky grupoidu nezachovává, tj. je-li $\mathfrak{G}/\Omega$ quasigrupa, pak $\mathfrak{G}\alpha$ není obecně quasigrupa. Jestliže užití operátoru α na prvky quasigrupy $\mathfrak{G}/\Omega$ nedefinuje meromorfní nebo automorfní zobrazení na $\mathfrak{G}$, pak existují aspoň dva prvky $a_1 \neq a$ z $\mathfrak{G}$, pro něž $a_1\alpha = a\alpha = a'$. Jestliže dále $b\alpha = b'$, $x\alpha = x'$, $x_1\alpha = x_1'$, při čemž $ax = b$, $a_1x_1 = b$, pak je $x \neq x_1$, a tedy také (obecně) $x' \neq x_1'$, při čemž platí jednak $a'x' = b'$ a jednak $a'x_1' = b'$.

V 26/II: Obsahuje-li grupoid $\mathfrak{G}/\Omega$ jednotkový prvek 1, pak $\mathfrak{G}\alpha$ je rovněž grupoid s jednotkovým prvkem. Jestliže $1 \in \mathfrak{G}\alpha$, pak $1\alpha = 1$ a 1 je jednotkovým prvkem v $\mathfrak{G}\alpha$. To platí pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Nechť $1\alpha = e$, a' je libovolný prvek z $\mathfrak{G}\alpha$, $\alpha \in \Omega$. Pak v $\mathfrak{G}$ existuje prvek a tak, že $a' = a\alpha$. Nyní $a'e = (a\alpha)(1\alpha) = (a1)\alpha = a\alpha = a'$, $ea' = (1\alpha)(a\alpha) = (1a)\alpha = a\alpha = a'$, a tedy $e = 1\alpha$ je jednotkovým prvkem v $\mathfrak{G}\alpha$. Jestliže $1 \in \mathfrak{G}\alpha$, pak 1 je jednotkovým prvkem v $\mathfrak{G}\alpha \in \mathfrak{G}$. Při tom $\mathfrak{G}\alpha$ je grupoid podle **V 2/II** a ten může obsahovat nejvýše jeden jednotkový prvek (B, 10.4/94). Je tedy $e = 1$, tj. $1\alpha = 1$. To platí pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důsledek 7/II: Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je grupoid s jednotkovým prvkem. Pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$, příslušný libovolnému operátoru α obsahuje rovněž jednotkový prvek.

Správnost tvrzení plyne z **V 22/II** a **V 26/II.**

V 27/II: Nechť existuje zobrazení **d** pole G grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ na množinu $G^\star$. Pak v $G^\star$ lze definovat násobení a na prvky z $G^\star$ užití operátorů z Ω tak, že $G^\star$ je polem grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ s oborem operátorů Ω a že **d** je Ω-deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$, když rozklad $\overline{G}$ na G příslušný $\overline{d}$ je vytvořující.

Důkaz: Podle **V 15/II** lze v $G^\star$ definovat násobení prvků tak, že $G^\star$ je polem grupoidu $\mathfrak{G}^\star$, při čemž **d** je deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Podle **V 20/I** lze definovat operátorové násobení prvků z $G^\star$ operátory z Ω tak, že **d** je Ω- zobrazení. Pak **d** podle **D 13'/II** je Ω-deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$.

V 28/II: Nechť existuje prosté zobrazení **i** pole G grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ na množinu $G^\star$. Pak v $G^\star$ lze definovat násobení a na prvky z $G^\star$ užití operátorů z Ω tak, že **i** je Ω-isomorfní zobrazení $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$.

Důkaz je analogický důkazu **V 27/II** a plyne bezprostředně z vět *V* **16/II, V 21/I,** z definice **D 14/II** a pozn. 8/II.

V 29/II: Nechť existuje deformace **d** grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$ příslušný deformaci **d** připouští obor operátorů Ω tak, ze $\mathfrak{G}^\star$ a $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou operátor-isomorfní.

Důkaz: Rozklad $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$ příslušný deformaci **d** je vytvořující (B, 8.1.2/72) a je isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$ (B, 9.1/82—83). Existuje tedy prosté zobrazení **i** grupoidu $\mathfrak{G}^\star$ na $\overline{\mathfrak{G}}$. Podle **V 21/I** lze definovat operátorové násobení prvků z $\overline{\mathfrak{G}}$ operátory z Ω tak, že **i** je Ω-zobrazení $\mathfrak{G}^\star$ na $\overline{\mathfrak{G}}$. Tedy podle **D 14/II** a pozn. 8/II jsou $\mathfrak{G}^\star$ a $\overline{\mathfrak{G}}$ operátor-isomorfní.

V 30/II: Nechť existuje deformace **d** grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak lze definovat operátorové násobení prvků z $\mathfrak{G}$ operátory z Ω tak, že **d** je Ω-zobrazení

$\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Lze-li operátorové násobení definovat tak, že platí **D 3/II**, pak $\boldsymbol{d}$ je Ω-deformace.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 23/I** a **D 13'/I**.

V 31/II: Nechť existuje Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak platí:

a) Vytvořující rozklad $\bar{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$, patřící k Ω-deformaci $\boldsymbol{d}$, je přípustný.
b) Existuje deformace grupoidu $\mathfrak{G}\alpha$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Tato deformace grupoidu $\mathfrak{G}\alpha$ na $\mathfrak{G}^\star\alpha$ je původní deformace $\boldsymbol{d}$.

Důkaz: a) Rozklad $\bar{G}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ patřící k deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$ je vytvořující (B, 8.1.2/72). Protože Ω-deformace je Ω-zobrazení pole G na $G^\star$, pak rozklad patřící k tomuto Ω-zobrazení je přípustný podle **V 24/I** a).
b) Podle **V 24/I** b) existuje zobrazení množiny $G\alpha$ na množinu $G^\star\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Toto zobrazení je původní zobrazení $\boldsymbol{d}$. Protože $G\alpha$ a $G^\star\alpha$ jsou podle **V 2/II** pole grupoidů $\mathfrak{G}\alpha$ a $\mathfrak{G}^\star\alpha$ a je $\mathfrak{G}\alpha \subset \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^\star\alpha \subset \mathfrak{G}^\star$ pro každé $\alpha \in \Omega$, proto zobrazení $\boldsymbol{d}$ je deformace grupoidu $\mathfrak{G}\alpha$ na $\mathfrak{G}^\star\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

V 32/II: Nechť grupoidy $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}'$ mají týž obor operátorů Ω a nechť $\mathfrak{A}'$ je přípustný podgrupoid v $\mathfrak{A}$.
a) Nechť existuje Ω-isomorfismus $\boldsymbol{g}$ podgrupoidu $\mathfrak{A}'$ na $\mathfrak{B}'$. Pak existuje nadgrupoid $\mathfrak{B}$ na $\mathfrak{B}'$, jenž připouští obor operátorů Ω tak, že existuje Ω-isomorfismus $\boldsymbol{f}$ grupoidu $\mathfrak{A}/\Omega$ na $\mathfrak{B}/\Omega$. Isomorfismus $\boldsymbol{f}$ v sobě obsahuje původní isomorfismus $\boldsymbol{g}$.
b) Nechť existuje Ω-isomorfismus $\boldsymbol{g}_1$ grupoidu $\mathfrak{B}'$ na podgrupoid $\mathfrak{A}'$. Pak existuje nadgrupoid $\mathfrak{B}$ na $\mathfrak{B}'$, jenž připouští obor operátorů Ω tak, že existuje Ω-isomorfismus $\boldsymbol{f}_1$ grupoidu $\mathfrak{B}$ na grupoid $\mathfrak{A}$. Isomorfismus $\boldsymbol{f}_1$ v sobě obsahuje původní isomorfismus $\boldsymbol{g}_1$.

