SUR LA NORME DE FOURIER, III

JAN RATAJ, FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 21 juin 1985)

Résumé. En utilisant la notion de seminorme de Fourier on démontre deux théorèmes sur la convergence dęs suites de fonctions à variation bornée.

Keywords: measures, weak convergence, seminorms.

Nous voulons reprendre ici nos recherches antérieures concernant la (semi-)norme de Fourier que nous avons introduite pour la première fois dans [6] et comparée ensuite dans [7] et [8] à la norme de Gauss, introduite par H. Bergström dans [1].

Nous allons commencer par fixer notre système de notations et rappeler quelques résultats déjà connus. Soit $\mathscr{R} = (-\infty, +\infty)$ l'ensemble des nombres réels, $\mathscr{R}^+ = (0, +\infty)$ l'ensemble des réels (strictement) positifs, $\mathscr{R}^- = (-\infty, 0)$ l'ensemble des réels strictement négatifs, $\mathscr{R} = \mathscr{R}^- \cup \{0\} \cup \mathscr{R}^+$. Soit $\boldsymbol{V}$ l'ensemble des fonctions $f: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, à variation bornée et "continues en moyenne", ce qui veut dire qu'elles vérifient

$$f(x-) + f(x+) = 2f(x) \tag{1}$$

pour tout $x \in \mathscr{R}$.

Nous nous intéresserons à certains sousensembles de $\boldsymbol{V}$, à savoir:

– l'ensemble $\boldsymbol{M}$ des fonctions $f \in \boldsymbol{V}$ qui sont non-négatives et non-décroissantes dans $\mathscr{R}$,
– l'ensemble $\boldsymbol{M}_0$ des fonctions $f \in \boldsymbol{M}$ qui vérifient $f(-\infty) = 0$,
– l'ensemble $\boldsymbol{D}$ des fonctions $f \in \boldsymbol{M}_0$ qui vérifient $f(+\infty) = 1$,
– l'ensemble $\boldsymbol{Q}$ des fonctions $f \in \boldsymbol{V}$ qui sont non-décroissantes dans $\mathscr{R}^-$ et dans $\mathscr{R}^+$,
– l'ensemble $\boldsymbol{Q}_0$ des fonctions $f \in \boldsymbol{Q}$ qui verifient $f(-\infty) = 0 = f(+\infty)$.

De plus, nous rencontrerons aussi des fonctions $f: (\mathscr{R}^+ \cup \mathscr{R}^-) \to \mathscr{R}$ qui, tout en vérifiant (1), ne sont pas des fonctions à variation bornée: nous aurons à faire avec l'ensemble $\hat{\boldsymbol{Q}}$ des fonctions non-décroissantes dans $\mathscr{R}^-$ et dans $\mathscr{R}^+$, et avec l'ensemble $\boldsymbol{Q}^*$ des fonctions $f \in \hat{\boldsymbol{Q}}$ qui vérifient

$$\int_{\mathscr{R}} \frac{x^2}{1 + x^2} \, \mathrm{d}f(x) < \infty . \tag{2}$$

On a $\boldsymbol{Q}_0 \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Q}^* \subset \hat{\boldsymbol{Q}}$.

Pour les fonctions $f \in V$, M. H. Bergström a défini dans [1] la norme[1]) de Gauss, $_G\|f\|_\sigma$, en posant pour tout $\sigma \in \mathscr{R}^+$

$$(3) \qquad {}_G\|f\|_\sigma = \sup_{x \in \mathscr{R}} \left| f(-\infty) + \int_{\mathscr{R}} \Phi\left(\frac{x-y}{\sigma}\right) \mathrm{d}f(y) \right|$$

où

$$\Phi(y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{y} \exp(-x^2/2)\, \mathrm{d}x\,.$$

Dans [6], la norme[1]) de Fourier, $_F\|f\|_\sigma$, a été définie pour $f \in V$, $\sigma \in \mathscr{R}^+$, par

$$(4) \qquad {}_F\|f\|_\sigma = |f(-\infty)| + \sup_{|t| \leqq 1/\sigma} \left| \int_{\mathscr{R}} \exp(\mathrm{i}tx)\, \mathrm{d}f(x) \right|.$$

