Václav Šobr
Isoperimetrische Ungleichungen für geschlossene Kurven

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 113 (1988), No. 4, 403--414

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118358`

ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNGEN FÜR GESCHLOSSENE KURVEN

VÁCLAV ŠOBR, Plzeň

(Eingegangen am 21. 5. 1986)

Zusammenfassung. In dieser Betrachtung werden die im Sinne der Betrachtung [7] von Z. Nádeník verallgemeinerten isoperimetrischen Ungleichungen für geschlossene und rektifizierbare Kurven in euklidischen Räumen E_4 und E_5 bewiesen. Zu den Beweisen wird die Methode der Fourierschen Reihen benutzt. Die breitere Benutzung der Methode der Fourierschen Reihen beruht darauf, dass diese Methode ein Mittel ist, das bedeutende Analogien bei der Benutzung in den eingeführten Räumen hat.

Keywords: isoperimetrische Ungleichung, Fouriersche Reihe.

AMS Classification: 52A40.

1. Die klassische isoperimetrische Ungleichung für eine ebene einfache geschlossene und rektifizierbare Kurve

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0 \tag{1.1}$$

drückt den Zusammenhang der Länge L der Kurve $\mathscr{C}$ und des Flächeninhalts F des durch die Kurve $\mathscr{C}$ begrenzten Bereichs aus. Das Gleichheitszeichen gilt nur beim Kreis $\mathscr{C}$.

Diese Ungleichung ist verschiedenartig verallgemeinert worden; siehe [1]–[9]. Z. Nádeník [7] betrachtet eine solche Verallgemeinerung der isoperimetrischen Ungleichung für geschlossene rektifizierbare Kurven $\mathscr{C}$ im vierdimensionalen euklidischen Raum E_4, welche den quadratischen Charakter der Ungleichung behält. Seiner hier im Satz 1 (s. Absch. 3) zitierten Ungleichung (7) aus [7] fügen wir im Satz 2 (s. Absch. 6) eine ähnliche isoperimetrische Ungleichung für geschlossene rektifizierbare Kurven im fünfdimensionalen euklidischen Raum E_5 bei.

Z. Nádeník [7] hat für den Beweis der isoperimetrischen Ungleichung die Integralidentitäten und das Wirtingersche Lemma angewandt. Der Vorzug dieses Verfahrens liegt darin, dass man die isoperimetrische Ungleichung verschärfen kann. Ein Versuch um ein ähnliches Verfahren zur Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung für Kurven $\mathscr{C}$ im E_5 ist wegen der Kompliziertheit der Umformungen der Integrale nicht gelungen. Dagegen hat die Anwendung der Fourierreihen fast auf gleiche Weise zu den isoperimetrischen Ungleichungen für die Kurven $\mathscr{C}$ in E_4 oder in E_5 geführt.

2. Zuerst sprechen wir die gemeinsamen Voraussetzungen für die isoperimetrischen Ungleichungen in E_4 und E_5 aus. Im euklidischen Raum E_n, $(n = 4, 5)$ wird ein System von Orthogonalkoordinaten x_i zugrunde festgelegt. Es bezeichne s den Bogen und L die Gesamtlänge der geschlossenen rektifizierbaren Kurve $\mathscr{C}$ in E_n. Die Parameterdarstellung von $\mathscr{C}$ sei

$$(2.1) \qquad x_i = x_i(t)\,, \quad t = \frac{2\pi}{L}\,s\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,, \quad (i = 1, \ldots, n;\; n = 4, 5)\,.$$

Die Funktionen x_i sind absolut stetig, periodisch mit der Periode 2π und besitzen fast überall die Ableitung nach t, die wir stets mit x_i' bezeichnen werden. Die Funktionen x_i' sind quadratisch integrierbar, weil nach [12]

$$(2.2) \qquad \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} x_i'^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} x_i'^2 \,\mathrm{d}t = \frac{L^2}{2\pi}\,.$$

Die Fourierreihen von x_i in $\langle 0, 2\pi \rangle$ konvergieren gleichmässig zur Summe x_i und deshalb

$$(2.3) \qquad x_i(t) = \tfrac{1}{2}a_{oi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ki} \cos kt + b_{ki} \sin kt)\,, \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Die Fourierreihen von x_i' in $\langle 0, 2\pi \rangle$ konvergieren im Mittel gegen x_i' und deshalb [12]

$$(2.4) \qquad x_i'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k(-a_{ki} \sin kt + b_{ki} \cos kt)\,, \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Nach der Parsevalschen Gleichung gilt

$$(2.5) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} x_i'^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_{ki}^2 + b_{ki}^2)$$

und

$$(2.6) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i x_j' - x_j x_i') \,\mathrm{d}t = 2 \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ki} b_{kj} - a_{kj} b_{ki})\,.$$