Důkaz: a) Utvoříme množinu B jako v důkazu **V 19/I** a), pak existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}$ množiny A na B, jež v sobě obsahuje původní zobrazení $\boldsymbol{g}$. Násobení v B definujeme tak, že, když $\boldsymbol{f}a = a'$, $\boldsymbol{f}b = b'$, $\boldsymbol{f}c = c'$, $a, b, c \in A$, $a', b', c' \in B$, pak $a'b' = c'$, jestliže $ab = c$. Zřejmě se zachovává násobení v $\mathfrak{B}$ a $\boldsymbol{f}$ je tedy deformace $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$, jež v sobě obsahuje původní isomorfismus $\boldsymbol{g}$ a tvrzení a) je dokázáno.
b) Množinu B vytvoříme jako v důkazu **V 19/I** b). Podle této věty existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}_1$ množiny B na A, a tedy podle **V 17/I** také prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{f}_1^{-1} = \boldsymbol{f}$ množiny A na B. Definujeme-li násobení v B tak, jak jsme uvedli v důkazu části a) naší věty, pak $\boldsymbol{f}$ je Ω-isomorfismus $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{B}$, a tedy $\boldsymbol{f}^{-1} = \boldsymbol{f}_1$ je pak Ω-isomorfismus $\mathfrak{B}$ na $\mathfrak{A}$ podle **V 17/I** a věta je dokázána.

§ 4. Ω-isomorfismus grupoidů

V 33/II: Nechť existuje Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak faktoroid $\bar{\mathfrak{D}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$ příslušný deformaci $\boldsymbol{d}$ je operátor-isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$.

Důkaz: Pole $\bar{D}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ je rozklad grupoidu $\mathfrak{G}$ příslušný deformaci $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Podle **V 31/II** a) je tento vytvořující rozklad přípustný. S druhé strany existuje isomorfismus $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\bar{\mathfrak{D}}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$, při čemž platí $\boldsymbol{i}\bar{a} = \boldsymbol{d}a$ pro každý prvek $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{D}}$ a každý prvek $a \in \bar{a}$ (B, 9.1/82—83). Poněvadž $(\boldsymbol{d}a)\alpha = \boldsymbol{d}(a\alpha)$, proto také $(\boldsymbol{i}\bar{a}) \cdot \alpha = \boldsymbol{i}(\bar{a} \cdot \alpha)$ pro každé $\alpha \in \Omega$ podle **V 25/I.** Jsou tedy splněny podmínky **D 14/II** a věta je dokázána.

V 34/II: Nechť grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ je operátor-isomorfní s některým přípustným faktoroidem $\overline{\mathfrak{D}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak existuje Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$.

Důkaz: Označme $\bar{D}$ pole přípustného faktoroidu $\overline{\mathfrak{D}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}$, který je operátor- isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$. Pak existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$ (B, 9.L/83). Deformace $\boldsymbol{d}$ je dána podmínkou, aby $\boldsymbol{d}a = \boldsymbol{i}\bar{a}$ pro každé $a \in \bar{a}$ a každé $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{D}}$, při čemž $\boldsymbol{i}$ je operátor-isomorfní zobrazení $\overline{\mathfrak{D}}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Tím jsou pro deformaci $\boldsymbol{d}$ splněny podmínky z důkazu **V 26/I**, a protože $\boldsymbol{i}$ je prosté Ω-zobrazení pole $\bar{D}$ na $G^\star$, je $\boldsymbol{d}$ podle **V 26/I** Ω-zobrazení G na $G^\star$, a tedy $\boldsymbol{d}$ je Ω-deformace.

Obě věty **V 33/II** a **V 34/II** můžeme shrnout v jednu větu, tzv. první větu o operátor-isomorfismu grupoidů.

V 35/II: Když grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ je operátor-homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}/\Omega$, pak je operátor-isomorfní s jistým faktoroidem na $\mathfrak{G}$; když grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ je operátor-isomorfní s některým přípustným faktoroidem $\overline{\mathfrak{D}}$ na grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$, pak je operátor-homomorfní s grupoidem $\mathfrak{G}$.

V 36/II: (Druhá věta o operátor- isomorfismu): Nechť $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ je přípustný podgrupoid a $\overline{\mathfrak{A}}$ přípustný faktoroid v grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$. Pak obal $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ a průsek $\mathfrak{B} \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$ podgrupoidu $\mathfrak{B}$ s faktoroidem $\overline{\mathfrak{A}}$ jsou operátor-isomorfní. Operátor-isomorfismus je dán incidencí prvků.

Důkaz: Podle **V 27/I** existuje prosté Ω- zobrazení $\boldsymbol{i}$ obalu $B \sqsubset \bar{A}$ na průsek $B \sqcap \bar{A}$. Toto zobrazení je dáno incidencí prvků. Podle **V 11/II** a **V 12/II** jsou $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ a $\mathfrak{B} \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$ přípustné faktoroidy. Prosté zobrazení $\boldsymbol{i}$ obalu $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ na $\mathfrak{B} \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$ je isomorfismus (B, 9.2/84—85), a tedy podle **D 14/II** a pozn. 8/II jsou $\mathfrak{B} \sqsubset \overline{\mathfrak{A}}$ a $\mathfrak{B} \sqcap \overline{\mathfrak{A}}$ operátor-isomorfní.

Důsledek 8/II: Nechť přípustný faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ je na grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak obal přípustného podgrupoidu $\mathfrak{B}$ ve faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ a průsek faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ s podgrupoidem $\mathfrak{B}$ jsou operátorisomorfní.

Podle předpokladu je totiž vždy $B \cap \mathbf{s}\bar{A} \neq \emptyset$, a tedy jsou splněny předpoklady **V 36/II.**

V 37/II: (Třetí věta o operátor-isomorfismu): Libovolný přípustný faktoroid $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na nějakém přípustném faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$ grupoidu $\mathfrak{G}/\Omega$ a zákryt $\overline{\mathfrak{A}}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{B}}$, vynucený faktoroidem $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, jsou operátor-isomorfní. Tento Ω-isomorfismus každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ přiřazuje právě ten prvek $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{A}}$, pro který platí $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$, $\bar{b} \in \overline{\mathfrak{B}}$.

Důkaz: Podle **V 13/I** je pole $\bar{A}$ faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$ přípustný rozklad a podle **V 28/I** existuje prosté Ω-zobrazení $\boldsymbol{i}$ přípustného rozkladu $\bar{\bar{B}}$ na přípustný rozklad $\bar{A}$, v němž každému prvku $\bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{B}}$ je přiřaděn právě ten prvek $\bar{a} \in \bar{A}$, pro který platí, že $\bar{a} = \mathbf{U}\bar{\bar{b}}$, kde $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$, $\bar{b} \in \bar{B}$. Protože, jak víme, je $\bar{A}$ polem faktoroidu $\overline{\mathfrak{A}}$, pak toto zobrazení $\boldsymbol{i}$ faktoroidu $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ na faktoroid $\overline{\mathfrak{A}}$ je isomorfismus (B, 9.3/85—86), a tedy podle **D 14/II** a pozn. 8/II jsou $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}$ a $\overline{\mathfrak{A}}$ operátor-isomorfní.

§ 1. Základní pojmy a věty

D 1/III: Je-li grupoid $\mathfrak{G}/\Omega$ grupa, pak říkáme, že $\mathfrak{G}$ je grupa s oborem operátorů Ω a značíme to $\mathfrak{G}/\Omega$.

