

Helmut Pottmann; Wolfgang Rath  
Ebene konvexe Affinzwangläufe

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 114 (1989), No. 3, 279--288

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/118379>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1989

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## EBENE KONVEXE AFFINZWANGLÄUFE

HELMUT POTTMANN, WOLFGANG RATH, Wien

(Eingegangen am 19. 11. 1986)

*Zusammenfassung.* In dieser Arbeit werden Affinzwangläufe, bei denen alle Punktbahnen konvexe Kurven sind, studiert. Ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wird eine Kennzeichnung der konvexen Affinzwangläufe der euklidischen, pseudo-euklidischen und winkeltreuen isotropen Ähnlichkeitsgruppe angegeben. Dies geschieht mit Hilfe einer kinematischen Abbildung, welche die Punktbahnen eines ebenen affinen Zwanglaufs als Parallelrisse der kinematischen Bildkurve deutet. Die genannten Zwangläufe sind dann durch ebene konvexe kinematische Bildkurven gekennzeichnet. Das Beispiel eines konvexen zentroaffinen Zwanglaufs mit einer nicht ebenen kinematischen Bildkurve zeigt die Schwierigkeit bei der Erfassung der konvexen Zwangläufe der gesamten affinen Gruppe.

*Keywords:* Affine Kinematics, Convex Curves.

*AMS Classification:* 53A17.

In der vorliegenden Note wollen wir jene ebenen Affinzwangläufe studieren, bei welchen jeder Punkt  $X$  der Gangebene auf dem Rand eines (von  $X$  abhängigen) konvexen Bereichs der Rastebene läuft. Hierbei verlangen wir nicht, daß jeweils die gesamte Randkurve  $k$  durchlaufen wird, und wir lassen auch zu, daß  $X$  auf  $k$  Umkehrlagen besitzt, die Bahn  $\bar{k}(X)$  also im differentialgeometrischen Sinn Spitzen aufweist. Es soll jedoch ausgeschlossen werden, daß sämtliche Punktbahnen in Geraden liegen; dieser Fall wurde bereits in [4] erörtert. Da wir — dem Thema entsprechend — den so definierten *ebenen konvexen Affinzwangläufen* keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen auferlegen wollen, versagen die üblichen differentialgeometrischen Methoden. Hingegen erweist sich eine vor kurzem eingeführte *kinematische Abbildung* [4, 5], welche die Punktbahnen eines affinen Zwanglaufs  $Z$  als Parallelrisse einer Kurve  $Z\Gamma$  des  $\mathbb{R}^6$  deutet, als adäquates Mittel zur Behandlung des Problems. Die Lösung erscheint zwar im allgemeinen Fall schwierig und die entsprechenden Zwangläufe dürften geometrisch kaum beschreibbar sein. Für Zwangläufe im Sinne gewisser *Untergruppen* der affinen Gruppe, wie zum Beispiel für die Gruppen der euklidischen, der pseudo-euklidischen und der winkeltreuen isotropen Ähnlichkeiten, hat die Forderung nach Konvexität jedoch mehr Gewicht: Die *kinematische Bildkurve*  $Z\Gamma$  ist eine *ebene, im Rand eines konvexen Bereichs liegende Kurve* und demzufolge sind sämtliche nichtgeradlinigen *Punktbahnen untereinander affin*. Die einzigen konvexen Affinzwangläufe im Sinne der euklidischen Bewegungsgruppe sind die krummlinigen Schiebungen längs konvexer

Kurven, die stetigen Drehungen um einen festen Punkt und die Ellipsenbewegungen. Schließlich zeigen wir anhand eines der zentroaffinen Kinematik entstammenden Beispiels, daß auch nichtebene kinematische Bildkurven auf konvexe Affinzwangläufe führen können. Damit treten die Schwierigkeiten ans Tageslicht, mit denen die Lösung des Problems für die gesamte affine Gruppe verbunden sein dürfte.

