Libuše Grygarová

O jednom důkazu principu duality v lineárním programování

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 110 (1985), No. 4, 378–383

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118254`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 110 (1985), Praha

O JEDNOM DŮKAZU PRINCIPU DUALITY V LINEÁRNÍM PROGRAMOVÁNÍ

LIBUŠE GRYGAROVÁ, Praha

(Došlo dne 16. února 1984)

Princip duality v lineárním programování je v literatuře dokazován různými způsoby. Pojem duální úlohy k úloze lineárního programování byl zaveden J. von Neumannem v r. 1947. Princip duality formulovali a dokázali D. Gale, H. W. Kuhn a A. W. Tucker v r. 1951 [3] pomocí Farkasova lemmatu, na jehož základě byly s různými obměnami podávány další důkazy uvedeného principu (např. [9], [6]). Další skupina důkazů se opírá o věty simplexové metody (např. [2], [1], [8]). Řada autorů vychází z Kuhn-Tuckerových podmínek z teorie konvexního programování a vět o oddělitelnosti konvexních množin (např. [4], [7]). Geometrické důkazy principu duality jsou uvedeny např. v [10], [5], [12].

V předloženém článku je podán stručný důkaz principu duality v lineárním programování založený na zcela elementárních poznatcích z konvexní analýzy (vlastnosti konvexních kuželů, viz např. [11]). Současně s důkazem principu duality se zde ukazuje, jak lze na základě znalosti optimálního řešení jedné z duálních úloh popsat množinu všech optimálních řešení druhé úlohy.

§ 1

Definice 1. *Je-li $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{E}_n$ konvexní kužel s vrcholem $\boldsymbol{x}^0$, potom kužel*

$$^{p}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^0) := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0) \leqq 0, \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}\}$$

nazýváme polárním kuželem ke kuželi $\boldsymbol{K}$ v jeho vrcholu $\boldsymbol{x}^0$.

Platí: 1) $^{p}(^{p}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^0)) = \overline{\boldsymbol{K}}$ (věta o bipolaritě);

2) Je-li $\boldsymbol{R} := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) = 0, \ \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}\}$ daná nadrovina v $\boldsymbol{E}_n$ a $\boldsymbol{H}^+ := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) > 0\}$, $\boldsymbol{H}^- := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) < 0\}$ jí příslušné poloprostory, potom platí

$\boldsymbol{K} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^- \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{c} \in {}^{p}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^0)$,

$\boldsymbol{K} \subset \overline{\boldsymbol{H}}^+ \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{c} \in {}^{p}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^0)$ (Farkasova věta).

Definice 2. *Je-li* $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$, $\mathbf{M} \neq \emptyset$, $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{E}_n$ *libovolný bod, potom kužel*

$$\mathbf{P}_M(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0),\ \mathbf{y} \in \mathbf{M},\ t \geqq 0\}$$

nazýváme projekčním kuželem množiny $\mathbf{M}$ *z bodu* $\mathbf{x}^0$.

Platí: Je-li $\mathbf{M}$ konvexní množina, potom $\mathbf{P}_M(\mathbf{x}^0)$ je rovněž konvexní množinou v $\mathbf{E}_n$.

§ 2

Definice 3. *Je-li* $\mathbf{M} \subset \mathbf{E}_n$, $\mathbf{M} \neq \emptyset$ *konvexní množina,* $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$ *libovolný bod, potom množinu* $\mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) := \bar{\mathbf{P}}_M(\mathbf{x}^0)$ *nazýváme styčným kuželem množiny* $\mathbf{M}$ *v jejím bodě* $\mathbf{x}^0$.

Platí: Je-li $\mathbf{M}$ konvexní polyedr v $\mathbf{E}_n$, potom $\bar{\mathbf{P}}_M(\mathbf{x}^0) = \mathbf{P}_M(\mathbf{x}^0) = \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$ pro každý bod $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$.