V 1/III: Nechť $\mathfrak{G}/\Omega$ je grupa, a prvek z $\mathfrak{G}$ a 1 jednotkový prvek v $\mathfrak{G}$. Pak platí:

a) $\mathfrak{G}\alpha$ je podgrupa v $\mathfrak{G}$; b) $1\alpha = 1$; c) $(a\alpha)^{-1} = a^{-1}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: a) Podle **V 23/II** je $\mathfrak{G}\alpha$ pologrupa, tj. pro násobení platí zákon asociativní. Podle **V 25/II** je $\mathfrak{G}\alpha$ grupoid s dělením. Tedy pro každé dva prvky a', $c' \in \mathfrak{G}\alpha$ existuje aspoň jeden prvek $b' \in \mathfrak{G}\alpha$ tak, že $a' = b'c'$. Podobně pro každé dva prvky a', $b' \in \mathfrak{G}\alpha$ existuje alespoň jeden prvek $c' \in \mathfrak{G}\alpha$ tak, že $a' = b'c'$. Při tom pro každé dva prvky $b', c' \in \mathfrak{G}\alpha$ existuje právě jeden prvek $a' \in \mathfrak{G}\alpha$ tak, že $a' = b'c'$, neboť $\mathfrak{G}\alpha$ je podgrupoid v $\mathfrak{G}$ podle **V 2/II**. Jsou tedy splněny podmínky pro to, aby $\mathfrak{G}\alpha$ byla grupa (Kurosch, Gruppentheorie, Lemma 1, str. 25).

b) Protože $\mathfrak{G}\alpha$ je podgrupa v $\mathfrak{G}$, obsahuje jednotkový prvek 1 grupy $\mathfrak{G}$, a tedy podle **V 26/II** je $1\alpha = 1$.

c) Nechť nyní a je libovolný prvek z $\mathfrak{G}$. Pak platí $(a\alpha)(a^{-1}\alpha) = (aa^{-1})\alpha = 1\alpha = 1$, a tedy $a^{-1}\alpha$ je prvek inversní k $a\alpha$. Ten je, jak víme, jenom jeden, a tedy $(a\alpha)^{-1} = a^{-1}\alpha$.

D 2/III: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupa s oborem operátorů Ω. Podgrupa $\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$, která je přípustným podgrupoidem v $\mathfrak{G}$, se nazývá přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}$.

Úmluva 1/III: Mluvíme-li o přípustných podgrupách, pak to znamená, že jde o přípustné podgrupy jedné a téže grupy s daným oborem operátorů Ω.

Pozn. 1/III: Na přípustnou podgrupu $\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ se můžeme tedy dívat jako na grupu s týmž oborem operátorů Ω, tj. $\mathfrak{A}/\Omega$.

V 2/III: Průnik libovolného neprázdného systému přípustných podgrup v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ je přípustná podgrupa.

Důkaz: Průnik neprázdného systému podgrup není prázdný, neboť obsahuje jednotkový prvek 1. Podle **V 1/II** je tento průnik přípustný podgrupoid, jenž je podgrupou (B, 11.5.1/105), a tedy podle **D 2/III** je přípustnou podgrupou.

V 3/III: Nechť $\mathfrak{A}$ je přípustná podgrupa v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak $\mathfrak{A}\alpha$ je podgrupa v $\mathfrak{A}$ a v $\mathfrak{G}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 1/III** a **V 2/II.**

V 4/III: Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou zaměnitelné přípustné podgrupy v $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak platí:

a) součin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ je přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}$,

b) podgrupy $\mathfrak{A}\alpha$, $\mathfrak{B}\alpha$ jsou zaměnitelné v $\mathfrak{G}\alpha$ i v $\mathfrak{G}$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: a) Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zaměnitelné podgrupy, pak $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ je podgrupa v $\mathfrak{G}$ (B, 11.5.2/107), jež je podle **V 4/II** a **D 2/III** přípustná.

b) Podle **V 3/III** jsou $\mathfrak{A}\alpha$, $\mathfrak{B}\alpha$ podgrupy v $\mathfrak{G}\alpha \subset \mathfrak{G}$. Podle **V 3/II** platí $(\mathfrak{A}\alpha)(\mathfrak{B}\alpha) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Poněvadž $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, jsou také $\mathfrak{A}\alpha$, $\mathfrak{B}\alpha$ zaměnitelné podgrupy v $\mathfrak{G}\alpha \subset \mathfrak{G}$.

V 5/III: Nutná a postačující podmínka pro to, aby podgrupa $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{G}$ grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ byla přípustná, je, aby $\mathfrak{B}$ byla průnikem dvou navzájem různých přípustných komplexů $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 5/II,** pozn. 3/II a **D 2/III.**

§ 2. Přípustné rozklady a faktorové grupy

Pozn. 2/III: V dalších úvahách si budeme všímat jen levých rozkladů grupy. Je zřejmé, že analogické úvahy platí i pro pravé rozklady.

V 6/III: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupa s oborem operátorů Ω. Pak levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ je přípustný tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{A}$ přípustná podgrupa.

Důkaz: Nechť a je libovolný prvek z $\mathfrak{G}$, α libovolný operátor z Ω a $\mathfrak{A}$ přípustná podgrupa. Pak $(a\mathfrak{A})\alpha = (a\alpha)(\mathfrak{A}\alpha)$ podle **V 3/II** a $\mathfrak{A}\alpha \subset \mathfrak{A}$ podle předpokladu. Pak $(a\mathfrak{A})\alpha \subset a'\mathfrak{A}$, kde $a' = a\alpha$. Položíme-li $(a\mathfrak{A}) \cdot \alpha = a'\mathfrak{A}$, jsou splněny podmínky **D 5/I** a rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ je tedy přípustný.

Není-li $\mathfrak{A}$ přípustná podgrupa, pak neplatí $\mathfrak{A}\alpha \subset \mathfrak{A}$, a tedy také $(a\mathfrak{A})\alpha$ není (obecně) podmnožinou v $a'\mathfrak{A}$, kde $a' = a\alpha$, a tedy $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ není přípustný rozklad. Tím je věta dokázána.

V 7/III: Levý rozklad grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) je přípustným zákrytem (zjemněním) levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{B}$($\mathfrak{A}$) tehdy a jen tehdy, když $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou přípustné podgrupy a když $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na $\mathfrak{B}$.

Důkaz: Levý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) je zákrytem (zjemněním) levého rozkladu vytvořeného podgrupou $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$) tehdy a jen tehdy, když podgrupa $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na $\mathfrak{B}$ (B, 12.3.2/115). Při tom $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{B}$ jsou přípustné tehdy a jen tehdy podle **V 6/III,** když $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou přípustné podgrupy. Tím je věta dokázána.

V 8/III: Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jsou podgrupy v $\mathfrak{G}$, a nechť $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$. Pak platí:

1. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$,
2. $\mathfrak{B}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$.

Důkaz: B, 12.4.1/117.

Důsledek 1/III: Jestliže speciálně $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, pak platí:

1. $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$,
2. $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} \sqcap \mathfrak{C} = \mathfrak{C}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$,

neboť $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$.

V 9/III: Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jsou přípustné podgrupy v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$. Pak rozklady v rovnostech 1. a 2. z věty **V 8/III** jsou přípustné.

Důkaz: 1. Vzhledem k rovnosti 1. z **V 8/III** stačí dokázat, že rozklad $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{A}/_l\mathfrak{A}$ je přípustný. Protože $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jsou přípustné podgrupy, pak podle **V 2/III** jejich průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ je přípustná podgrupa. Podle **V 4/II** je součin $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{A}$ přípustný a je podgrupou v $\mathfrak{G}$ (B, 12.4.1/117). Pak podle **V 6/III** je levý rozklad přípustné podgrupy $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{A}$ vytvořený přípustnou podgrupou $\mathfrak{A}$ přípustný.

2. Vzhledem k rovnosti 2. z **V 8/III** stačí dokázat, že rozklad $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/_l\,(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ je přípustný. Předně $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ jsou přípustné podgrupy podle **V 2/III,** při čemž $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$. Tedy podle **V 6/III** je $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\,\mathfrak{A}/_l(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ přípustný rozklad.

Důsledek 2/III: Jestliže speciálně $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, pak rozklady v rovnostech 1. a 2. z důsledku 1/III jsou přípustné.

D 3/III: Když nějaká podgrupa $\mathfrak{A}$ v grupě $\mathfrak{G}$ se vyznačuje tím, že levá a pravá třída každého prvku $a \in \mathfrak{G}$ vzhledem k podgrupě $\mathfrak{A}$ splývají, tj. když platí rovnost $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$, pak pravíme, že $\mathfrak{A}$ jest *invariantní* nebo *normální* podgrupou v grupě $\mathfrak{G}$.

V tomto případě ovšem levý a pravý rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ splývají v jeden tzv. rozklad grupy $\mathfrak{G}$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$. (B, 13.1/120).