En comparant les deux normes (3) et (4) nous avons pu montrer leur équivalence pour les fonctions $f \in Q$ (voir [7] et [8], cfr. aussi [5]). Cependant, cette équivalence n'a pas lieu dans V en général, comme le montre l'exemple cité déjà dans [6] et dû en principe à F. J. Dyson (voir [3]). Le but de la présente note est de démontrer, pour la norme de Fourier, des théorèmes analogues aux théorèmes du paragraphe 6.3 de [1].

Nous introduisons encore trois fonctions particulières; O, E et w. La fonction $O: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ est nulle partout, elle appartient donc à M_0 et à Q_0. La fonction $E: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ est, par définition, égale à zéro dans $\mathscr{R}^-$, à un dans $\mathscr{R}^+$; en vertu de (1) on a $E(0) = 1/2$. Elle appartient à D. Enfin, w est une fonction à valeurs complexes, définie sur $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ par

$$(5) \qquad w(t, x) = \frac{1+x^2}{x^2}\left(\mathrm{e}^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \quad \text{pour} \quad x \neq 0\,,$$
$$= -\tfrac{1}{2}t^2 \quad \text{pour} \quad x = 0\,.$$

Le lemme suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 1. *Soit $f \in Q_0$, $\varphi(t) = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}f(x)$ pour $t \in \mathscr{R}$. Il existe alors une constante $c \in \mathscr{R}$ et une fonction $F \in M_0$ telles que*

$$(6) \qquad \varphi(t) = \mathrm{i}ct + \int_{\mathscr{R}} w(t, x)\, \mathrm{d}F(x)\,, \quad t \in \mathscr{R}\,.$$

Démonstration. Comme $f \in Q_0$, nous avons $\int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f(x) = 0$, de sorte que

$$\varphi(t) = \int_{\mathscr{R}} \left(\mathrm{e}^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} + \frac{itx}{1+x^2}\right) \mathrm{d}f(x)\,.$$

[1]) Il s'agit en réalité d'une famille de seminormes dépendant d'un paramètre réel positif σ, mais nous garderons ici la terminologie de [1], cf. aussi [7] et [8].

En posant

$$c = \int_{\mathscr{R}} \frac{x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}f(x) \tag{7}$$

et

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1 + u^2} \, \mathrm{d}f(u) \,, \quad x \in \mathscr{R} \,, \tag{8}$$

nous obtenons (6) avec $F \in M_0$.

De plus, nous pouvons toujours exprimer une fonction $f \in Q_0$ sous la forme de $f = r(H - E)$, avec $r = f(0-) - f(0+)$ et $H \in D$. Il en résulte l'égalité $\varphi(t) = r[\chi(t) - 1]$ où $\chi(t) = \int_{\mathscr{R}} e^{itx} \, \mathrm{d}H(x)$, $t \in \mathscr{R}$. Il s'ensuit alors d'un théorème bien connu (voir p. ex. [4], p. 111, Lemme 5.4.1) que $\exp [\varphi(t)]$ est la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible. Nous pouvons donc exprimer φ sous la forme canonique de Khintchine-Lévy (voir [4], p. 113, Theorem 5.5.1) – mais c'est exactement (6).

Nous rappelons en ce lieu la définition des convergences faible et complète des suites de fonctions de V (voir [6], p. 455, cfr. [1], p. 37 sqq):

Une suite $\{f_n\}$ *de fonctions* $f_n \in V$ *est dite faiblement convergente vers une fonction* f, *lorsque*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *partout dans* $\mathscr{R}$, *à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable des* x;

elle est dite complètement convergente vers f, *lorsque* (i) *et de plus,*

(ii) $f_n(-\infty) \to f(-\infty)$, $f_n(+\infty) \to f(+\infty)$.

Nous écrivons dans ces cas $f = \text{wlim} \, f_n$ ou $f = \text{clim} \, f_n$, respectivement.