Wir setzen

$$(2.7) \qquad F_{ij} = \tfrac{1}{2} \textstyle\int_0^{2\pi} (x_i x_j' - x_i' x_j) \,\mathrm{d}t\,, \quad (j = 1, \ldots, n,\; j \neq i)\,.$$

Wenn die totalorthogonale Projektion von $\mathscr{C}$ auf die Koordinatenebene $(x_i x_j)$ eine einfache Kurve ist, so bedeutet $|F_{ij}|$ den Flächeninhalt des durch diese Projektion begrenzten Bereiches. Wenn aber die totalorthogonale Projektion eine Kurve ist, die sich selbst in endlich vielen Punkten durchschneidet, so ist $|F_{ij}|$ die Summe der Flächeninhalte aller Komponenten, die die Projektion mit Rücksicht auf ihre Vielfachheit begrenzt.

Später benutzen wir den folgenden

Hilfssatz. *Genügen die als Spalten betrachteten arithmetischen Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *den Gleichungen*

$$\lambda \mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{b} = 0\,, \quad \lambda \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{a} = 0\,, \tag{2.8}$$

in denen die Matrix $\mathbf{A}(n \setminus n)$ *antisymmetrisch und die Zahl* $\lambda \neq 0$ *ist, dann sind die Vektoren* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *zueinander orthogonal und* $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$.

3. Für geschlossene rektifizierbare Kurven in E_4 gilt der folgende nach [7] zitierte

Satz 1. *Es seien*

$$c_{ij} = -c_{ji} \tag{3.1}$$

beliebige reelle Zahlen, welche nicht alle Null gleich sind. Wir setzen

$$C = \sum_{i<j}^{4} c_{ij}^2 > 0\,, \quad c = c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23}\,. \tag{3.2}$$

Für jede Kurve $\mathscr{C}$ *gilt die Ungleichung*

$$L^2 - 4\pi\varkappa^{-1} \sum_{i<j}^{4} c_{ij}F_{ij} \geqq 0 \tag{3.3}$$

mit

$$\varkappa = [\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(C^2 - 4c^2)^{1/2}]^{1/2} > 0\,. \tag{3.4}$$

Das Gleichheitszeichen in (3.3) *gilt genau dann, wenn* $\mathscr{C}$ *ein Kreis ist, dessen Parameterdarstellung (falls sein Mittelpunkt zum Nullpunkt gewählt ist) folgendermassen geschrieben werden kann:*

$$x_i = a_i \cos t + b_i \sin t\,, \tag{3.5}$$

wo die Konstanten a_i, b_i *folgenden Gleichungen genügen*

$$\varkappa a_i - \sum_{j=1}^{4} c_{ij}b_j = 0\,, \quad \varkappa b_i + \sum_{j=1}^{4} c_{ij}a_j = 0\,. \tag{3.6}$$

Der Ausdruck $C^2 - 4c^2$ *aus* (3.4) *ist nichtnegativ.*

Bemerkung 1. Für die Motivierung der Konstante $\varkappa$ siehe [7], Absch. 1.

Bemerkung 2. Sind ausser c_{12} alle $c_{ij} = 0$, geht für $F_{12} > 0$ die Ungleichung (3.3) bei $c_{12} > 0$ in die klassische Ungleichung (1.1) und bei $c_{12} < 0$ in eine triviale Beziehung über. Das System (3.6) reduziert sich auf $a_3 = b_3 = 0$, $a_4 = b_4 = 0$.

Bemerkung 3. Sind alle $c_{i4} = 0$, geht (3.3) in die Ungleichung

$$L^2 - 4\pi(c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)^{-1/2}(c_{12}F_{12} + c_{13}F_{13} + c_{23}F_{23}) \geqq 0$$

über. Diese letzte Ungleichung beweist L. Boček [3] (siehe seinen Satz 2 für $n = 3$.)

Das System (3.6) reduziert sich auf $a_4 = b_4 = 0$ und die extremale Kreislinie liegt in der Ebene $x_4 = 0$, $c_{23}x_1 + c_{31}x_2 + c_{12}x_3 = 0$.