## 1. GRUNDLAGEN

Zur Betrachtung stehen *ebene*  $C^0$ -Affinzwangläufe  $Z = \Sigma/\bar{\Sigma}$ , festgelegt durch eine einparametrische stetige Schar von Affinitäten  $\alpha(t): \Sigma \rightarrow \bar{\Sigma}$  ( $t \in I \subset \mathbb{R}$ ), welche die reelle affine Gangebene  $\Sigma$  mit dem affinen Koordinatensystem  $(O; x, y)$  auf die Rastebene  $\bar{\Sigma}$  ( $\bar{O}; \bar{x}, \bar{y}$ ) abbilden:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= a_{10}(t) + a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \\ \bar{y} &= a_{20}(t) + a_{21}(t)x + a_{22}(t)y, \quad a_{ij} \in C^0(I). \end{aligned}$$

Jede solche Affinität  $\alpha(t)$  bilden wir nun vermöge der *kinematischen Abbildung*  $\Gamma$  auf den Punkt  $(a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{20}, a_{21}, a_{22})$  des reellen sechsdimensionalen affinen Raumes  $A^6(\mathbb{R})$  ab, womit dem Zwanglauf  $Z$  die *Kurve*  $Z\Gamma = \{\alpha(t)\Gamma \mid t \in I\}$  zugeordnet erscheint. Wie man (1.1) entnimmt, läßt sich die *Bahn*  $\bar{k}(X)$  des Punktes  $X(x, y) \in \Sigma$  als lineares Bild der kinematischen Bildkurve  $Z\Gamma$  deuten, und zwar – nach Einbettung der Rastebene  $\bar{\Sigma}$  in den  $A^6$  durch Identifizierung der Koordinaten  $a_{10} = \bar{x}, a_{20} = \bar{y}$  – als *Parallelriß* von  $Z\Gamma$  aus einem nur von  $X$  abhängigen dreidimensionalen Fernzentrum  $Z_{x,y}^3$  des Fernraumes  $U^5$  von  $A^6$  auf die Rastebene  $\bar{\Sigma}$ . Man vergleiche hierzu die Ausführungen in [5], wo sich eine genauere Diskussion der Fernzentrenmenge  $\mathcal{Z} = \{Z_{x,y}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  findet. Hier wird auch der natürliche Äquivalenzbegriff behandelt, also geklärt, wie sich die Wahl anderer Bezugssysteme auf das kinematische Bild auswirkt.

Genauere Kenntnisse benötigen wir für gewisse *Untergruppen* der affinen Gruppe:

**1.1.** Die Bildpunkte  $\alpha\Gamma$  der *euklidischen Ähnlichkeiten* erfüllen den vierdimensionalen Unterraum  $E^4$ :  $a_{11} - a_{22} = 0, a_{12} + a_{21} = 0$ . Die Lage  $\bar{X}^t$  von  $X$  zur Zeit  $t$ , also das Bild von  $X$  unter  $\alpha(t)$ , entsteht nun schon durch Projektion des Punktes  $\alpha(t)\Gamma$  aus der Schnittgeraden  $z_{x,y}$  von  $Z_{x,y}^3$  mit dem Fernraum  $E_u^3$  von  $E^4$ . Die zwei-parametrische *Projektionszentrenmenge*  $\{z_{x,y}\}$  ist ein *elliptisches Netz*  $\mathcal{N}_e \subset E_u^3$ , vermindert um die Ferngerade  $u$  der Rastebene  $\bar{\Sigma}$  (vgl. [5, 9]). Die Punktbahnen eines euklidisch-äquiformen Zwanglaufs lassen sich demnach durch Projektion der Kurve  $Z\Gamma$  des vierdimensionalen Raumes  $E^4$  aus den Geraden eines elliptischen Netzes  $\mathcal{N}_e$  im Fernraum  $E_u^3$  des  $E^4$  auf die Rastebene  $\bar{\Sigma} \subset E^4$  gewinnen.

**1.2.** Die Gruppe der *pseudoeuklidischen Ähnlichkeiten* kann durch  $a_{12} = a_{21} = 0$  erfaßt werden. Die Bildpunkte  $\alpha\Gamma$  erfüllen also einen vierdimensionalen Unter-

raum  $F^4 \subset A^6$ , in dessen Fernraum  $F_u^3$  man nun als *Projektionszentrenmenge*  $\{z_{x,y}\}$  ein *hyperbolisches Netz*  $\mathcal{N}_h$  hat, aus dem die zwei Treffgeradenbüschel der Ferngeraden  $u$  der Rastebene zu entfernen sind [5].

1.3. Die *Bewegungsgruppen* der euklidischen bzw. pseudoeuklidischen Ebene erfaßt man durch Schnitt von  $E^4$  bzw.  $F^4$  mit jenem quadratischen Hyperzylinder  $\Omega \subset A^6$ :

$$(1.2) \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1,$$

der die Bildpunkte flächentreuer Affinitäten  $\alpha$  trägt [5].