Lemma 1. *Nechť* $\mathbf{M}$ *je konvexní polyedr s popisem*

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leqq b_r\ (r = 1, \ldots, m)\}\,, \tag{1}$$

$\mathbf{x}^0 \in \mathbf{M}$ *libovolný bod a*

$$\mathbf{I} = \{r \in \{1, \ldots, m\} \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0) = b_r\}\,, \tag{2}$$

potom

$$\mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in E_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leqq b_r\ (r \in \mathbf{I})\}\,, \tag{3}$$

$$^p\mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_{r \in \mathbf{I}} \mathbf{a}_r u_r,\ u_r \geqq 0\ (r \in \mathbf{I})\}\,. \tag{4}$$

Důkaz. Pro libovolný bod $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$ existuje podle definic 2 a 3 bod $\mathbf{y}^* \in \mathbf{M}$ a $t^* \geqq 0$ tak, že $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + t^*(\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^0)$. Potom podle (1) a (2) je

$$(\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^*) = (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0) + t^*((\mathbf{a}_r, \mathbf{y}^*) - (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}^0)) \leqq b_r \quad (r \in \mathbf{I})\,,$$

tedy $\mathbf{x}^* \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leqq b_r\ (r \in \mathbf{I})\}$.

Uvažujme nyní libovolný bod $\mathbf{x}^* \in \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x}) \leqq b_r\ (r \in \mathbf{I})\}$. Je-li $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0$, potom $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$. Je-li $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^* \in \mathbf{M}$, potom $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0)$ a tedy opět $\mathbf{x}^* \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$. Je-li $\mathbf{x}^* \notin \mathbf{M}$, potom pro dostatečně malé $t^* > 0$ platí $\mathbf{y} := \mathbf{x}^0 + t^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^0) \in \mathbf{M}$, odkud plyne $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 + 1/t^*(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \in \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)$. Tím je vztah (3) dokázán.

Označme

$$\mathbf{K}^* := \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \sum_{r \in \mathbf{I}} \mathbf{a}_r u_r,\ u_r \geqq 0\ (r \in \mathbf{I})\}\,.$$

Snadno se ověří, že $\mathbf{K}^*$ je konvexní kužel s vrcholem $\mathbf{x}^0$ s vlastností $\mathbf{K}^* = \bar{\mathbf{K}}^*$. Podle definice 1, relací (2) a (3) platí

$$^p\mathbf{K}^*(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \sum_{r \in \mathbf{I}} u_r(\mathbf{a}_r, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leqq 0,\ u_r \geqq 0\ (r \in \mathbf{I})\} =$$

$$= \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid (\mathbf{a}_r, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leqq 0\ (r \in \mathbf{I})\} = \mathbf{K}_M(\mathbf{x}^0)\,.$$

Podle věty o bipolaritě je ${}^p({}^pK^*(\boldsymbol{x}^0)) = {}^pK_M(\boldsymbol{x}^0) = K^*$ a vztah (4) je dokázán.

Poznámka 1. Je-li $\boldsymbol{M}$ konvexní polyedr s popisem

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{x}) \leqq b_r \ (r = 1, \ldots, m),\ x_\alpha \geqq 0 \ (\alpha = 1, \ldots, n)\}, \tag{5}$$

$\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ libovolný bod a

$$\boldsymbol{I}_1 = \{r \in \{1, \ldots, m\} \mid (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{x}^0) = b_r\}, \quad \boldsymbol{I}_2 = \{\alpha \in \{1, \ldots, n\} \mid x^0_\alpha = 0\}, \tag{6}$$

potom z lemmatu 1 plyne, že

$$K_M(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{x}) \leqq b_r \ (r \in \boldsymbol{I}_1),\ x_\alpha \geqq 0 \ (\alpha \in \boldsymbol{I}_2)\}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} {}^pK_M(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid\ & x_\alpha = x^0_\alpha + \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r - v_\alpha \ (\alpha \in \boldsymbol{I}_2), \\ & x_\alpha = x^0_\alpha + \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r \ (\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus \boldsymbol{I}_2),\ u_r \geqq 0 \ (r \in \boldsymbol{I}_1), \\ & v_\alpha \geqq 0 \ (\alpha \in \boldsymbol{I}_2)\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Lemma 2. *Nechť $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}_n$ je libovolný konvexní polyedr a $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{E}_n$, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}$ libovolný bod. Bod $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ je optimálním řešením úlohy lineárního programování*

$$\max\{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}\}! \tag{9}$$

právě tehdy, je-li optimálním řešením úlohy

$$\max\{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in K_M(\boldsymbol{x}^0)\}!\,. \tag{10}$$