Remarquons encore que la limite f peut ne pas appartenir à V, par contre elle sera toujours supposée vérifier (1).

Nous avons énoncé déjà dans [6] une proposition sur la convergence des suites de fonctions de M, à savoir:

Lemme 2. *Etant donné une suite* $\{f_n\}$ *de fonctions* $f_n \in M$, *on a* $\text{clim} \, f_n = f_0 \in M$ *si et seulement si, pour tout* $\sigma \in \mathscr{R}^+$, *on a*

$$_F\|f_n - f_0\|_\sigma \to 0 \,. \tag{9}$$

Démonstration. Ecrivons, comme d'habitude, $\varphi_n(t) = \int_{\mathscr{R}} e^{itx} \, \mathrm{d}f_n(x)$ pour $t \in \mathscr{R}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Supposons d'abord que nous ayons $f_0 = \text{clim} \, f_n$. Nous avons donc $f_n(-\infty) \to f_0(-\infty)$, c'est-à-dire $|f_n(-\infty) - f_0(-\infty)| \to 0$. Une modification immédiate du théorème de Helly (cfr. [4], p. 47) nous permet de conclure à la convergence $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$, $t \in \mathscr{R}$, et il suffit de démontrer que cette convergence est localement uniforme. Or pour ce but il suffit de modifier légèrement la démonstration du Corollaire 1, p. 50 sqq de [4].

Supposons maintenant que (9) ait lieu. En vertu de (4) nous avons alors d'une part $f_n(-\infty) \to f_0(-\infty)$, d'autre part

$$\int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f_n(x) = \varphi_n(0) \to \varphi_0(0) = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f_0(x)\,,$$

donc aussi

$$f_n(+\infty) = f_n(-\infty) + \int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f_n(x) \to f_0(-\infty) + \int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f_0(x) = f_0(+\infty)\,.$$

Si $\varphi_0(0) = 0$, nous avons $f_0(x) = f_0(-\infty)$ pour tout $x \in \mathscr{R}$ et $\int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f_n(x) \to 0$, donc $f_n(x) \to f_0(-\infty)$ pour tout $x \in \mathscr{R}$, c'est-à-dire $f_0 = \operatorname{clim} f_n$. Supposons donc $\varphi_0(0) > > 0$, on a alors $\varphi_n(0) > 0$ pour n suffisamment grand. Si nous posons

$$H_n(x) = [\varphi_n(0)]^{-1} \cdot [f_n(x) - f_n(-\infty)]\,, \quad x \in \mathscr{R}\,,$$

nous aurons $H_n \in \boldsymbol{D}$. Les fonctions caractéristiques correspondantes

$$\chi_n(t) = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}H_n(x) = \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_n(0)}$$

convergent (localement uniformément) vers $\varphi_0(t)/\varphi_0(0)$; la suite $\{H_n\}$ tend donc (voir [4], Theorem 3.6.2) vers une fonction limite $H_0 \in \boldsymbol{D}$ avec $\chi_0(t) = \varphi_0(t)/\varphi_0(0)$. Nous avons $H_0 = \operatorname{clim} H_n$ et, en écrivant

$$f_n(x) = f_n(-\infty) + \varphi_n(0)\, H_n(x) \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

nous voyons que $f_0 = \operatorname{clim} f_n$, cqfd.

Etant donné une suite $\{f_n\}$ de fonctions $f_n \in \boldsymbol{V}$, nous dirons qu'elle vérifie la condition (CF), lorsque, pour tout $\sigma \in \mathscr{R}^+$, on a ${}_F\|f_n - f_m\|_\sigma \to 0$ quand $\min(n, m) \to \to \infty$.