1.4. *Winkeltreue isotrope Ähnlichkeiten* sind durch  $a_{12} = 0$ ,  $a_{11} = a_{22}$  erfaßbar, ihre kinematischen Bildpunkte füllen demnach einen vierdimensionalen Unterraum  $G^4 \subset A^6$  aus. Man hat hier – gewissermaßen als Grenzfall zwischen der euklidischen und der pseudoeuklidischen Ähnlichkeitsgruppe – für die *Projektionszentrenmenge* ein um das Treffgeradenbüschel der Ferngeraden  $u$  der Rastebene vermindertes *parabolisches Netz*  $\mathcal{N}_p$  im Fernraum  $G_u^3$  des  $G^4$  [5].

1.5. Die in 1.4 enthaltenen *Zwangläufe*

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= a_{10}(t) + x, \\ \bar{y} &= a_{20}(t) + a_{21}(t)x + y, \end{aligned}$$

im Sinne der *ebenen isotropen Bewegungsgruppe* gestatten eine besonders einfache Behandlung: Vermöge der bereits von S. Lie verwendeten und später von K. Strubecker [7] aus gruppentheoretischer Sicht studierten „*Lieschen Abbildung*“  $\gamma$  ordnen wir jedem  $\alpha(t)$  den Punkt  $\alpha(t)\gamma(a_{10}, a_{20}, a_{21})$  des  $A^3(\mathbb{R})$  zu. Die Bahn  $\bar{k}(X)$  des Punktes  $X(x, y) \in \Sigma$  ist schiebungsgleich zur Kurve

$$(1.4) \quad \bar{x}(t) = a_{10}(t), \quad \bar{y}(t) = a_{20}(t) + a_{21}(t)x.$$

Dies ist der Parallelriß von  $Z\gamma$  auf die Rastebene  $\bar{\Sigma}(a_{21} = 0)$  zur Projektionsrichtung  $(0, x, -1)$ . Demnach erhält man die Bahnen  $\bar{k}(X)$  bis auf Schiebungen durch Parallelprojektion der Kurve  $Z\gamma$  auf die Rastebene  $\bar{\Sigma}$ , wobei die Projektionszentren  $Z_{x,y}$  auf der Ferngeraden der Ebene  $a_{10} = 0$  liegen.

1.6. Schließlich betrachten wir noch die *zentroaffine Gruppe*, deren Transformationen einen Punkt, o.B.d.A. den Punkt  $O$  fest lassen. Ihre  $\Gamma$ -Bildpunkte erfüllen also den vierdimensionalen Unterraum  $K^4 \subset A^6$ :  $a_{10} = a_{20} = 0$ . So wie es bei den ebenen isotropen Bewegungen bloß  $\infty^1$  wesentlich verschiedene Bahnen gibt, da die Bahnen paralleler Punkte  $X_1$  und  $X_2$  ( $x_1 = x_2$ ) durch isotrope Schiebungen zusammenhängen, hat man auch hier bloß  $\infty^1$  wesentlich verschiedene Bahnen. Nun sind nämlich die Bahnen von Punkten derselben Geraden  $g \ni O$  bezüglich  $O$  zentrisch ähnlich. Bis auf Affinitäten erhält man hier jedenfalls die  $\infty^1$  wesentlich verschiede-

nen Bahnen durch Parallelprojektion aus den Geraden eines *Regulus*  $\mathcal{R}$  des Fernraumes  $K_u^3$  von  $K^4$  [5].

## 2. KONVEXE ZWANGLÄUFE IM SINNE GEWISSER ÄHNLICHKEITSGRUPPEN

Nun haben wir die Mittel bereit, folgendes Ergebnis zu zeigen:

**Satz 1.** *Ein konvexer Zwanglauf  $Z$  im Sinne der Gruppe der euklidischen, der pseudoeuklidischen oder der winkeltreuen isotropen Ähnlichkeiten besitzt als kinematische Bildkurve  $Z\Gamma$  eine im Rand eines ebenen konvexen Bereichs liegende Kurve.  $Z$  ist entweder eine krummlinige Translation, ein Zwanglauf mit Fixpunkt oder ein Zwanglauf, bei dem die Punkte eines gangfesten Kreises (im Sinne der jeweiligen Gruppe) oder einer Geraden auf Geraden laufen und die übrigen Punktbahnen durch reguläre Affinitäten zusammenhängen; nur in der isotropen Geometrie existieren auch nichttranslatorische konvexe Zwangläufe, wo kein Punkt auf einer Geraden läuft oder fest bleibt.*