4. In diesem Abschnitt beweisen wir die isoperimetrische Ungleichung (3.3) mittels der Fourierreihen.

Mittels (2.2) und (2.7) schreiben wir zuerst die durch $\varkappa/2\pi$ multiplizierte linke Seite (3.3) als

$$\int_0^{2\pi} \left[\varkappa \sum_{i=1}^{4} x_i'^2 - \sum_{i<j}^{4} c_{ij}(x_i x_j' - x_i' x_j)\right] dt\,. \tag{4.1}$$

Das Funktional (4.1) lässt sich nach (2.5) und (2.6) folgends umformen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\varkappa k^2 \sum_{i=1}^{4} (a_{ki}^2 + b_{ki}^2) - 2k \sum_{i<j}^{4} c_{ij}(a_{ki}b_{kj} - a_{kj}b_{ki})\right]. \tag{4.2}$$

Die Nichtnegativität der Summe (4.2) beweisen wir dadurch, dass wir sie als eine Summe von Quadraten schreiben. Wir werden nicht mit der ganzen Summe (4.2) rechnen, sondern nur mit ihrem k-ten Summanden, der sich nach einer einfachen Umformung (Ergänzung der die a_{ki} enthaltender Glieder zum Quadrat) und mit Hilfe von (3.1), (3.2) und (3.4) in dieser Form schreiben lässt:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1, j\neq i}^{4} \left[\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}\, k a_{ki} - \sqrt{\frac{3}{\varkappa}}\, c_{ij} b_{kj}\right]^2 + \\ &+ \frac{1}{\varkappa} \sum_{i=1}^{4} \Big[\sum_{j=1, j\neq i}^{4} (\tfrac{1}{2}k^2 - 3)\, c_{ij}^2 + \tfrac{1}{2} k^2 \big(C - \sum_{j=1, j\neq i}^{4} c_{ij}^2\big) + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} k^2 (C^2 - 4c^2)^{1/2}\Big]\, b_{ki}^2\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Im folgenden unterscheiden wir drei Fälle:

$$\varkappa^2 > c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2\,, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} &\varkappa^2 = c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2\,, \quad (c_{12} - \varepsilon c_{34})^2 + (c_{13} - \varepsilon c_{42})^2 + \\ &\qquad + (c_{14} - \varepsilon c_{23})^2 > 0\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\varkappa^2 = c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2\,, \quad (c_{12} - \varepsilon c_{34})^2 + (c_{13} - \varepsilon c_{42})^2 + \\ &\qquad + (c_{14} - \varepsilon c_{23})^2 = 0\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Im Fall (4.4) und (4.5) sind nach (3.7) die Koeffizienten von b_{ki}^2 für $k \geqq 3$ nichtnegativ, deshalb ist dann nur die Nichtnegativität des ersten und des zweiten Summanden aus (4.2) zu bestätigen.

Im Fall (4.6) sind alle Koeffizienten von b_{ki}^2 gleich und schon für $k \geqq 2$ nichtnegativ. Deshalb ist die Nichtnegativität nur des ersten Summanden in (4.2) zu bestimmen.

Nach der Vergleichung des ersten und des zweiten Summanden aus (4.2) stellen wir in den Fällen (4.4) und (4.5) fest, dass wir über die Nichtnegativität der beiden

Summanden nur mittels einer gemeinsamen Betrachtung von

$$(4.7) \quad \varkappa(a_{k1}^2 + b_{k1}^2 + a_{k2}^2 + b_{k2}^2 + a_{k3}^2 + b_{k3}^2 + a_{k4}^2 + b_{k4}^2) + \\ -2c_{12}(a_{k1}b_{k2} - b_{k1}a_{k2}) - 2c_{13}(a_{k1}b_{k3} - b_{k1}a_{k3}) - 2c_{14}(a_{k1}b_{k4} - b_{k1}a_{k4}) + \\ -2c_{23}(a_{k2}b_{k3} - b_{k2}a_{k3}) - 2c_{23}(a_{k2}b_{k4} - b_{k2}a_{k4}) - 2c_{34}(a_{k3}b_{k4} - b_{k3}a_{k4})$$

entscheiden können.

Im folgenden werden wir den Index k auslassen.

In (4.7) ist eine quadratische Form von $a_1, \ldots, b_4$ gegeben und wir können sie mittels eines bekannten Verfahrens (der Ergänzung zum vollständigen Quadrat) auf die Summe von Quadraten umformen.

Im Falle (4.4) bekommen wir mit Hilfe von (3.1), (3.2) und (3.4).

$$(4.8) \quad Q = \frac{1}{\varkappa}(X_1^2 + X_2^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_3^2 + X_4^2) + \frac{\varkappa^2 - c_{12}^2}{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]} \cdot \\ \cdot (X_5^2 + X_6^2) + \frac{\varkappa^4 - C\varkappa^2 + c^2}{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]}(X_7^2 + X_8^2)$$

wo X_i, $i = 1, \ldots, 8$ lineare Funktionen von $a_j, b_j, j = 1, \ldots, 4$ sind.

Infolge (3.4) verschwindet der Koeffizient von $X_7^2 + X_8^2$ in (4.8).