Théorème 1. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n \in \boldsymbol{Q}$ vérifiant la condition* (CF); *il existe alors une fonction $f_0 \in \boldsymbol{Q}^*$ telle que $f_0 = \operatorname{clim} f_n$.*

Démonstration. Nous allons commencer par démontrer notre théorème sous l'hypothèse supplémentaire de $f_n \in \boldsymbol{Q}_0$ pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$. Soit alors $\varphi_n(t) = = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}f_n(x)$; en vertu de notre lemme 1 il existe des constantes c_n et des fonctions $F_n \in \boldsymbol{M}_0$ telles que

$$\varphi_n(t) = \mathrm{i}c_n t + \int_{\mathscr{R}} w(t, x)\, \mathrm{d}F_n(x) \tag{10}$$

pour $t \in \mathscr{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Les fonctions $\chi_n(t) = \exp[\varphi_n(t)]$ sont les fonctions caractéristiques de certaines lois indéfiniment divisibles; soient H_n les fonctions de répartition correspondantes: $\chi_n(t) = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}H_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le fait que la suite $\{f_n\}$ vérifie la condition (CF) signifie que pour tout $\sigma \in \mathscr{R}^+$ on a

$$\sup_{|t| \leq 1/\sigma} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \to 0$$

lorsque $\min(m, n) \to \infty$. Cela entraîne la convergence localement uniforme des fonctions φ_n vers une fonction limite φ_0, elle-aussi continue en $t = 0$. La fonction $\chi_0(t) = \exp(\varphi_0(t))$ est la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible (cf. [4], Theorem 5.3.3) et pour la fonction de répartition correspondante H_0 nous avons $H_0 = \operatorname{clim} H_n$.

Il résulte alors d'un théorème bien connu (voir [4], p. 115, Lemme 5.5.2) que l'on a (10) pour $n = 0$ avec

$$(11) \qquad c_0 = \lim c_n\,, \quad F_0 = \operatorname{clim} F_n\,, \quad F_0 \in M_0\,.$$

Or, en posant

$$(12) \qquad \begin{aligned} f_0(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1 + u^2}{u^2}\, \mathrm{d}F_0(u) \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{R}^-\,, \\ &= -\int_{x}^{\infty} \frac{1 + u^2}{u^2}\, \mathrm{d}F_0(u) \quad \text{pour} \quad x \in \mathscr{R}^+\,, \end{aligned}$$

nous trouvons, en vertu de (10) et (11) que $f_0 = \operatorname{wlim} f_n$. Or (12) implique $f_0(-\infty) = 0 = f_0(+\infty)$, do sorte que $f_0 = \operatorname{clim} f_n$ également. On a $f_0 \in \hat{Q}$. Pour voir que $f_0 \in Q^*$, on considère l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{R}} \frac{x^2}{1 + x^2}\, \mathrm{d}f_0(x) &= \int_{\mathscr{R}^-} \frac{x^2}{1 + x^2}\, \mathrm{d}f_0(x) + \int_{\mathscr{R}^+} \frac{x^2}{1 + x^2}\, \mathrm{d}f_0(x) = \\ &= \int_{\mathscr{R}^-} \mathrm{d}F_0(x) + \int_{\mathscr{R}^+} \mathrm{d}F_0(x) < \infty\,, \end{aligned}$$

ce qui montre que f_0 vérifie (2). [La condition (1) détermine la valeur de $f_0(0)$ sauf le cas où $f_0(0-) = +\infty$, $f_0(0+) = -\infty$.]

Passons maintenant au cas général de $f_n \in Q$.

Si nous écrivons $a_n = f_n(-\infty)$, $b_n = f_n(+\infty) - f_n(-\infty) = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{d}f_n(x)$, et $d_n = f_n(+\infty) - f_n(0+) + f_n(0-) - f_n(-\infty) = \int_{\mathscr{R}^-} \mathrm{d}f_n(x) + \int_{\mathscr{R}^+} \mathrm{d}f_n(x)$, nous aurons toujours $d_n \geqq 0$ et, en définissant les fonctions G_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, par