**Beweis.** Wir nehmen im Rahmen eines indirekten Beweises an, die Kurve  $Z\Gamma$  enthalte 4, einen 3-Raum  $A^3$  aufspannende Punkte  $\alpha_1\Gamma, \dots, \alpha_4\Gamma$ . Der 3-Raum  $A^3$  besitze die Fernebene  $A_u^2$ . Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

**Fall 1:** *Die Ebene  $A_u^2$  enthält keine Achse des Projektionszentrumsnetzes.* Demnach liegt genau eine Gerade  $z_0 \in \mathcal{N}_e$  (bzw.  $\mathcal{N}_h, \mathcal{N}_p$ ) in  $A_u^2$ . Die Gerade  $z_0$  sowie jene Geraden  $z \in \mathcal{N}_e$  ( $\mathcal{N}_h, \mathcal{N}_p$ ), welche die Ferngerade  $u$  der Rastebene  $\bar{\Sigma}$  treffen, projizieren wir aus  $\alpha_4\Gamma$  auf die Ebene  $\varepsilon = \alpha_1\Gamma\alpha_2\Gamma\alpha_3\Gamma$  und erhalten eine Punktmenge  $\mathfrak{M} \subset \varepsilon$ , welche höchstens aus 3 Geraden besteht. Nun wählen wir einen nicht zu  $\mathfrak{M}$  gehörenden Punkt  $P$  im Inneren des Dreiecks  $\alpha_1\Gamma\alpha_2\Gamma\alpha_3\Gamma$ . Durch den Fernpunkt  $P_u \in A_u^2$  von  $\alpha_4\Gamma P$  geht nach Konstruktion genau eine Gerade  $z_{x_1, y_1}$  des Netzes  $\mathcal{N}_e$  ( $\mathcal{N}_h, \mathcal{N}_p$ ), welche zu einem bestimmten eigentlichen Punkt  $X_1(x_1, y_1)$  der Gangebene  $\Sigma$  gehört. Die  $\alpha_i$ -Bilder von  $X_1$  erhalten wir durch Projektion  $A_{x_1, y_1}$  der  $\alpha_i\Gamma$  aus  $z_{x_1, y_1}$  auf  $\bar{\Sigma}$ . Da die Gerade  $P\alpha_4\Gamma$  die Projektionsgerade  $z_{x_1, y_1}$  (in  $P_u$ ) trifft, besitzen  $P$  und  $\alpha_4\Gamma$  dasselbe Bild. Weiters ist die Einschränkung von  $A_{x_1, y_1}$  auf die Ebene  $\varepsilon$  eine reguläre Affinität, da  $z_{x_1, y_1}$  die Ferngerade  $e_u$  von  $\varepsilon$  nicht treffen kann. Damit ergeben sich 4 Lagen  $X_1\alpha_1, \dots, X_1\alpha_4$  des Punktes  $X_1$ , wobei  $X_1\alpha_4$  im Inneren der konvexen Hülle von  $X_1\alpha_1, \dots, X_1\alpha_3$  liegt. Dies stellt aber einen Widerspruch zur Voraussetzung dar, daß wir einen konvexen Zwanglauf vor uns haben. In der pseudoeuklidischen und in der isotropen Geometrie existiert auch der

**Fall 2.** *Die Ebene  $A_u^2$  enthält eine Achse  $a$  des Projektionszentrumsnetzes.* Sei  $\mathcal{Z}$  die Menge der Projektionszentren, die nicht ganz in  $A_u^2$  liegen. Dann trifft jede Gerade  $z \in \mathcal{Z}$  die Ebene  $A_u^2$  in einem Punkt von  $\bar{a} = a \setminus \{U\}$ , wobei  $a$  die Ferngerade  $u$  der Rastebene in  $U$  schneiden möge. Bis auf Affinitäten erhalten wir nun Lagenquadrupel