Weil alle Koeffizienten von X_i^2, $i = 1, \ldots, 6$, in (4.8) nichtnegativ sind, ist die quadratische Form (4.4) auch nichtnegativ. Dann sind beide ersten Summanden in (4.2) und auch die ganze Summe (4.2) nichtnegativ. Deshalb sind das Funktional (4.4) und die linke Seite der Ungleichung (3.3) nichtnegativ.

Aus den Voraussetzungen des Falles (4.5) folgt unter Zuhilfenahme von (3.4) einerseits

$$(4.9) \qquad C^2 - 4c^2 > 0$$

und anderseits

$$(4.10) \quad (c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34})^2 + (c_{23}c_{34} - c_{12}c_{14})^2 + (c_{13}c_{14} + c_{23}c_{24})^2 = 0\,.$$

Unter den Voraussetzungen des Falles (4.5) und mittels (3.2) und (3.4) leiten wir aus der Diskussion der Gleichung (4.10) wieder her, dass

$$(4.11) \qquad \begin{aligned} c_{14} &= c_{23}c\varkappa^{-2} \\ c_{24} &= c_{13}c\varkappa^{-2} \\ c_{34} &= c_{12}c\varkappa^{-2} \end{aligned}$$

wobei $c\varkappa^{-2} \neq \pm 1$.

Aus (3.4) und (4.9) folgen die Ungleichungen

$$(4.12) \qquad \varkappa^4 > \frac{C^2}{4} > c^2\,,$$

welche wir im folgenden anwenden.

Zur Voraussetzung (4.5) schliessen wir noch diese Bedingung an

$$\varkappa^2 > c_{12}^2 . \tag{4.13}$$

Bemerkung 4. Ist $\varkappa^2 = c_{12}^2$, dann führt der Fall (4.5) zum Spezialfall aus Bemerkung 2.

Im Falle (4.5) formen wir die quadratische Form (4.7) ähnlich um, und zwar wie im Falle (4.4) mit Hilfe von (4.12), (4.13), (4.11) in

$$\frac{1}{\varkappa}(X_1^2 + X_2^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_3^2 + X_4^2) + \frac{\varkappa^3}{\varkappa^4 - c^2}(X_5^2 + X_6^2) \tag{4.14}$$

wo X_i, $i = 1, \ldots, 6$ lineare Funktionen von a_j, b_j, $j = 1, \ldots, 4$ sind.

Die quadratische Form (4.14) ist wegen (3.4), (4.12) und (4.13) nichtnegativ. Der erste und der zweite Summand aus (4.2) sind nichtnegativ. Dann sind die Summe (4.2), das Funktional (4.1) und auch die linke Seite in (3.3) nichtnegativ.

Aus den Voraussetzungen des Falles (4.6) ergibt sich mittels (3.4) die Beziehung $C^2 - 4c^2 = 0$ und wieder (4.10), (4.11) aber diesmal damit, dass $c\varkappa^{-2} = \pm 1$ ist. Es wird angenomen, dass (4.13) wieder gilt.

Bemerkung 5. Der Fall $\varkappa^2 = c_{12}^2$ führt zum analogischen Fall aus der Bemerkung 2.

Im Falle (4.6) bekommt man den ersten Summanden aus (4.2) von (4.3) für $k = 1$. Diesen Summanden formen wir in eine quadratische (als Summe von Quadraten geschriebene) Form um. Die Form ist dann

$$\frac{1}{\varkappa}(X_1^2 + X_2^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_3^2 + X_4^2) , \tag{4.15}$$

wo X_i, $i = 1, \ldots, 4$ lineare Funktionen von a_j, b_j, $j = 1, \ldots, 4$ sind.

Infolge (3.4) und (4.13) ist die Form (4.15) nichtnegativ. Deshalb sind der erste Summand der Summe (4.2), die ganze Summe (4.2), das Funktional (4.1) und auch die linke Seite von (3.3) nichtnegativ.

5. In diesem Abschnitt entscheiden wir über die Gleichheitsbedingung in (3.3) nach den einzelnen Fällen (4.4), (4.5) und (4.6).