Důkaz. Podle definic 2 a 3 je $\boldsymbol{M} \subset K_M(\boldsymbol{x}^0)$, odkud plyne, že je-li $\boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{M}$ optimálním řešením úlohy (10), je též optimálním řešením úlohy (9). Naopak, je-li $\boldsymbol{x}^0$ optimálním řešením úlohy (9), platí $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \leqq 0$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$. Podle definic 2 a 3 je $\boldsymbol{x}^0 \in K_M(\boldsymbol{x}^0)$ a zvolíme-li $\boldsymbol{x}^* \in K_M(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{x}^0$ libovolně, potom existuje $\boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{M}$, $t^* > 0$ tak, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^0 + t^*(\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{x}^0)$. Odtud plyne $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{x}^0 + 1/t^*(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0)$, a protože $\boldsymbol{y}^* \in \boldsymbol{M}$, platí

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{x}^0) = (\boldsymbol{c}, 1/t^*(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0)) = 1/t^*(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0) \leqq 0 \Rightarrow (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0) \leqq 0\,.$$

Vzhledem k libovolnosti bodu $\boldsymbol{x}^* \in K_M(\boldsymbol{x}^0)$ dostáváme odtud, že bod $\boldsymbol{x}^0$ je optimálním řešením úlohy (10).

§ 3

Uvažujme úlohu lineárního programování

$$\max\{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}\}!, \quad (\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}), \tag{11}$$

kde $\boldsymbol{M}$ má význam z (5).

Věta 1. *Nechť $\boldsymbol{x}^0$ je optimální řešení úlohy (11). Potom existují čísla $u^0_r \geqq 0$ $(r = 1, \ldots, m)$ tak, že platí*

(12) $$c_\alpha \leqq \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^0 \quad (\alpha \in \boldsymbol{I}_2)\,, \qquad c_\alpha = \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^0 \quad (\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus \boldsymbol{I}_2)\,,$$

kde $\boldsymbol{I}_2$ má význam z (6).

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{x}^0$ optimální řešení úlohy (11), pak je podle lemmatu 2 též optimálním řešením úlohy (10) a tedy platí

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \leqq 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}_M(\boldsymbol{x}^0)\,.$$

Označíme-li

$$\bar{\boldsymbol{H}}^- := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \leqq 0\}\,,$$

potom můžeme psát $\boldsymbol{K}_M(\boldsymbol{x}^0) \subset \bar{\boldsymbol{H}}^-$. Podle Farkasovy věty (§ 1) platí pak $\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{c} \in$ $\in {}^P\boldsymbol{K}_M(\boldsymbol{x}^0)$. Vzhledem k poznámce 1, vztahu (8), existují proto čísla $u_r^0 \geqq 0$ $(r \in \boldsymbol{I}_1)$ [1], $v_\alpha^0 \geqq 0$ $(\alpha \in \boldsymbol{I}_2)$ tak, že

$$c_\alpha = \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^0 - v_\alpha^0 \quad (\alpha \in \boldsymbol{I}_2)\,, \qquad c_\alpha = \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^0 \quad (\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus \boldsymbol{I}_2)\,.$$

Definujeme-li ještě $u_r^0 = 0$ $(r \in \{1, \ldots, m\} \setminus \boldsymbol{I}_1)$, pak odtud plyne již (12).