V 10/III: Je-li $\mathfrak{A}$ přípustná invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}/\Omega$, pak $\mathfrak{A}\alpha$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Podle **V 1/III** je $\mathfrak{G}\alpha$ podgrupa v $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{A}\alpha$ je podgrupa v $\mathfrak{G}\alpha$ podle **V 3/III**. Podle předpokladu platí $a\mathfrak{A} = \mathfrak{A}a$ pro každý prvek $a \in \mathfrak{G}$. Nechť a' je libovolný prvek z $\mathfrak{G}\alpha$. Pak v $\mathfrak{A}$ existuje aspoň jeden prvek a tak, že $a' = a\alpha$. Pak platí $a'(\mathfrak{A}\alpha) = (a\alpha)(\mathfrak{A}\alpha) = (a\mathfrak{A})\alpha = (\mathfrak{A}a)\alpha = (\mathfrak{A}\alpha)(a\alpha) = (\mathfrak{A}\alpha)a'$ podle **V 3/II** a předpokladu, že $\mathfrak{A}$ je invariantní. Je tedy $\mathfrak{A}\alpha$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}\alpha$.

Pozn. 3/III: $\mathfrak{A}\alpha$ nemusí být invariantní v $\mathfrak{G}$, neboť podgrupa $\mathfrak{G}\alpha$ je obecně různá od $\mathfrak{G}$ (B, 13.2.2/121).

V 11/III: Nechť podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou přípustné v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Když $\mathfrak{A}$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{A}\alpha$ je invariantní v podgrupě $\mathfrak{B}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: $\mathfrak{A}$ je invariantní v $\mathfrak{B}$ (B, 13.2.2/121). Pak $\mathfrak{A}\alpha$ je invariantní v $\mathfrak{B}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$ podle **V 10/III.** $\mathfrak{A}\alpha$, $\mathfrak{B}\alpha$ jsou podgrupy v $\mathfrak{G}\alpha$ podle **V 3/III,** při čemž $\mathfrak{A}\alpha \subset \mathfrak{B}\alpha$.

V 12/III: Když přípustná podgrupa $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}/\Omega$ je invariantní v $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{A}\alpha$ je zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}\alpha$.

Důkaz: Podle **V 10/III** je $\mathfrak{A}\alpha$ invariantní v $\mathfrak{G}\alpha$, a tedy zaměnitelná s každou podgrupou $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}\alpha$ (B, 13.2.3/121).

Pozn. 4/III: Jestliže $\mathfrak{C}$ je přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}/\Omega$, pak $\mathfrak{A}\alpha$ z **V 12/III** je zaměnitelná s $\mathfrak{C}\alpha$, neboť $\mathfrak{C}\alpha$ je podle **V 3/III** podgrupa v $\mathfrak{G}\alpha$.

V 13/III: Když podgrupy $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ jsou přípustné a invariantní v $\mathfrak{G}/\Omega$, pak také průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ a součin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ jsou přípustné invariantní podgrupy v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$.

Důkaz: Průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ a součin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ jsou invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}$ (B, 13.2.4/121). Průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ je pak přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}$ podle **V 2/III.** Podle **V 4/III** je součin $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}$.

V 14/III: (Oreova věta pro grupy s operátory): Nechť $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ jsou libovolné přípustné invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ a $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ jsou přípustné podgrupy a platí

$$[(\mathfrak{A}\alpha)[(\mathfrak{B}\alpha) \cap (\mathfrak{C}\alpha)] = [(\mathfrak{A}\alpha)(\mathfrak{B}\alpha)] \cap (\mathfrak{C}\alpha) \tag{1,3}$$

pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Předně $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$ a $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cap \mathfrak{C}$ jsou podgrupy v $\mathfrak{G}$ a platí pro ně $\mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ (B, 13.2.5/121—122). Podle **V 2/III** a **V 4/III** jsou tyto podgrupy přípustné. Podle **V 10/III** jsou $\mathfrak{A}\alpha$, $\mathfrak{B}\alpha$, $\mathfrak{C}\alpha$ invariantní podgrupy v $\mathfrak{G}\alpha$ a podle **V 3/III** je $\mathfrak{A}\alpha \subset \mathfrak{C}\alpha$. Platí tedy $(\mathfrak{A}\alpha)[(\mathfrak{B}\alpha) \cap (\mathfrak{C}\alpha)] = [(\mathfrak{A}\alpha)(\mathfrak{B}\alpha)] \cap (\mathfrak{C}\alpha)$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

V 15/III: Levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ vytvořený podgrupou $\mathfrak{A}$ je přípustný a vytvořující tehdy a jen tehdy, když $\mathfrak{A}$ je přípustná invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$. Při tom pro každé $\alpha \in \Omega$ platí

$$[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})] \cdot \alpha = (a\alpha)(b\alpha)\mathfrak{A} = [(a\mathfrak{A}) \cdot \alpha][(b\mathfrak{A}) \cdot \alpha].$$

Důkaz: Levý rozklad $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ grupy $\mathfrak{G}$ je vytvořující tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{A}$ invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$ (B, 13.3.1/122—123). Avšak $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ je přípustný podle **V 6/III** tehdy a jen tehdy, je-li $\mathfrak{A}$ přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}$. Dále platí $(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A}) = ab\mathfrak{A}$ (B, 13.3/122—123). Použijeme-li ještě **V 3/II** a **D 3/II** platí pro každé

$\alpha \in \Omega$: $[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})]\alpha = [(ab)\mathfrak{A}]\alpha = [(ab)\alpha](\mathfrak{A}\alpha) = (a\alpha)(b\alpha)(\mathfrak{A}\alpha)$. Avšak $\mathfrak{A}\alpha \subset \subset \mathfrak{A}$, neboť $\mathfrak{A}$ je přípustná podgrupa. Máme tedy celkem $[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})]\alpha \subset \subset (a\alpha)(b\alpha)\mathfrak{A}$ a podle **D 5/I** můžeme psát $[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})] \cdot \alpha = (a\alpha)(b\alpha)\mathfrak{A}$. Dále podle **V 3/II** a **D 5/I** platí $[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})]\alpha = [(a\mathfrak{A})\alpha][(b\mathfrak{A})\alpha] \subset [(a\mathfrak{A})\cdot\alpha][(b\mathfrak{A})\cdot\alpha]$. Protože každé dva prvky rozkladu, jež jsou incidentní, jsou totožné, proto $[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})] \cdot \alpha = (a\alpha)(b\alpha)\mathfrak{A} = [(a\mathfrak{A}) \cdot \alpha][(b\mathfrak{A}) \cdot \alpha]$.

V 16/III: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupa s oborem operátorů Ω. Pak všechny přípustné vytvořující rozklady grupy $\mathfrak{G}$ jsou právě jenom rozklady vytvořené jednotlivými invariantními přípustnými podgrupami v $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Všechny vytvořující rozklady grupy jsou právě jenom rozklady vytvořené jednotlivými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$ (B, 13.3.2/124—125). Protože $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A}$ je přípustný rozklad podle **V 6/III** tehdy a jen tehdy, když $\mathfrak{A}$ je přípustná podgrupa a protože $\mathfrak{G}/_l\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/_p\mathfrak{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, je-li $\mathfrak{A}$ invariantní podgrupa, je věta dokázána.

V 17/III: Nechť $\bar{A}$, $\bar{B}$ jsou libovolné přípustné vytvořující rozklady na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$. Rozklad $\bar{A}(\bar{B})$ je přípustným zákrytem (zjemněním) přípustného rozkladu $\bar{B}(\bar{A})$ tehdy a jen tehdy, když $\bar{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\bar{B} = \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ a když $\mathfrak{A}$ je přípustná invariantní nadgrupa na přípustné invariantní podgrupě $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Podle **V 16/III** je rozklad $\bar{A}$ ($\bar{B}$) přípustný a vytvořující tehdy a jen tehdy, je-li vytvořen jistou přípustnou invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) v $\mathfrak{G}$. Další část tvrzení plyne z **V 7/III.**

V 18/III: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupa s oborem operátorů Ω. Pak každému operátoru $\alpha \in \Omega$ přísluší určitá faktorová grupa $\bar{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}$, která je isomorfní s $\mathfrak{G}\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$.