Der Fall (4.4). Vom vorigen Abschnitt wissen wir, dass das Funktional (4.1) nichtnegativ ist. Wir können es als folgende Summe (5.1) schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} \Bigg\{ \Bigg[\sqrt{\left(\frac{\varkappa}{3}\right)}\, k a_{k1} - \sqrt{\left(\frac{3}{\varkappa}\right)}\, c_{12} b_{k2}{}^2 \Bigg] + \ldots + \Bigg[\sqrt{\left(\frac{\varkappa}{3}\right)}\, k a_{k4} + {} \\ + \sqrt{\left(\frac{3}{\varkappa}\right)}\, c_{34} b_{k3} \Bigg]^2 \Bigg\} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{\varkappa} \sum_{i=1}^{4} \Big[\sum_{j=1}^{4} c_{ij}^2 (\tfrac{1}{2}k^2 - 3) + \tfrac{1}{2}k^2 (C - \sum_{j=1}^{4} c_{ij}^2) + {} \\ + \tfrac{1}{2}k^2 (C^2 - 4c^2)^{1/2} \Big]\, b_{ki}^2 + 2\varkappa \sum_{i=1}^{4} (a_{2i}^2 + b_{2i}^2) + {} \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$+\sum_{k=1}^{2} k\left[\frac{1}{\varkappa}(X_{k1}^2 + X_{k2}^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_{k3}^2 + X_{k4}^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa^2 - c_{12}^2}{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]}(X_{k5}^2 + X_{k6}^2)\right].$$

Damit in (3.3) das Gleichheitszeichen gilt, muss die Summe (5.1) Null gleich sein. Das gilt genau dann, wenn einerseits für $k = 2$ alle $a_{ki} = b_{ki} = 0, (i = 1, \ldots, 4)$ und anderseits für $k = 1$ die a_{1i} und b_{1i} die Wurzeln der Gleichungen

$$X_{1m} = 0 \quad (m = 1, \ldots, 6), \tag{5.2}$$

sind.

Der Rang der Matrix des Systems (5.2) ist 6 und deshalb hängt die Lösung von (5.2) von zwei Parametern α, β ab.

Fassen wir diese Lösung als arithmetische Vektoren $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]^{\mathrm{T}}$ auf.

Für die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sind die Voraussetzungen des Hilfsatzes aus dem Absch. 2 erfüllt. Nach diesem Satz sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ zueinander orthogonal und $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$. Die Darstellung (3.5) ist die Parameterdarstellung einer Kreislinie $\mathscr{C}$.

Der Fall (4.5). In diesem Fall hat das Funktional (4.1) die Form von (5.1) nur mit dem Unterschied, dass in der letzten Zeile in den eckigen Klammern der Ausdruck (4.14) steht, wobei es notwendig ist in (4.14) statt X_m wieder X_{km} $(m = 1, \ldots, 6;$ $k = 1, 2)$ zu schreiben. Das Funktional (4.1) verschwindet dann und nur dann, wenn einerseits für $k \geqq 2$ alle $a_{ki} = b_{ki} = 0$, $(i = 1, \ldots, 4)$, und anderseits a_{1i} und b_{1i} (bei der Auslassung $k = 1$) dem System $X_m = 0$, $(m = 1, \ldots, 6)$, genügen.

Der Rang der Matrix des Systems ist 6, die Lösung des Systems hängt von zwei Parametern α, β ab.

Wie im Falle (4.4) weisen wir die Äquivalenz der Systeme (3.6) und $X_m = 0$, $(m = 1, \ldots, 6)$ nach, und zwar unter Zuhilfenahme der äquivalenten Umformungen z. B. des Systems (3.6).

Nach dem Hilfsatz aus dem Absch. 2, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, stellen wir fest, dass die extremale Kurve $\mathscr{C}$ eine Kreislinie ist.

Die Ebene der Kreislinie $\mathscr{C}$ ist im Durchschnitt der Hyperebenen $x_4 = 0$ und $c_{23}x_1 + c_{13}x_2 + c_{21}x_3 = 0$.

Der Fall (4.6). Das Funktional (4.1) ist nun die folgende Summe:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[\sqrt{\left(\frac{\varkappa}{3}\right)}ka_{k1} - \sqrt{\left(\frac{3}{\varkappa}\right)}c_{12}b_{k2}\right]^2 + \ldots + \left[\sqrt{\left(\frac{\varkappa}{3}\right)}ka_{k4} + \right.\right. \tag{5.3}$$

$$\left. + \varepsilon\sqrt{\left(\frac{3}{\varkappa}\right)}c_{12}b_{k3}\right]^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\varkappa(k^2 - 3)\sum_{i=1}^{4}b_{ki}^2 + \frac{1}{\varkappa}(X_{11}^2 + X_{12}^2) +$$

$$+ \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_{13}^2 + X_{14}^2).$$

Die Summe (5.3) verschwindet dann und nur dann, wenn einerseits für $k \geqq 2$ alle $a_{ki} = b_{ki} = 0$, $(i = 1, \ldots, 4)$, und anderseits a_{1i} und b_{1i} bei der Auslassung des Index $k = 1$ dem System $X_m = 0$, $(m = 1, \ldots, 4)$, genügen.

Der Rang der Matrix des Systems ist 4. Die Lösung hängt diesmal von vier Parametern α, β, γ, δ ab.