$X\alpha_1, \dots, X\alpha_4$ , wenn wir ganz in  $A^3$  bleiben und aus den Punkten von  $d$  auf eine Ebene  $\pi$  projizieren, deren von  $a$  verschiedene Ferngerade durch  $U$  läuft. Es liegt also im wesentlichen die in 1.5 beschriebene, zur Lieschen Abbildung.  $\gamma$  gehörige Situation vor. Wir spannen nun das Tetraeder  $\alpha_1\Gamma \dots \alpha_4\Gamma$  in zwei Stützebenen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  aus dem durch  $a$  bestimmten Parallelebenenbüschel  $\mathfrak{B}$  ein. Unter der Annahme, es liege ein Punkt  $\alpha_i\Gamma$ , etwa  $\alpha_4\Gamma$  zwischen den Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  (Abb. 1a), kommen wir sofort zu einem Widerspruch: Die Ebene  $\varepsilon_4$  durch  $\alpha_4\Gamma$  schneidet nämlich das Dreieck  $\alpha_1\Gamma \alpha_2\Gamma \alpha_3\Gamma$  in einer Strecke, auf der wir den Punkt  $P$  so wählen, daß der Fernpunkt  $P_u$  von  $P\alpha_4\Gamma$  verschieden von  $U$  ist. Nun besitzen  $P$  und  $\alpha_4\Gamma$  bei Projektion aus  $P_u$  dasselbe Bild und der Riß von  $\alpha_4\Gamma$  liegt im Inneren der konvexen Hülle der Risse der drei restlichen Tetraederecken. Bleiben also nur noch die Fälle  $b$  und  $c$  (Abb. 1), wo alle 4 Punkte  $\alpha_1\Gamma, \dots, \alpha_4\Gamma$  in  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  liegen. Eine stetige Kurve  $Z\Gamma$  des  $F^4$  bzw.  $G^4$ , wo bei beliebiger Wahl von 4 paarweise verschiedenen Punkten  $\alpha_1\Gamma, \dots, \alpha_4\Gamma$  stets 2 oder 3 in einer Ebene durch  $a$  liegen, gehört natürlich zur Gänze einer Ebene  $\varepsilon$  durch  $a$  an. Eine Ebene  $\varepsilon$  durch die Netzachse  $a$  ist aber für Projektion aus jeder Geraden des Netzes projizierend, weshalb  $Z$  ein Zwangslauf mit durchwegs geradlinigen Bahnen sein muß und damit im Widerspruch zur Voraussetzung nicht konvex ist.

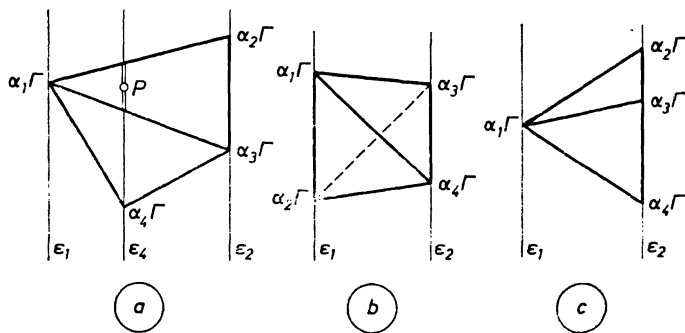


Abb. 1

Wir haben nun gezeigt, daß die Bildkurve  $Z\Gamma$  eines konvexen Zwangslaufs  $Z$  eben sein muß. Da  $Z$  nicht geradlinig ist, muß eine Projektion  $A_{x_0, y_0}$  existieren, welche zwischen der Trägerebene  $\varepsilon$  von  $Z\Gamma$  und  $\bar{\Sigma}$  eine reguläre Affinität induziert, weshalb  $Z\Gamma$  nur im Rand eines konvexen Bereichs  $K \subset \varepsilon$  liegen kann. Die nichtgeradlinigen Bahnen sind offenbar sämtlich zu  $Z\Gamma$  und daher auch untereinander affin. Zur Bestimmung der Punkte mit geradlinigen Bahnen fassen wir  $\varepsilon$  als Schmiegeebene einer  $C^2$ -Kurve  $\bar{Z}\Gamma \subset E^4$  (bzw.  $F^4, G^4$ ) auf. Wir identifizieren damit die gesuchte Punktmenge mit der Wendekurve des  $C^2$ -Zwangslaufs  $\bar{Z}$  an der betrachteten Stelle und erkennen sie als Kreis oder Gerade, bzw. als leere Menge (vgl. [4]). Somit laufen im ersten Fall die Punkte eines euklidischen, pseudo-euklidischen oder isotropen Kreises  $k$  (eventuell Nullkreises  $k_0$ ) oder die Punkte einer Geraden auf Geraden der