Důkaz: Podle **V 22/II** je faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$ příslušný operátoru α isomorfní s $\mathfrak{G}\alpha$, při čemž $\mathfrak{G}\alpha$ je grupa podle **V 1/III.**

Nechť $\bar{\mathfrak{G}}$ je libovolný přípustný faktoroid na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$. Podle definice přípustného faktoroidu je pole faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}$ jistý přípustný vytvořující rozklad grupy $\mathfrak{G}$. Ten je podle věty **V 16/III** vytvořen jistou invariantní přípustnou podgrupou $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$. Při tom podle **V 15/III** platí

$$[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})] \cdot \alpha = [(a\mathfrak{A}) \cdot \alpha][(b\mathfrak{A}) \cdot \alpha] = (a\alpha)(b\alpha)\mathfrak{A} \text{ pro každé } \alpha \in \Omega.$$

V 19/III: Přípustný faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ je grupa s oborem operátorů Ω, v níž jednotkovým prvkem je pole jisté přípustné invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ a prvek inversní vzhledem k libovolnému prvku $a\mathfrak{A}$ je $a^{-1}\mathfrak{A}$.

Důkaz: Přípustný faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ je vytvořen, jak bylo shora řečeno, jistou invariantní přípustnou podgrupou $\mathfrak{A}$. Jeho jednotkovým prvkem je pole této invariantní podgrupy $\mathfrak{A}$ a prvek inversní k prvku $a\mathfrak{A}$ je $a^{-1}\mathfrak{A}$ (B, 14.1/126—127). Protože platí $[(a\mathfrak{A})(b\mathfrak{A})] \cdot \alpha = [(a\mathfrak{A}) \cdot \alpha][(b\mathfrak{A}) \cdot \alpha]$ podle **V 15/III,** je $\bar{\mathfrak{G}}$ grupa s oborem operátorů podle **D 1/III.**

Každý přípustný faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ je tedy grupou s oborem operátorů Ω, tj. $\bar{\mathfrak{G}}/\Omega$, a jest určen jednoznačně jistou přípustnou invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$, a to tím způsobem, že pole faktoroidu $\bar{\mathfrak{G}}$ je rozklad grupy tvořený podgrupou $\mathfrak{A}$.

D 4/III: Přípustný faktoroid $\bar{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}/\Omega$ nazýváme faktorová grupa s oborem operátorů Ω neboli grupa tříd s oborem operátorů Ω a pravíme, že jest vytvořena přípustnou invariantní podgrupou $\mathfrak{A}$; označujeme ji symbolem $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A})/\Omega$.

Na základě věty **V 16/III** máme tento přehled o všech možných přípustných faktoroidech na libovolné grupě $\mathfrak{G}/\Omega$.

Důsledek 3/III: Všechny přípustné faktoroidy grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ jsou právě jenom takové faktorové grupy na $\mathfrak{G}$ s oborem operátorů Ω, jež jsou vytvořeny jednotlivými přípustnými invariantními podgrupami v $\mathfrak{G}$.

Všimněme si, že největším (nejmenším) přípustným faktoroidem na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ je tzv. největší (nejmenší) faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$) s oborem operátorů Ω; je vytvořena největší (nejmenší) přípustnou invariantní podgrupou v $\mathfrak{G}$, tj. podgrupou $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{E}$). Podgrupa $\mathfrak{G}$ je přípustná podle definice. Podgrupa $\mathfrak{E}$ je tvořena jediným prvkem, tj. jednotkovým prvkem grupy 1, pro který podle **V 1/III** platí $1\alpha = 1$ pro každé $\alpha \in \Omega$, a tedy $\mathfrak{E}$ je přípustná podgrupa.

Vlastnosti faktorových grup s operátory plynou z vlastností přípustných vytvořujících rozkladů grupy.

V 20/III: Nechť $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ jsou libovolné faktorové grupy s oborem operátorů Ω na $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$) je přípustným zákrytem (zjemněním) faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$) tehdy a jen tehdy, když přípustná invariantní podgrupa $\mathfrak{A}$ je nadgrupou na přípustné invariantní podgrupě $\mathfrak{B}$ v $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Označíme-li $\bar{A} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, $\bar{B} = \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, pak tvrzení plyne z **V 17/III** a **D 4/III.**

V 21/III: Nechť $\mathfrak{B}$ je libovolná přípustná invariantní podgrupa v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathfrak{B}_1$ je libovolná invariantní přípustná podgrupa ve faktorové grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$. Pak faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ má rovněž obor operátorů Ω a její zákryt, vynucený faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$, která má také obor operátorů Ω, je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ s oborem operátorů Ω. Pole invariantní přípustné podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ je součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, z nichž se skládá invariantní přípustná podgrupa $\mathfrak{B}_1$. Podgrupa $\mathfrak{B}_1$ je grupa $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ s oborem operátorů Ω.

Důkaz: Věta je správná, neuvažujeme-li tvrzení týkající se operátorů (B, 14.5/128—129). Rozklad $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ je přípustný podle **V 6/III,** a tedy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ je faktorová grupa s oborem operátorů Ω podle **D 4/III** a **V 15/III.** Z téhož důvodu má rovněž faktorová grupa $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ obor operátorů Ω. Protože faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ je zákrytem přípustného faktoroidu $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ vynuceným přípustným faktoroidem $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ na $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, proto také faktoroid $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ je podle **V 14/II** přípustný, a tedy $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ je faktorová grupa s oborem operátorů Ω. Při tom $\mathfrak{A}$ musí být přípustná invariantní podgrupa v $\mathfrak{G}$ podle **V 15/III.** Protože $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{A}$ má obor operátorů Ω, $\mathfrak{B}$ je přípustná podgrupa, má faktorová grupa $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ obor operátorů Ω podle **V 15/III** a **D 4/III.** Tím je věta dokázána.

V 22/III: Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jsou přípustné v $\mathfrak{G}/\Omega$, nechť $\mathfrak{A}$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a nechť $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$, pak faktoroidy $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C}$, $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ a $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ jsou přípustné.

Důkaz: Uvažované rozklady jsou faktoroidy (B, 14.4.1/128). Další část tvrzení plyne z **V 9/III** a z toho, že levý a pravý rozklad grupy vytvořené invariantní podgrupou splývají.

Důsledek 4/III: Jestliže $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, pak rozklady $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{G}/\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ jsou přípustné.

Důkaz tvrzení plyne bezprostředně z **V 22/III** a důsledku 2/III.

§ 3. Ω-deformace

V 23/III: Nechť $\mathfrak{G}$ je grupa s oborem operátorů Ω a nechť existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$. Pak lze definovat užití operátorů z Ω na prvky z $\mathfrak{G}^\star$ tak, že $\boldsymbol{d}$ je Ω-deformace $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^\star/\Omega$.

Důkaz: Grupoid $\mathfrak{G}^\star$ je grupa (B, 15.1.1/129). Definujeme-li násobení prvků z $\mathfrak{G}^\star$ operátory z Ω jako v důkazu **V 27/II,** pak deformace $\boldsymbol{d}$ je Ω-deformace.

V 24/III: Nechť existuje isomorfní zobrazení $\boldsymbol{i}$ grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star$. Pak lze definovat užití operátorů z Ω na prvky z $\mathfrak{G}^\star$ tak, že $\boldsymbol{i}$ je Ω-isomorfní zobrazení $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^\star/\Omega$.

Důkaz: Protože $\boldsymbol{i}$ je deformace, je věta správná, jak plyne z **V 23/III** a **V 28/II.**

V 25/III: Nechť existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$ příslušný deformaci $\boldsymbol{d}$ připouští obor operátorů Ω tak, že $\mathfrak{G}^\star$ a $\overline{\mathfrak{G}}$ jsou operátor-isomorfní.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 29/II** a z toho, že $\mathfrak{G}^\star$ je grupa (B, 15.1.1/128).

V 26/III: Nechť existuje deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak lze definovat operátorové násobení prvků z $\mathfrak{G}$ operátory z Ω tak, že $\boldsymbol{d}$ je Ω-zobrazení $\mathfrak{G}$ na grupu $\mathfrak{G}^\star$; lze-li operátorové násobení definovat tak, že platí **D 3/II,** pak $\boldsymbol{d}$ je Ω-deformace.