Auch im Falle (4.6) sind die Systeme $X_m = 0$, $(m = 1, \ldots, 4)$, und (3.6) äquivalent. Das kann man durch eine Reihe äquivalenter Umformungen z. B. der Matrix des Systems (3.6) in die Gestalt der Matrix des Systems $X_m = 0$ nachweisen. Mit dem Hilfsatz aus dem Absch. 2 stellt man fest, dass die extremale Kurve $\mathscr{C}$ eine mit der Parameterdarstellung (3.5) gegebene Kreislinie ist.

6. Für geschlossene rektifizierbare Kurven $\mathscr{C}$ im fünfdimensionalen euklidischen Raum E_5 gilt eine zum Satz 1 analoge isoperimetrische Eigenschaft:

Satz 2. *Es seien*

(6.1) $$c_{ij} = -c_{ji}, \quad (i, j = 1, \ldots, 5,\ j \neq i)$$

beliebige reelle Zahlen, die nicht alle Null gleich sind. Wir setzen

(6.2) $$C = \sum_{i,j=1,i<j}^{5} c_{ij}^2 ,$$

(6.3) $$c_{i+4} = c_{i,i+1}c_{i+2,i+3} + c_{i,i+2}c_{i+3,i+1} + c_{i,i+3}c_{i+1,i+2} , \quad \bmod 5 , \quad (i = 1, \ldots, 5) ,$$

(6.4) $$C_5 = \sum_{i,j=1,i<j}^{4} c_{ij}^2 .$$

Unter der Voraussetzung

(6.5) $$\varkappa^4 - C_5\varkappa^2 + c_5^2 > 0$$

gilt für jede Kurve $\mathscr{C}$ die Ungleichung

(6.6) $$L^2 - 4\pi\varkappa^{-1} \sum_{i,j=1,i<j}^{5} c_{ij}F_{ij} \geqq 0 ,$$

in der

$$\varkappa = [\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(C^2 - 4\sum_{i=1}^{5} c_i^2)^{1/2}]^{1/2} > 0$$

ist.

In (6.6) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\mathscr{C}$ eine Kreislinie ist. Ihre Parameterdarstellung, falls ihr Mittelpunkt zum Nullpunkt gewählt wurde, kann man folgendermassen schreiben

(6.8) $$x_i(t) = a_i \cos t + b_i \sin t , \quad (i = 1, \ldots, 5) .$$

Die Konstanten a_i, b_i genügen dabei den Gleichungen

(6.9) $$\varkappa a_i - \sum_{j=1}^{5} c_{ij}b_j = 0 , \quad \varkappa b_i + \sum_{j=1}^{5} c_{ij}a_j = 0 , \quad (i = 1, \ldots, 5) .$$

Im folgenden Abschnitt wird die Wahl der Konstante $\varkappa$ aus (6.7) motiviert, im 8. Abschnitt die Ungleichung (6.6) bewiesen und im 9. Abschnitt wird über das Gleichheitszeichen in (6.6) entschieden.

7. Die durch $\varkappa/2\pi$ multiplizierte linke Seite von (6.6) ist in Hinsicht auf (2.2) und (2.7) dem Wert

$$\int_0^{2\pi} [\varkappa \sum_{i=1}^{5} x_i'^2 - \sum_{i,j=1,i<j}^{5} c_{ij}(x_i x_j' - x_i' x_j)] \, dt \tag{7.1}$$

gleich.

Angenommen, die Funktionen x_i $(i = 1, \ldots, 5)$ seien zweiter Klasse. Die notwendigen Bedingungen für das Extrem des Funktionals (7.1) führen zu den Eulerschen Gleichungen (s. [10], S. 40), die das d'Alembertsche System für x_i' bilden:

$$\varkappa x_i'' + \sum_{j=1,j\neq i}^{5} c_{ij} x_j' = 0 \,, \quad (i = 1, \ldots, 5) \,. \tag{7.2}$$

Die charakteristische Gleichung der Matrix $\boldsymbol{A}$ dieses Systems (7.2)

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{7.3}$$

hat keine andere Wurzeln als die Null oder rein imaginäre Zahlen. Daraus und aus (6.2) folgt die Beziehung

$$C^2 - 4 \sum_{i=1}^{5} c_i^2 \geqq 0 \,. \tag{7.4}$$

Wegen der Geschlossenheit der Kurve $\mathscr{C}$ und der Periodizität der Funktionen x_i aus (2.1) verlangen wir, dass die zu einer einfachen Wurzel λ zugehörige Lösung (siehe z. B. [11], S. 147)

$$x_i = \gamma_i e^{\lambda t}$$

des Systems (7.2) die Periode 2π hat. Deshalb ist $\lambda = \pm i$ und dann folgt aus der charakteristischen Gleichung (7.3)

$$\varkappa = [\tfrac{1}{2}C \pm \tfrac{1}{2}(C^2 - 4 \sum_{i=1}^{5} c_i^2)^{1/2}]^{1/2} \,. \tag{7.5}$$

Von (7.5) kommt nur (6.7) in Betracht, sonst bekommt man für genügend kleine Summe $\sum c_i^2$ die Konstante $\varkappa^{-1}$ beliebig gross.