Rastebene. Insbesondere bleibt der singuläre Punkt  $P_0$  von  $k_0$  fix und die übrigen Bahnen hängen durch Drehstreckungen (im Sinne der jeweiligen Gruppe) mit dem Zentrum  $P_0$  zusammen. Im 2. Fall wird die Ferngerade  $e_u$  von  $\varepsilon$  von keinem Projektionszentrum getroffen, weshalb  $e_u$  bei einem elliptischen oder hyperbolischen Netz  $\mathcal{N}_e$  bzw.  $\mathcal{N}_h$  nur die Ferngerade  $u$  der Rastebene  $\bar{\Sigma}$  sein kann. Dies läßt uns  $Z$  als krummlinige Translation erkennen. Bei einem parabolischen Netz  $\mathcal{N}_p$  ist  $e_u$  in dem zwar zu  $\mathcal{N}_p$ , nicht aber zur Projektionszentrenmenge gehörenden Büschel mit dem Scheitel  $U$  enthalten,  $e_u$  ist jedoch verschieden von der Netzachse  $a$ . Dies ist der im Satz erwähnte Fall eines nichttranslatorischen Zwanglaufs, wo kein Punkt auf einer Geraden läuft oder fest bleibt, sofern nicht  $e_u = u$  und damit  $Z$  translatorisch ist.  $\square$

Unser Beweis begründet auch den

**Satz 2.** a) *Das  $\Gamma$ -Bild eines euklidisch-äquiformen Zwanglaufs mit durchwegs geradlinigen Bahnen liegt in einer Geraden des  $E^4$ . Geradlinige Zwangläufe im Sinne der pseudo-euklidischen oder der winkeltreu-isotropen Ähnlichkeitsgruppe besitzen als  $\Gamma$ -Bild entweder eine geradlinige Kurve des  $F^4$  bzw.  $G^4$  oder eine Kurve in einer Ebene, deren Ferngerade Achse des Projektionszentrennetzes  $\mathcal{N}_h$  bzw.  $\mathcal{N}_p$  ist.*

b) *Die konvexen Zwangläufe aus Satz 1 sind genau die  $\Gamma^{-1}$ -Bilder von Kurven, die in nicht unter a) genannten Ebenen des  $E^4$  (bzw.  $F^4$  oder  $G^4$ ) liegen und dem nicht ganz in einer Geraden liegenden Rand eines konvexen Bereichs angehören.*

Im Falle der euklidischen und pseudo-euklidischen Bewegungsgruppen ist  $Z\Gamma$  auch noch an den quadratischen Zylinder  $\Omega$  (1.2) gebunden, woraus wir schließen (vgl. [4]):

**Satz 3.** *Die konvexen Zwangläufe im Sinne der euklidischen oder der pseudo-euklidischen Bewegungsgruppe sind krummlinige Translationen, stetige Drehungen um einen festen Punkt oder euklidische bzw. pseudo-euklidische Kreuzschiebergetriebe.*

Die Bahnen euklidischer Kreuzschiebergetriebe liegen bekanntlich in konzentrischen Ellipsen oder in Geraden, die Bahnen der pseudo-euklidischen Gegenstücke gehören Hyperbeln oder Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt  $O$  dieser Hyperbeln an.  $Z\Gamma$  ist hier nur auf einen Hyperbelast beschränkt.

Mittels der euklidischen kinematischen Abbildung von W. Blaschke und J. Grünwald (vgl. [1]) folgt aus Satz 3 der

**Satz 4.** *Die einzigen nicht ganz in einer Geraden oder in einer absoluten Ebene liegenden Kurven  $k$  des dreidimensionalen quasielliptischen Raumes, für welche sämtliche  $k$  enthaltenden nichtabsoluten Clifford'schen Linkszyylinder konvexe absolute Schnitte besitzen, sind die in quasielliptischen Schraublinien mit der Quasitorision  $\tau = 3$  liegenden Kurven.*

Diese quasielliptischen (und auch elliptischen) Schraublinien sind Raumkurven 3. Ordnung und bei K. Strubecker [6] ausführlich behandelt (vgl. auch W. Wunderlich [8]).