Důkaz: Jak již bylo řečeno, je $\mathfrak{G}^\star$ grupa. Další tvrzení plyne bezprostředně z **V 30/II.**

V 27/III: Nechť $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{G}^\star$ jsou grupoidy s oborem operátorů Ω a nechť existuje Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupoidu $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Pak platí:

a) Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$ příslušný Ω-deformaci $\boldsymbol{d}$ je přípustný a je to grupa, je-li $\mathfrak{G}^\star$ grupa.

b) Je-li $\mathfrak{G}$ grupa, pak $\mathfrak{G}^\star$ je grupa a existuje deformace grupy $\mathfrak{G}\alpha$ na grupu $\mathfrak{G}^\star\alpha$ pro každé $\alpha \in \Omega$. Tato deformace je původní deformace $\boldsymbol{d}$.

Důkaz: a) Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ je grupa (B, 15.1.2/130), jež je přípustná podle **V 31/IIa**).

b) Předně $\mathfrak{G}^\star$ je grupa (B, 15.1.1/129). Dále $\mathfrak{G}\alpha$, $\mathfrak{G}^\star\alpha$ jsou rovněž grupy podle **V 1/III.** Podle **V 31/II** b) existuje deformace grupoidu $\mathfrak{G}\alpha$ na grupoid $\mathfrak{G}^\star\alpha$. Tato deformace je původní deformace $\boldsymbol{d}$.

V 28/III: (Cayleyova věta pro grupy s operátory): Každá grupa s oborem operátorů Ω je operátor-isomorfní s jistou permutační grupou (s oborem operátorů Ω).

Důkaz: Každá grupa $\mathfrak{G}$ je isomorfní s jistou permutační grupou $\mathfrak{T}_l$ (B, 15.2.2/131—132). Podle **V 24/III** lze definovat operátorové násobení prvků z $\mathfrak{T}_l$ operátory z Ω tak, že grupa $\mathfrak{G}$ je operátor-isomorfní s $\mathfrak{T}_l$.

Důsledek 5/III: Z právě uvedené věty vyplývá, že každá abstraktní grupa $\mathfrak{G}/\Omega$ se dá realisovat příslušnou permutační grupou $\mathfrak{T}_l$, kde užití operátorů z Ω na prvky $\mathfrak{T}_l$ bylo vhodně definováno tak, že $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{T}_l$ jsou operátor-isomorfní. Protože každé užití operátoru $\alpha \in \Omega$ na prvky grupy $\mathfrak{G}$ znamená endomorfní zobrazení (v širším smyslu) grupy $\mathfrak{G}$, pak všechny možné endomorfismy grupy $\mathfrak{T}_l$ isomorfní s $\mathfrak{G}$ nám representují abstraktní grupu $\mathfrak{G}$ se všemi možnými obory operátorů. Endomorfním zobrazením v širším smyslu při tom rozumíme, že to může být deformace grupy do sebe nebo isomorfní zobrazení do sebe nebo na sebe.

§ 4. Operátor-isomorfismus grup

V 29/III: Nechť existuje Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ na grupu $\mathfrak{G}^\star/\Omega$. Pak množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotkového prvku grupy $\mathfrak{G}^\star$ tvoří přípustnou invariantní podgrupu $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na $\mathfrak{G}$, vytvořená přípustnou invariantní podgrupou $\mathfrak{D}$, je operátor-isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$.

Důkaz: Faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ na $\mathfrak{G}$ příslušný k deformaci $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$ je přípustný podle **V 27/III** a). Podle **V 33/II** je tento faktoroid operátor-isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$. Protože faktoroid $\overline{\mathfrak{G}}$ je faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ vytvořená invariantní podgrupou $\mathfrak{D}$ (B, 15.3.1/133) a poněvadž faktoroid $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ je přípustný, je podle **V 6/III** podgrupa $\mathfrak{D}$ přípustná. Tím je věta dokázána.

V 30/III: Nechť $\mathfrak{D}$ je invariantní přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}/\Omega$. Pak zobrazení $\boldsymbol{d}$, jež každému prvku $a \in \mathfrak{G}$ přiřazuje tu třídu faktorové grupy $(\mathfrak{G}/\mathfrak{D})/\Omega$, která tento prvek obsahuje, je Ω-deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$.

D 5/III: Ω-deformaci z předchozí věty nazýváme *přirozený* operátor-homomorfismus nebo kratčeji *přirozená* Ω-deformace.

Důkaz: Každá třída z $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ je tvaru $b\mathfrak{D}$, kde $b \in \mathfrak{G}$, a je obrazem aspoň jednoho prvku z $\mathfrak{G}$. Nechť a je libovolný prvek z $\mathfrak{G}$, $\bar{a}$ jemu přiřazený prvek rozkladu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ v zobrazení $\boldsymbol{d}$, tj. $\boldsymbol{d}a = \bar{a}$. Protože $\bar{a}$ obsahuje prvek a, pak $\bar{a} = a\mathfrak{D}$, jak plyne z definice a vlastností rozkladu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Tedy $\boldsymbol{d}a = \bar{a} = a\mathfrak{D}$. Analogicky $\boldsymbol{d}b = \bar{b} = b\mathfrak{D}$, $\boldsymbol{d}1 = \bar{1} = 1\mathfrak{D}$, kde 1 je jednotkový prvek grupy $\mathfrak{G}$. Jestliže $ab = c$, pak $(\boldsymbol{d}a)(\boldsymbol{d}b) = \bar{a} \cdot \bar{b} = (a\mathfrak{D})(b\mathfrak{D}) = ab\mathfrak{D} = c\mathfrak{D} = \bar{c} = \boldsymbol{d}c = \boldsymbol{d}ab$, jak plyne z definice násobení tříd v $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ a z definice zobrazení $\boldsymbol{d}$. Zobrazení $\boldsymbol{d}$ je tedy deformace. Nechť $a\alpha = a'$, pak $\boldsymbol{d}(a\alpha) = \boldsymbol{d}a' = \bar{a}' = a'\mathfrak{D} = (a\alpha)(1\alpha)\mathfrak{D} = (a\mathfrak{D})\alpha$ podle **V 15/III.** Je tedy $\boldsymbol{d}(a \cdot \alpha) = (\boldsymbol{d}a) \cdot \alpha$ a $\boldsymbol{d}$ je Ω-zobrazení, čímž je věta dokázána.

V 31/III: Nechť existuje Ω-deformace grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ na grupu $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ a nechť $\mathfrak{D}$ je množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotkového prvku $1^\star$ grupy $\mathfrak{G}^\star$. Nechť $\boldsymbol{g}$ je přirozená Ω-deformace $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$. Pak existuje Ω-isomorfismus $\boldsymbol{i}$ grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na $\mathfrak{G}^\star$ tak, že $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{ig}$.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{d}a = a^\star$, $a \in \mathfrak{G}$, $a^\star \in \mathfrak{G}^\star$. Pak množina všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotkového prvku $1^\star$ grupy $\mathfrak{G}^\star$ tvoří přípustnou invariantní podgrupu $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$ a faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ je operátor-isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$. Tento operátor-isomorfismus $\boldsymbol{i}$ přiřazuje každému prvku $\bar{a} = a\mathfrak{D}$ grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ ten prvek $a^\star \in \mathfrak{G}^\star$, pro který platí $\boldsymbol{d}a = a^\star$. Jest totiž $\boldsymbol{d}a_1 = a^\star$ pro každý prvek $a_1 \in \bar{a}$, neboť $a_1 = ad$, kde $d \in \mathfrak{D}$, a tedy $\boldsymbol{d}a_1 = \boldsymbol{d}(ad) = (\boldsymbol{d}a)(\boldsymbol{d}d) = a^\star 1^\star = a^\star$. Pro přirozenou Ω-deformaci $\boldsymbol{g}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ platí $\boldsymbol{g}a_1 = \bar{a}$, $a_1 \in \bar{a} = a\mathfrak{D}$. Pak $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{g}a_1) = \boldsymbol{i}\bar{a} = a^\star$. Poněvadž $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{g}$ jsou Ω-deformace, je také $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{ig}$ podle **V 17/II** Ω-deformace.