8. Die isoperimetrische Ungleichung (6.6) beweisen wir mittels der Fourierreihen.

Das Funktional (7.1) lässt sich mit Hilfe von (2.5) und (2.6) folgenderweise umformen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varkappa k^2 \sum_{i=1}^{5} (a_{ki}^2 + b_{ki}^2) - 2k \sum_{i,j=1,i<j}^{5} c_{ij}(a_{ki} b_{kj} - a_{kj} b_{ki})] \,. \tag{8.1}$$

Die Summe (8.1) schreiben wir als Summe von Quadraten. Damit wird die Nichtnegativität von (8.1) evident. Wir werden wie im 4. Abschnitt nur mit dem k-ten

Summanden von (8.1) rechnen. Für diesen Summanden bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1,j\neq i}^{5} \left[\sqrt{\left(\frac{\varkappa}{4}\right)} ka_{ki} - \sqrt{\left(\frac{4}{\varkappa}\right)} c_{ij}b_{kj}\right]^2 + \tag{8.2}$$

$$+ \frac{1}{\varkappa} \sum_{i=1}^{5} \Big[\sum_{j=1,j\neq i}^{5} \left(\tfrac{1}{2}k^2 - 4\right) c_{ij}^2 + \tfrac{1}{2}k^2\Big(C - \sum_{j=1,j\neq i}^{5} c_{ij}^2\Big) + \tfrac{1}{2}k^2\Big(C^2 - 4\sum_{i=1}^{5} c_i^2\Big)^{1/2}\Big] b_{ki}^2 .$$

Der k-te Summand ist nach (6.2) und (7.4) für alle $k \geqq 3$ nichtnegativ. Es ist noch die Nichtnegativität des ersten und des zweiten Summanden aus (8.1) zu beweisen. Ähnlich wie im 4. Abschnitt entscheiden wir über ihre Nichtnegativität auf Grund der Betrachtung des Ausdrucks:

$$\varkappa \sum_{i=1}^{5} (a_{ki}^2 + b_{ki}^2) - 2 \sum_{i,j=1,i<j}^{5} c_{ij}(a_{ki}b_{kj} - a_{kj}b_{ki}) . \tag{8.3}$$

Im folgenden lassen wir den Index k aus.

Die Form (8.3) bekommt die Gestalt der Summe von Quadraten:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varkappa}(X_1^2 + X_2^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_3^2 + X_4^2) + \\ &+ \frac{\varkappa^2 - c_{12}^2}{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]} + (X_5^2 + X_6^2) + \\ &+ \frac{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]}{\varkappa^4 - C_5\varkappa^2 + c_5^2}(X_7^2 + X_3^2) , \end{aligned} \tag{8.4}$$

wo X_i, $i = 1, \ldots, 8$ lineare Funktionen von a_j, b_j, $j = 1, \ldots, 5$ sind.

Nach (8.4) ist (8.3) eine nichtnegative Form. Weil beide ersten Summanden von (8.1) nichtnegativ sind, ist die Summe (8.1) auch nichtnegativ und wir können sie als folgende Summe schreiben:

(8.5)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=3}^{\infty} \sum_{i,j=1,j\neq i}^{5} \left[\sqrt{\left(\frac{\varkappa}{4}\right)} ka_{ki} - \sqrt{\left(\frac{4}{\varkappa}\right)} c_{ij}b_{kj}\right]^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{1}{\varkappa} \sum_{j=1}^{5} \Big(\varkappa^2 k^2 - 4 \sum_{i=1,i\neq j}^{5} c_{ij}^2\Big) b_{kj}^2\right] + \\ &+ 2\varkappa \sum_{i=1}^{5} (a_{2i}^2 + b_{2i}^2) + \\ &+ \sum_{k=1}^{2} k \left[\frac{1}{\varkappa}(X_{k1}^2 + X_{k2}^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 - c_{12}^2}(X_{k3}^2 + X_{k4}^2) + \right. \\ &+ \frac{\varkappa^2 - c_{12}^2}{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]}(X_{k5}^2 + X_{k6}^2) + \\ &\left. + \frac{\varkappa[\varkappa^2 - (c_{12}^2 + c_{13}^2 + c_{23}^2)]}{\varkappa^4 - C_5\varkappa^2 + c_5^2}(X_{k7}^2 + X_{k8}^2)\right] . \end{aligned}$$

Die Ungleichung (6.6) ist damit verifiziert.