Für die ebene isotrope Bewegungsgruppe ist die Vielfalt der konvexen Zwangläufe größer als in der euklidischen oder pseudo-euklidischen Geometrie. Hier kann – wie der 2. Fall im Beweis von Satz 1 zeigt – eine beliebige, in einer Ebene  $\varepsilon$  liegende konvexe Kurve als Liesches Zwanglaufbild  $Z\gamma$  gewählt werden, wenn nur  $\varepsilon$  nicht parallel zur Ebene  $a_{10} = 0$  ist. Genau auf die hier vorliegende Situation können wir bei Betrachtung von Zwangläufen im Sinne der 3-gliedrigen Gruppe der isotropen Ähnlichkeiten mit fixem Ursprung kommen:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= a_{11}x, \\ \bar{y} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

Die Bahn des Punktes  $X(x, y)$  ist bei  $x \neq 0$  affin zur Kurve:

$$(2.2) \quad \bar{x} = a_{11}(t), \quad \bar{y} = a_{21}(t) + a_{22}(t) y/x.$$

Diese Kurve erhält man aber – wie der Vergleich mit (1.4) zeigt – als Parallelriß der kinematischen Bildkurve  $Z\Gamma \subset A^3: (0, a_{11}(t), 0, 0, a_{21}(t), a_{22}(t))$ . Die  $\infty^1$  Projektionszentren sind auf der Ferngeraden der Ebene  $a_{11} = 0$  versammelt. Die Bahnen der zum Fixpunkt  $O(0, 0)$  parallelen Punkte  $X (x = 0)$  liegen ohnehin auf der isotropen Geraden  $\bar{x} = 0$ . Damit haben wir auch den

**Satz 5.** Ein konvexer Zwanglauf  $Z$  im Sinne der Gruppe der isotropen Ähnlichkeiten mit fixem Ursprung besitzt als kinematische Bildkurve  $Z\Gamma$  eine ebene, im Rand eines konvexen Bereichs liegende Kurve.

### 3. BEMERKUNGEN ÜBER ALLGEMEINE KONVEXE AFFINZWANGLÄUFE

Die Vermutung, daß für jeden konvexen Affinzwanglauf die kinematische Bildkurve  $Z\Gamma$  eben sein muß, trifft leider nicht zu. Dies wollen wir durch folgendes Beispiel begründen:

Zur Betrachtung mögen Zwangläufe im Sinne der zentroaffinen Gruppe stehen (vgl. 1.6). Wir wählen einen Unterraum  $A^3 \subset K^4$ , dessen Fernebene  $A_u^2$  den Regulus  $\mathcal{R} \subset K_u^3$  nach einem (nichtzerfallenden) Kegelschnitt  $k_u$  schneidet. Nun genügt es offenbar, eine nichtebene Kurve  $k = Z\Gamma \subset A^3$  zu finden, für welche sämtliche Parallelrisse aus den Punkten von  $k_u$  auf eine geeignete Ebene konvex sind. Nach Anwendung einer passenden Affinität gelangen wir schließlich zu folgendem Problem: Man gebe eine nichtebene Kurve des euklidischen  $\mathbb{R}^3$  an, welche bei Parallelprojektion in Richtung der Erzeugenden eines Drehkegels stets eine im Rand eines konvexen Bereichs liegende Kurve liefert. Hierzu betrachten wir die Umschwung-





jede Gerade der Sehnenkongruenz von  $k$  gegen  $\pi_1$  unter einem Winkel  $\beta_1 < \pi/4$  geneigt und kommt daher als Projektionsstrahl ( $\beta_1 = \pi/4$ ) nicht in Frage.

b) *Wendepunktfreiheit*. Die Kurven  $k^p$  sind bis auf Drehungen um den Ursprung durch

$$(3.2) \quad x = \cos(t + \alpha), \quad y = \sin(t + \alpha) + \varepsilon \cos 2t$$

erfaßt. Ein Wendepunkt von  $k^p$  tritt bei  $\Delta = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y = 0$  auf:

$$\Delta = 1 + 2\varepsilon(2 \sin(t + \alpha) \cos 2t - \sin 2t \cos(t + \alpha)) = 1 + 2A\varepsilon.$$

Sicher gilt  $-3 \leq A \leq 3$ , so daß  $\Delta$  für  $|\varepsilon| < 1/6$  nicht Null werden kann und dann  $k^p$  wendepunktfrei ist.

Als Folge von a) und b) stellt damit die Umschwingkurve (3.1) für  $|\varepsilon| < 1/6$  das gesuchte Beispiel dar. Auf die Angabe des zugehörigen Affinzwanglaufs wollen wir hier verzichten.