Větu **V 31/III** můžeme také vyslovit takto:

V 31′/III: Všemi přirozenými Ω-deformacemi grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ na všechny její faktorové grupy s oborem operátorů Ω jsou vyčerpány všechny Ω-deformace této grupy, tj. operátor-homomorfní obraz grupy $\mathfrak{G}/\Omega$ při nějaké Ω-deformaci $\boldsymbol{d}$ dá se tak zobrazit na jistou faktorovou grupu (s oborem operátorů Ω) na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$, že Ω-deformace přejde v přirozenou Ω-deformaci $\mathfrak{G}$ na tuto faktorovou grupu.

V 32/III: Nechť grupa $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ je operátor-isomorfní s faktorovou grupou na $\mathfrak{G}/\Omega$, vytvořenou nějakou přípustnou invariantní podgrupou $\mathfrak{D}$ v $\mathfrak{G}$. Pak existuje

Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$ taková, že $\mathfrak{D}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotkového prvku grupy $\mathfrak{G}^\star$.

Důkaz: Faktorová grupa $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ je faktoroid na $\mathfrak{G}$, který je operátor-isomorfní s $\mathfrak{G}^\star$. Podle **V 34/II** existuje Ω-deformace $\boldsymbol{d}$ grupy $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^\star$. Při tom $\mathfrak{D}$ se skládá ze všech vzorů v $\boldsymbol{d}$ jednotkového prvku grupy $\mathfrak{G}^\star$ (B, 15.3.1/133).

V 33/III: (První věta o operátor-isomorfismu): Když grupa $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ je operátor-homomorfní s grupou $\mathfrak{G}/\Omega$, pak je operátor-isomorfní s jistou faktorovou grupou $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$; když grupa $\mathfrak{G}^\star/\Omega$ je operátor-isomorfní s některou přípustnou faktorovou grupou $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ na grupě $\mathfrak{G}/\Omega$, pak je operátor-homomorfní s $\mathfrak{G}$.

Důkaz: Věta je shrnutím **V 29/III** a **V 32/III.**

V 34/III: (Druhá věta o operátor-isomorfismu): Nechť $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jsou přípustné podgrupy v grupě $\mathfrak{G}/\Omega$ takové, že $\mathfrak{A}$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$. Pak $\mathfrak{A}$ je přípustná invariantní podgrupa v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$ a $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ je přípustná invariantní podgrupa v $(\mathfrak{C} \cup \mathfrak{B})$ a faktorová grupa $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ je operátor-isomorfní s faktorovou grupou $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$. Ω-isomorfismus je dán incidencí prvků.

Důkaz: $\mathfrak{A}$ je invariantní v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ je invariantní v $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})$ (B, 15.3.2/134). $\mathfrak{A}$ je přípustná podle předpokladu, $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A}$ je přípustná podle **V 2/III.** Podle **V 22/III** jsou faktoroidy $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ a $(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$ přípustné. Jak je známo (B, 14.4.1/128), platí $\mathfrak{C} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \cup \mathfrak{B})\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ a $(\mathfrak{B}/\mathfrak{A}) \sqcap \mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$. Faktoroid $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ je přípustný podle **V 15/III** a proto obal $\mathfrak{A} \sqsubset (\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$ je operátor-isomorfní s průsekem $\mathfrak{C} \sqcap (\mathfrak{B}/\mathfrak{A})$, při čemž isomorfismus je podle **V 36/II** dán incidencí prvků.

Důsledek 6/III: Je-li $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, platí: Jsou-li $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ přípustné podgrupy v $\mathfrak{G}/\Omega$ a je-li $\mathfrak{A}$ invariantní v $\mathfrak{G}$, pak $\mathfrak{C}\mathfrak{A}/\mathfrak{A}$ je operátor-isomorfní s $\mathfrak{C}/(\mathfrak{C} \cap \mathfrak{A})$, při čemž isomorfismus je dán incidencí prvků.

Důkaz plyne bezprostředně z **V 34/III** a důsledku 4/III.

V 35/III: (Třetí věta o operátor-isomorfismu): Je-li $\mathfrak{B}$ invariantní přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}/\Omega$ a $\mathfrak{B}_1$ invariantní přípustná podgrupa v $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\Omega$, pak součet prvků faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\mathfrak{B}_1$ je polem jisté invariantní přípustné podgrupy $\mathfrak{A}$ v $\mathfrak{G}$ a platí, že faktorová grupa $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ je operátor-isomorfní s $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Ω-isomorfismus přiřazuje každému prvku $\bar{\bar{b}}$ faktorové grupy $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ součet všech prvků $\bar{b}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ ležících v $\bar{\bar{b}}$.

Důkaz: Podle **V 21/III** jsou $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ faktorové grupy s oborem operátorů. Podle **V 37/II** je faktorová grupa $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ na faktorové grupě $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ operátor-isomorfní se zákrytem $\bar{\mathfrak{A}}$ faktorové grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, vynuceným faktorovou grupou $(\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$. Při tom Ω-isomorfismus je zobrazení, v němž každému prvku $\bar{\bar{b}} \in (\mathfrak{G}/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_1$ je přiřaděn součet $\mathbf{U}\bar{b} = \bar{a}$, $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{b} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, $\bar{b} \in \bar{\bar{b}}$. Přípustný zákryt $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ podle **V 21/III,** a pole přípustné invariantní pogrupy $\mathfrak{A}$ je součet všech prvků grupy $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, z nichž se skládá přípustná invariantní podgrupa $\mathfrak{B}_1$. Tím je věta dokázána.

D 6/III: Nechť

$$(1) \qquad \mathfrak{M},\ \mathfrak{M}',\ \mathfrak{N},\ \mathfrak{N}'$$

jsou přípustné podgrupy v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathfrak{M}'$ je invariantní podgrupa v $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}'$

invariantní podgrupa v $\mathfrak{N}$. Jestliže $\mathfrak{C}$ je přípustná podgrupa v $\mathfrak{G}$, pro niž platí

(2) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{C}\mathfrak{M}', \ \mathfrak{N} = \mathfrak{C}\mathfrak{N}',$$

(3) $$\mathfrak{C} \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{C} \cap \mathfrak{N}',$$

pak říkáme, že $\mathfrak{C}$ je přípustná Zassenhausova podgrupa ke čtyřem podgrupám (1).

V 36/III: Nechť $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \mathfrak{C}$ jsou podgrupy z **D 6/III** a nechť c je libovolný prvek z $\mathfrak{C}$. Jestliže každému prvku $\bar{a} = c\mathfrak{M}'$ faktorové grupy $(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}')/\Omega$ přiřadíme ten prvek $\bar{b}$ faktorové grupy $(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}')/\Omega$, pro který platí $\bar{b} = c\mathfrak{N}'$, pak faktorová grupa $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ je operátor-isomorfní s faktorovou grupou $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$.