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{1}{d_n}\,[f_n(x) - a_n + (d_n - b_n)\, E(x)] \quad \text{si} \quad d_n > 0\,, \\ &= E(x) \quad \text{si} \quad d_n = 0\,, \end{aligned}$$

nous aurons $G_n \in \boldsymbol{D}$ avec

$$(13) \qquad f_n = a_n + d_n(G_n - E) + b_n E\,,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne pour les fonctions caractéristiques $\gamma_n(t) = \int_{\mathscr{R}} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}G_n(x)$ l'égalité

$$(14) \qquad \varphi_n(t) = d_n[\gamma_n(t) - 1] + b_n\,.$$

Il en résulte l'inégalité

$$(15)\qquad |d_n[\gamma_n(t) - 1] - d_m[\gamma_m(t) - 1]| \leqq |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| + |b_n - b_m|$$

valable pour $t \in \mathscr{R}$, $n \geqq 1$, $m \geqq 1$.

La suite $\{f_n\}$ est supposée vérifier la condition (CF), d'après (4) nous avons pour tout $\sigma \in \mathscr{R}^+$

$$|a_n - a_m| \leqq {}_F\|f_n - f_m\|_\sigma$$

et

$$|b_n - b_m| = |\varphi_n(0) - \varphi_m(0)| \leqq {}_F\|f_n - f_m\|_\sigma ,$$

d'où il s'ensuit que les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent vers les limites correspondantes a_0 et b_0. En vertu de (15) il en résulte que la suite des fonctions $d_n(G_n - E) \in Q_0$ vérifie la condition (CF) et la première partie de notre démonstration permet de conclure à l'existence d'une fonction $g_0 \in Q^*$ telle que $g_0 = \operatorname{clim}_{n\to\infty} d_n(G_n - E)$. Il découle alors de (13) que la suite $\{f_n\}$ converge complèment vers la fonction f_0 définie par

$$f_0 = a_0 + g_0(x) + b_0\, E(x)\,, \quad x \in \mathscr{R}\,,$$

et que $f_0 \in Q^*$, cqfd.

Théorème 2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n \in Q$ vérifiant la condition* (CF). *Pour $y \in \mathscr{R}^+$, $j = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ posons*

$$M_n^{(j)}(y) = \int_{-y}^{+y} x^j \, \mathrm{d}f_n(x)\,.$$

Alors les deux suites $\{M_n^{(1)}\}$ et *$\{M_n^{(2)}\}$ convergent faiblement.*

Démonstration. D'après notre théorème 1 la suite $\{f_n\}$ converge complètement; soit $f_0 = \operatorname{clim} f_n$. Soit $y \in \mathscr{R}^+$ tel que f_0 soit continue aux points $-y$ et y.[2]) Alors la limite

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-y}^{+y} \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}f_n(x) = \psi(t, y)$$

existe, localement uniformément en $t \in \mathscr{R}$.

En effet, écrivons

$$\begin{aligned} b_n(x) &= f_n(x) && \text{pour} \quad x < -y\,,\\ &= f_n(-y) && \text{pour} \quad x > -y\,,\\ g_n(x) &= f_n(y) && \text{pour} \quad x < y\,,\\ &= f_n(x) && \text{pour} \quad x > y\,, \end{aligned}$$

[2]) Les fonctions f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ étant non-décroissantes dans $\mathscr{R}^-$ et dans $\mathscr{R}^+$, la convergence $f_n(\pm y) \to f_0(\pm y)$ est une conséquence de la convergence faicle de f_n vers f_0

$b_n(-y)$ et $g_n(y)$ étant déterminés par la condition (1) que les fonctions b_n et g_n sont supposées vérifier; $n = 1, 2, 3, \ldots$. Les transformées correspondantes sont

$$\beta_n(t) = \int_{\mathscr{R}} e^{itx}\, db_n(x) = \int_{-\infty}^{-y} e^{itx}\, df_n(x)\,,$$

$$\gamma_n(t) = \int_{\mathscr{R}} e^{itx}\, dg_n(x) = \int_{y}^{+\infty} e^{itx}\, df_n(x)\,.$$

Comme $f_n(-\infty) \to f_0(-\infty)$, $f_n(-y) \to f_0(-y)$, $f_n(y) \to f_0(y)$, $f_n(+\infty) \to f_0(+\infty)$, le théorème de Helly implique la convergence (localement uniforme) de $\beta_n(t)$ vers $\int_{-\infty}^{-y} e^{itx}\, df_0(x)$ et de $\gamma_n(t)$ vers $\int_y^{\infty} e^{itx}\, df_0(x)$. Comme par ailleurs les fonctions $\varphi_n(t) = \int_{\mathscr{R}} e^{itx}\, df_n(x)$ convergent vers une limite $\varphi_0(t)$, nous voyons que la limite (16) existe, localement uniforme en t.

Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ soient – cfr. (8) –

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1 + u^2}\, df_n(u)\,, \quad x \in \mathscr{R}\,;$$

on a $F_n \in M_0$ et $F_0 = \operatorname{clim} F_n$. Pour notre y nous avons alors d'une part

$$M_n^{(2)}(y) = \int_{-y}^{+y} x^2\, df_n(x) = \int_{-y}^{+y} (1 + x^2)\, dF_n(x) \to \int_{-y}^{+y} (1 + x^2)\, dF_0(x)\,,$$

d'autre part

$$M_n^{(1)}(y) = \int_{-y}^{+y} x\, df_n(x) = \int_{-y}^{+y} (x - \sin x + \sin x)\, df_n(x) =$$

$$= \int_{-y}^{+y} \frac{x - \sin x}{x^2} (1 + x^2)\, dF_n(x) + \frac{1}{2i} \int_{-y}^{+y} (e^{ix} - e^{-ix})\, df_n(x)\,.$$

Lorsque $n \to \infty$, la première intégrale converge vers

$$\int_{-y}^{+y} (x - \sin x)(1 + x^2)\, x^{-2}\, dF_0(x)\,,$$

la seconde vers $(1/2i)\,[\psi(1, y) - \psi(-1, y)]$. Comme ceci est vrai pour tout y tel que f_0 est continue aux points $-y$ et y, il en résulte que wlim $M_n^{(1)}$ et wlim $M_n^{(2)}$ existent, cqfd.[3])

En terminant il sera peut-être bon de souligner une fois de plus que la fonction f_0 peut ne pas appartenir à V de sorte que l'on n'est pas a priori autorisé à écrire wlim $M_n^{(j)} = M_0^{(j)}$ ou $\varphi_0(t) = \int_{\mathscr{R}} e^{itx}\, df_0(x)$.

[3]) La fonction f_0 est nondécroissante dans $\mathscr{R}^-$ et dans $\mathscr{R}^+$, elle ne peut donc avoir qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Références

[1] *H. Bergström:* Limit Theorems for Convolutions. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1963.
[2] *H. Bergström:* Weak Convergence of Measures. Academic Press, New York 1982.
[3] *F. J. Dyson:* Fourier transforms of distribution functions. Canadian Journal of Mathematics, *5* (1953), 554—558.
[4] *E. Lukacs:* Characteristic Functions. Griffin, London 1970.
[5] *J. Rataj:* Some remarks on Fourier seminorms. Časopis pěst. mat., *112* (1987), (to appear).
[6] *F. Zítek:* Sur quelques théorèmes limites pour les fonctions aléatoires. Časopis pěst. mat. *91* (1966), 453—462.
[7] *F. Zítek:* Sur la norme de Fourier. Časopis pěst. mat. *93* (1968), 349—353.
[8] *F. Zítek:* Sur la norme de Fourier, II. Časopis pěst. mat. *95* (1970), 62—65.

Souhrn

O FOURIEROVSKÉ NORMĚ, III

JAN RATAJ, FRANTIŠEK ZÍTEK

S použitím pojmu fourierovské seminormy se dokazují dvě věty o konvergenci posloupností funkcí s konečnou variací.

Резюме

О НОРМЕ ФУРЬЕ, III

JAN RATAJ, FRANTIŠEK ZÍTEK

Успользуя понятие семинормы Фурье, авторы доказывают две теоремы о сходимости последовательностей функций с конечной вариацией.

Adresse des auteurs: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.