Eine geometrische Beschreibung sämtlicher konvexer Affinzwangläufe dürfte demnach schwierig sein. Selbstverständlich führen ebene konvexe Bildkurven  $Z\Gamma$ , sofern sie nicht zu geradlinigen Zwangläufen gehören, auf Lösungen des Problems, aber eben nicht auf alle. Durch zusätzliche Forderungen gelingen jedoch weitere Aussagen, wie zum Beispiel:

**Satz 6.** *Ist der Wendepunktort bei einem konvexen  $C^3$ -Affinzwanglauf  $Z$  stets ein regulärer Kegelschnitt oder ein eigentliches Geradenpaar, so ist die Bildkurve  $Z\Gamma$  eben und eine im Rand eines konvexen Bereichs liegende Kurve.*

**Beweis.** Da eine konvexe Kurve keine Wendepunkte enthält, muß jeder Punkt des Wendepunktorts einen Flachpunkt durchlaufen. Ist die Schmiegeebene  $\sigma$  der Bildkurve  $Z\Gamma$  nicht stationär, so ist dies nach [4] nur möglich, wenn genau eine eigentliche Wendegerade existiert oder alle Punkte Wendepunkte durchlaufen. Da der letzte Fall nicht ständig eintreten kann, da sonst alle Punkte auf Geraden wandern, und der erste im Satz ausgeschlossen ist, muß  $\sigma$  stationär und die Bildkurve  $Z\Gamma$  eben sein.  $\square$

#### *Literatur*

- [1] *W. Blaschke, H. R. Müller*: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
- [2] *O. Bottema, G. R. Veldkamp*: Eine Abbildung der ebenen äquiformen Kinematik. Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht 17/1982.
- [3] *W. Kautny*: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. 60 (1956), 66–82.
- [4] *H. Pottmann, W. Rath*: Eine affine kinematische Abbildung II. Rad JAZU (im Druck).
- [5] *W. Rath*: Eine affine kinematische Abbildung I. Rad JAZU (im Druck).
- [6] *K. Strubecker*: Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 139 (1930), 421–450.

- [7] *K. Strubecker*: Über die Lieschen Abbildungen der Linienelemente der Ebene auf die Punkte des Raumes. *Monatsh. Math. Phys.* 42 (1935), 309—376.
- [8] *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. *Monatsh. Math. Phys.* 44 (1936), 249—279.
- [9] *W. Wunderlich*: Ein vierdimensionales Abbildungsprinzip für ebene Bewegungen. *ZAMM* 66 (1986), 421—428.

Souhrn

## ROVINNÉ KONVEXNÍ AFINNÍ POHYBY

HELMUT POTTMANN, WOLFGANG RATH

V práci se studují jednoparametrické pohyby v afinní rovině, jejichž všechny trajektorie jsou konvexní křivky. Bez předpokladů o diferencovatelnosti jsou takové pohyby charakterizovány v grupě euklidovských, pseudo-euklidovských a úhly zachovávajících isotropních podobnostních transformací. Tohoto cíle je dosaženo použitím kinematického zobrazení, které umožňuje vytvořit trajektorie afinního pohybu jako rovnoběžné průměty pevné křivky v kinematickém prostoru. Pro uvažované speciální pohyby je tato křivka konvexní a rovinná.

Příklad centroafinního konvexního pohybu, jehož kinematickým obrazem není rovinná křivka, naznačuje obtížnost řešení daného problému pro obecnou afinní grupu.

Резюме

## ВЫПУКЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ В АФФИННОЙ ПЛОСКОСТИ

HELMUT POTTMANN, WOLFGANG RATH

Статья занимается одно-параметрическими движениями в аффинной плоскости, все траектории которых — выпуклые кривые. Без предположения дифференцируемости эти движения характеризуются в группе евклидовых, псевдоевклидовых и изотропных сохраняющих углы подобных преобразований.

Для доказательства используется кинематическое отображение, которое даёт возможность построить траектории аффинного движения как параллельные проекции некоторой кривой в кинематическом пространстве, являющейся выпуклой плоской для этих специальных движений.

Пример центрально-аффинного выпуклого движения, кинематическое отображение которого не является плоской кривой, показывает, что решение данной проблемы для общей аффинной группы не является очевидным.

*Anschrift der Verfasser*: Institut für Geometrie der Technischen Universität Wien, Wiedner Hauptstrasse 8-10, A-1040 Wien, Österreich.