Důkaz: Podle **V 15/III** a **D 4/III** jsou $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}', \mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ faktorové grupy s oborem operátorů Ω. Uvedeným předpisem $\boldsymbol{d}$, pro který platí $\boldsymbol{d}\bar{a} = \bar{b}$, kde $\bar{a} = c\mathfrak{M}'$, $\bar{b} = c\mathfrak{N}'$, $c \in \mathfrak{C}$, je dáno zobrazení prvků z $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ na prvky $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$. Toto zobrazení je Ω-zobrazení. Podle **V 4/II** a **V 2/III** jsou totiž podgrupy z (2) a (3) z **D 6/III** přípustné a podle **V 3/II** platí $(c\mathfrak{M}')\alpha = (c\alpha)(\mathfrak{M}'\alpha) \subset c'\mathfrak{M}'$, kde $c' = c\alpha$, a tedy podle **D 5/I** platí $\bar{a} \cdot \alpha = (c\mathfrak{M}') \cdot \alpha = c'\mathfrak{M}' = \bar{a}'$. Podobně $(c\mathfrak{N}')\alpha = (c\alpha)(\mathfrak{N}'\alpha) \subset c'\mathfrak{N}'$, a tedy $\bar{b} \cdot \alpha = (c\mathfrak{N}') \cdot \alpha = c'\mathfrak{N}' = \bar{b}'$. Pak $\boldsymbol{d}(\bar{a} \cdot \alpha) = \boldsymbol{d}a' = \bar{b}' = \bar{b} \cdot \alpha = (\boldsymbol{d}\bar{a}) \cdot \alpha$. Tedy skutečně $\boldsymbol{d}$ je Ω-zobrazení. Toto zobrazení je prosté zobrazení $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ na $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$, neboť ze vztahu (3) definice **D 6/III** plyne, že $c_1\mathfrak{M}' = c_2\mathfrak{M}' \Rightarrow c_1\mathfrak{N}' = c_2\mathfrak{N}'$, c_1, $c_2 \in \mathfrak{C}$. Nechť $c_1c_2 = c \in \mathfrak{C}$. Označme dále $\bar{a} = c\mathfrak{M}'$, $\bar{a}_1 = c_1\mathfrak{M}'$, $\bar{a}_2 = c_2\mathfrak{M}'$, $\bar{b} = c\mathfrak{N}'$, $\bar{b}_1 = c_1\mathfrak{N}'$, $\bar{b}_2 = c_2\mathfrak{N}'$. Pak platí $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = (c_1\mathfrak{M}')(c_2\mathfrak{M}') = c_1c_2\mathfrak{M}' = c\mathfrak{M}' = \bar{a}$, $\bar{b}_1\bar{b}_2 = (c_1\mathfrak{N}')(c_2\mathfrak{N}') = c_1c_2\mathfrak{N}' = c\mathfrak{N}' = \bar{b}$. Pak $\boldsymbol{d}(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2) = \boldsymbol{d}\bar{a} = \bar{b} = \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 = (\boldsymbol{d}\bar{a}_1) \cdot (\boldsymbol{d}\bar{a}_2)$. Je tedy $\boldsymbol{d}$ Ω-deformace a $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}'$ a $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}'$ jsou operátor-isomorfní podle **D 14/II** a pozn. 8/II.

V 37/III: (Zassenhausova věta pro grupy s operátory): Nechť $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ jsou přípustné podgrupy v $\mathfrak{G}/\Omega$ a nechť $\mathfrak{A}'$ je invariantní v $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ invariantní v $\mathfrak{B}$. Pak $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ je přípustná Zassenhausova podgrupa ke čtyřem podgrupám

(4) $$\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}'), \quad \mathfrak{B}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}), \quad \mathfrak{B}'(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$$

a platí, že faktorová grupa $\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}')$ je operátor-isomorfní s faktorovou grupou $\mathfrak{B}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{B}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}')$. Operátor-isomorfismus $\boldsymbol{i}$ je dán tak, že každému prvku $\bar{a} = c\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}')$ z grupy $\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}')$ je přiřaděn ten prvek $\bar{b}$ faktorové grupy $\mathfrak{B}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{B}'(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$, pro který platí $\bar{b} = c\mathfrak{B}'(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$, $c \in \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

Důkaz: Předně podgrupy z (4) a $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ jsou přípustné podle **V 4/II** a **V 2/III.** Dále platí, že grupy

$$\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}') \quad \text{a} \quad \mathfrak{B}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/\mathfrak{B}'(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$$

jsou isomorfní, při čemž isomorfismus je dán tak, jak je uvedeno v naší větě a průnik $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ je Zassenhausova podgrupa ke čtyřem podgrupám (4) [viz: Rédei, Satz 134, s. 213—214]. Označíme-li $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{A}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}')$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}'(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{B}'(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, pak jsou splněny podmínky **V 36/III**, a tedy věta je dokázána.

Pozn. 5/III: Zvolíme-li ve **V 37/III** $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}'$ tak, aby $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{E}$, pak $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}/\mathfrak{A}'$ je operátor-isomorfní s $\mathfrak{B}/(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$, při čemž každému prvku $a = c\mathfrak{A}'$ je přiřaděn prvek $\bar{b} = c(\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B})$, kde $c \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, a tedy $\bar{a}$ a $\bar{b}$ jsou incidentní, neboť obsahují prvek c. Tím je znovu dokázán důsledek **6/III.**

Použitá literatura:

[1] *O. Borůvka:* Úvod do teorie grup, Královská česká společnost nauk, Praha, 1944.
[2] *O. Borůvka:* Úvod do teorie grup, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.
[3] *O. Borůvka:* Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.
[4] *V. Chodž a D. Pido:* Metody algebraičeskoj geometrii I, Izd. inostrannoj literatury, Moskva, 1954.
[5] *Lugowski — Weinert:* Grundzüge der Algebra I (II), B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957 (1958).
[6] *R. Kochendörfer:* Einführung in die Algebra, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955.
[7] *A. G. Kurosch:* Gruppentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1953.
[8] *L. Rédei:* Algebra I, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Porting K.—G., Leipzig, 1959.
[9] *B. L. v d. Waerden:* Moderne Algebra I (II), IV. (III.) Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 1955 (1955).

РЕЗЮМЕ

ГРУППОИДЫ И ГРУППЫ С ОПЕРАТОРАМИ

ЛАДИСЛАВ СЕДЛАЧЕК

В работе расширена теория групп с операторами на теорию группоидов с операторами так, что основным понятием является множество с областью операторов и допустимое разложение в этом множестве. Это обобщение и другое понятие теории групп с операторами возможно в силу работ [1], [2], [3].

В I-ой главе исследуются свойства множеств с операторами, допустимых разложений и Ω-отображения а именно такие, которые имеют значение для теории группоидов с операторами. Свойства группоидов с операторами, допустимых фактороидов, оператор изоморфных отображений, короче Ω-деформации и оператор изоморфизма группоидов исследуются во II-ой главе. III-я глава посвящена теории групп с операторами. Сначала, подобно как в первых двух главах, вводятся основные понятия и исследуются основные свойства групп с операторами. Дальше изучаются образующие допустимые разложения на группе с областью операторов и переходится к свойствам допустимых факторовых групп. Следующий параграф посвящен Ω-деформациям и их свойствам. В заключение приведены теоремы о оператор-изоморфизме групп, доказательства которых отличаются от обычного доказательства этих теорем как раз потому, что вся работа основывается на приведеных работах [1], [2], [3].

ZUSAMMENFASSUNG

GRUPPOIDE UND GRUPPEN MIT OPERATOREN

LADISLAV SEDLÁČEK

In vorliegender Arbeit wird eine Erweiterung der Theorie der Gruppen mit Operatoren auf die Theorie der Gruppoide mit Operatoren dargelegt. Die Arbeiten [1], [2], [3] und die Einführung des Begriffs der „Menge mit Operatoren" und der „zulässigen Zerlegungen" in einer Menge mit Operatoren ermöglichten diese Erweiterung und gleichzeitig eine von früheren unterschiedliche Auffassung der Theorie der Gruppen mit Operatoren.

Im I. Kapitel werden diejenigen Eigenschaften der Menge mit Operatoren, der zulässigen Zerlegungen und der Ω-Abbildungen studiert, die für die Theorie der Gruppoide mit Operatoren von Bedeuteung sind. Im II. Kapitel werden die Begriffe „Gruppoid mit Operatoren, zulässiges Faktoroid, operatorhomomorphe Abbildung und Operator-Isomorphismus der Gruppoide" untersucht. Das III. Kapitel ist der Theorie der Gruppen mit Operatoren gewidmet. Es werden Grundbegriffe eingeführt und die Eigenschaften der Gruppen mit Operatoren, der erzeugenden zulässigen Zerlegungen auf Gruppen mit Operatorenbereich, der zulässigen Faktorgruppen und der Ω-Deformationen untersucht. Zuletzt werden Sätze über Operator-Isomorphismus der Gruppen mit Operatoren angeführt, deren Beweise grösstenteils von der üblichen Art abweichen, was dem Umstand zu verdanken ist, dass der Konzeption der Arbeit die schon erwähnten Arbeiten [1], [2], [3] zu Grunde liegen.