9. Über die Gleichheitsbedingung in (6.6) entscheidet man mittels (8.5). Die Summe (8.5) ist gleich Null dann und nur dann, wenn einerseits für $k \geqq 2$ alle $a_{ki} = b_{ki} = 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$ und anderseits a_{1i} und b_{1i} dem System

$$X_{1m} = 0 \quad (m = 1, \ldots, 8) \tag{9.1}$$

genügen.

Der Rang der Matrix des Systems (9.1) ist 8. Es gibt zwei unabhängige Lösungen des Systems (9.1) und alle anderen Lösungen sind ihre linearen Kombinationen. Die Kurve $\mathscr{C}$ im E_5 mit der Parameterdarstellung

$$x_i(t) = a_i \cos t + b_i \sin t \tag{9.2}$$

in der die Koeffizienten a_i, b_i $(i = 1, \ldots, 5)$ die erwähnten Lösungen des Systems (9.1) sind, realisiert das Minimum des Funktionals (7.1). Die Koeffizienten a_i, b_i aus (9.2) haben bei der Bezeichnung nach dem Satz 2 eine komplizierte und wenig übersichtliche Form, deshalb führen wir sie nicht an.

Die Lösung a_{1i} und b_{1i} (bei der Auslassung $k = 1$) ist auch die Lösung des Systems (6.9). Davon überzeugen wir uns durch eine Riehe von äquivalenten Umformungen z. B. der Matrix des Systems (6.9), die diese Matrix in die Matrix des Systems (9.1) überführen. Aus den Lösungen a_{1i}, b_{1i} des Systems (9.1) bilden wir (bei der Auslassung von $k = 1$) die Spaltenvektoren $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T$ und $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^T$.

Nach dem Hilfsatz aus dem 2. Absch. sind die Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ zueinander orthogonal und $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$. Deshalb ist (9.2) die Parameterdarstellung einer Kreislinie $\mathscr{C}$.

Literatur

[1] *F. Bernstein:* Ueber die isoper. Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene. Math. Ann. *60* (1905), 117—136.

[2] *W. Blaschke, K. Leichtweiss:* Elementare Differentialgeometrie. 5. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York 1973.

[3] *L. Boček:* Isoperimetrische Ungleichungen für räumliche Kurven und Polygone. Časopis pěst. mat. *104* (1979), 86—92.

[4] *T. Bonnesen, W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934.

[5] *L. Fejes Tóth:* Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953; 1972; russische Übersetz. 1958.

[6] *H. Hadwiger:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Heidelberg—New York 1957; russische Übersetz. 1966.

[7] *Z. Nádeník:* Eine isoperimetrische Ungleichung für geschlossene Kurven im vierdimensionalen Raum. Časopis pěst. mat. *105* (1980), 302—310.

[8] *Z. Nádeník:* Eine isoperimetrische Ungleichung für die Paare der Raumkurven. Časopis pěst. mat. *105* (1980), 363—367.

[9] *I. J. Schoenberg:* An isoperimetric inequality for closed curves convex in even-dimensional euclidean spaces. Acta Math. *91* (1954), 143—164.

[10] *I. M. Gel'fand, S. V. Fomin:* Variacionnoje isčislenije. Gos. izd. fiz.-mat. lit. Moskva 1961.

[11] *E. Kamke:* Differentialgleichungen. Teil I: Gewöhnliche Differentionalgleichungen. 5. Aufl. Leipzig 1964.
[12] *Sz.-Nagy Béla:* Introduction to real functions and ortogonal expansions. Akadémiai Kiadó Budapest 1964.

Souhrn

IZOPERIMETRICKÉ NEROVNOSTI PRO UZAVŘENÉ KŘIVKY

VÁCLAV ŠOBR

V práci jsou dokázány izoperimetrické nerovnosti zobecněné ve smyslu práce [7] Z. Nádeníka pro uzavřené rektifikovatelné křivky v euklidovských prostorech E_4 a E_5. Při důkazech byla použita metoda Fourierových řad. Tato metoda má tu výhodu, že vykazuje značné analogie při použití v obou zmíněných prostorech.

Резюме

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

VÁCLAV ŠOBR

В работе доказаны обобщенные изопериметрические неравенства в смысле работы [7] З. Наденика для замкнутых спрямляемых кривых в пространствах E_4 и E_5. В доказательствах использован метод рядов Фурье, что приводит к значительным аналогиям между обоими случаями.

Anschrift des Verfassers: Katedra matematiky VŠSE, Nejedlého sady 14, 306 14 Plzeň.