115 (1990) ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY No. 3, 290–292

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ E-ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧКАХ

Jiří Čížek, Plzeň

(Поступило в редакцию 10. X. 1988 г.)

Пусть задана система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$(1)\qquad y'_j = \sum_{i=1}^{m} Q_{j,i} y_i\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \quad Q_{j,i} \in \mathbb{C}(z)$$

или система линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$(2)\qquad y'_j = Q_{j,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{j,i} y_i\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \quad Q_{j,i} \in \mathbb{C}(z)\,.$$

Обозначим T наименьший общий знаменатель функций $Q_{j,i}$ в системе (1) или (2).

Теорема 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$-алгебраическое поле, $h = [\mathbb{K}: \mathbb{Q}]$, совокупность E-функций* (см. [1], стр. 87) *с коэффициентами в $\mathbb{K}$ (т.е. $\mathbb{K}E$-функций) $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqq 2$ ($m \geqq 1$), составляет решение системы* (1) (*системы* (2)), *и $\xi \in \mathbb{K}$ такое, что $\xi\, T(\xi) \neq 0$. Тогда если функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ не связаны алгебраическим однородным уравнением степени $k(mh - h + 1)$ (алгебраическим уравнением степени $k(mh + 1)$) над $\mathbb{C}(z)$, то числа $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ не связаны однородным алгебраическим уравнением (алгебраическим уравнением) степени k над $\mathbb{K}$.*

В случае $k = 1$ выполняется более точное утверждение:

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{K}$-алгебраическое поле, $h = [\mathbb{K}: \mathbb{Q}]$, совокупность $\mathbb{K}E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqq 2$ ($m \geqq 1$), составляет решение системы* (1) (*системы* (2)), *и $\xi \in \mathbb{K}$ такое, что $\xi\, T(\xi) \neq 0$. Тогда если функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ не связаны однородным алгебраическим уравнением степени $(m-1)(h-1)+1$ (алгебраическим уравнением степени $m(h-1)+1$) над $\mathbb{C}(z)$, то числа $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ $(1, f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi))$ не связаны однородным линейным уравнением над $\mathbb{K}$.*

Следствие. *Пусть $\mathbb{K}$-алгебраическое поле, $h = [\mathbb{K}: \mathbb{Q}]$, совокупность $\mathbb{K}E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqq 1$, составляет решение системы* (2) *и $\xi \in \mathbb{K}$ такое, что*

$\xi\, T(\xi) \neq 0$. *Тогда если функции* $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ *не связаны алгебраическим уравнением степени* $m(h-1)+1$ *над* $\mathbb{C}(z)$, *то* $f_i(\xi) \notin \mathbb{K}$ *для всех* $i = 1, \ldots, m$. *Следовательно, все* $f_i(\xi)$ *иррациональные.*

Доказательство. Рассмотрим однородный случай. Обозначим

$$\mu^0_{N,m} = \frac{(N+m-1)!}{N!\,(m-1)!}. \tag{3}$$

Если $N \in \mathbb{N}$, $N \geqq k$, такое, что

$$\mu^0_{N,m} - \mu^0_{N-k,m} < \frac{\mu^0_{N,m}}{h} \tag{4}$$

и функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, $m \geqq 2$, не связаны однородным алгебраическим уравнением степени N, то числа $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ не связаны алгебраическим однородным уравнением степени k (см. [1], стр. 124, неравенство (160)). Неравенство (4) равносильно неравенству

$$\frac{\mu^0_{N-k,m}}{\mu^0_{N,m}} = \frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{(N+m-1)\ldots(N+m-k)} > 1 - \frac{1}{h}. \tag{5}$$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty} \mu^0_{N-k,m}/\mu^0_{N,m} = 1 > 1 - 1/h$, то существует $N_k \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство (5) справедливо для всех $N \in \mathbb{N}$, $N \geqq N_k$. Последовательность $\{N-i+1/N-i+m\}_{i=1}^{k}$ — убывающая. Оттуда

$$\frac{\mu^0_{N-k,m}}{\mu^0_{N,m}} \geqq \left(\frac{N-k+1}{N+m-k}\right)^k. \tag{6}$$

Если $N \in \mathbb{N}$, $N \geqq k$, удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{N-k+1}{N+m-k}\right)^k > \frac{h-1}{h}, \tag{7}$$

то N удовлетворяет и неравенству (5). Но (7) справедливо для

$$N > k - 1 + \frac{(m-1)(h-1)^{1/k}}{h^{1/k} - (h-1)^{1/k}}.$$

Оттуда

$$N_k \leqq k + \left[\frac{(m-1)(h-1)^{1/k}}{h^{1/k} - (h-1)^{1/k}}\right]. \tag{8}$$

Для $k = 1$, $N_1 \leqq (m-1)(h-1)+1$ (очевидно $N_1 = (m-1)(h-1)+1$), откуда вытекает утверждение Теоремы 2. Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо

$$N_k \leqq k + \left[(m-1)(h-1)^{1/k}\, kh^{1-1/k}\right] < k + kh(m-1), \tag{9}$$

что завершает доказательство Теоремы 1.

Неоднородный случай Теорем 1 и 2 вытекает из однородного, если его применить к функциям $f_0(z) = 1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$.

Литература

[1] *Шидловский А. Б.:* Трансцендентные числа, Москва, Наука 1987.

Souhrn

O ARITMETICKÝCH VLASTNOSTECH HODNOT *E*-FUNKCÍ V ALGEBRAICKÝCH BODECH

JIŘÍ ČÍŽEK

Buďte $f_1, \ldots, f_m$ E-funkce, které tvoří řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, $\xi \neq 0$ buď algebraické číslo. V práci je zdola odhadnut stupeň algebraické rovnice, kterou mohou splňovat funkce $f_1, \ldots, f_m$, aby funkční hodnoty $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ nevyhovovaly žádné algebraické rovnici stupně nejvýše k-tého.

Summary

A NOTE ON THE ARITHMETICAL PROPERTIES OF THE VALUES OF *E*-FUNCTIONS IN ALGEBRAIC POINTS

JIŘÍ ČÍŽEK

Let $f_1, \ldots, f_m$ be E-functions satisfying a system of linear differential equations of the first order, let $\xi \neq 0$ be an algebraic number. The degree of an algebraic equation which the functions $f_1, \ldots, f_m$ can satisfy is estimated from bellow in the case the values $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$ do not satisfy any algebraic equation of the degree less or equal to k.

Author's address: katedra matematiky VŠSE, Nejedlého sady 14, 306 14 Plzeň.