Poznámka 2. Bod $\boldsymbol{u}^0 \in \boldsymbol{E}_m$ z věty 1 je zřejmě bodem množiny

(13) $$\boldsymbol{N} := \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{E}_m \mid (\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{u}) \geqq c_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, n),\ u_r \geqq 0\ (r = 1, \ldots, m)\}\,,$$

takže za předpokladu věty 1 je $\boldsymbol{N} \neq \emptyset$. Pro každý bod $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$ z (5) a $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N}$ z (13) platí pak zřejmě

(14) $$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \leqq \sum_{r=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha u_r \leqq (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})\,.$$

Věta 2. *Je-li úloha* (11) *řešitelná, pak je řešitelná též úloha lineárního programování*

(15) $$\min \{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N}\}!\,,$$

kde $\boldsymbol{N}$ má význam z (13), *přičemž pro každé optimální řešení $\boldsymbol{x}^0$ úlohy* (11) *a každé optimální řešení $\boldsymbol{u}^0$ úlohy* (15) *platí* $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^0) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^0)$.

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{x}^0$ je optimální řešení úlohy (11), potom podle věty 1 a jejího důkazu existují čísla $u_r^0 \geqq 0$ $(r \in \boldsymbol{I}_1)$, $u_r^0 = 0$ $(r \in \{1, \ldots, m\} \setminus \boldsymbol{I}_1)$, která vyhovují vztahům (12), přičemž $\boldsymbol{I}_1$ a $\boldsymbol{I}_2$ mají význam z (6). Podle (12) je dále

(16) $$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^0) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha^0 = \sum_{\alpha \notin I_2} c_\alpha x_\alpha^0 = \sum_{\alpha \notin I_2} \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^0 x_\alpha^0 =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^0 x_\alpha^0 = \sum_{r \in I_1} b_r u_r^0 = \sum_{r=1}^{m} b_r u_r^0 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^0)\,.$$

Podle poznámky 2 odtud plyne, že $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) \geqq (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^0)$ pro $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N}$ a tedy $\boldsymbol{u}^0$ je optimálním řešením úlohy (15).

---

[1]) $\boldsymbol{I}_1$ má význam z (6).

Pro libovolné optimální řešení x^* úlohy (11) a libovolné optimální řešení u^* úlohy (15) platí pak (vzhledem k (16))

$$(c, x^*) = (c, x^0) = (b, u^0) = (b, u^*),$$

čímž je věta dokázána.

Definice 4. *Úlohu lineárního programování* (15) *nazýváme duální úlohou k primární úloze* (11).

Důsledek 1. Je-li x^0 optimálním řešením úlohy (11) a I_1, I_2 mají význam z (6), potom každý bod $u^* \in N$, pro který platí

(17) $$u_r^* = 0 \quad (r \in \{1, \ldots, m\} \setminus I_1), \qquad \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* = c_\alpha \quad (\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus I_2)$$

je optimálním řešením úlohy (15).

Věta 3. *Je-li* x^0 *optimálním řešením úlohy* (11) *a* I_1, I_2 *mají význam z* (6), *potom pro množinu* N_{opt} *všech optimálních řešení úlohy* (15) *platí*

$$N_{opt} = \{u^* \in N \mid u_r^* = 0 \ (r \in \{1, \ldots, m\} \setminus I_1), \ \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* = c_\alpha \ (\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus I_2)\}.$$

Důkaz. Je-li $u^* \in N$ libovolným optimálním řešením úlohy (15), potom podle věty 2 a poznámky 2 platí

(18) $$(c\ x^0) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} x_\alpha^0 u_r^* = (b, u^*).$$

Kdyby alespoň pro jedno $r \in \{1, \ldots, m\} \setminus I_1$ bylo $u_r^* > 0$, potom by vzhledem k (6) platilo

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} x_\alpha^0 a_{r\alpha} u_r^* = \sum_{r \in I_1} u_r^* \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha^0 + \sum_{r \notin I_1} u_r^* \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha^0 < (b, u^*),$$

což je spor s (18).

Kdyby alespoň pro jedno $\alpha \in \{1, \ldots, n\} \setminus I_2$ platilo $\sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* > c_\alpha$, potom vzhledem k (6) bychom dostali

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} x_\alpha^0 u_r^* = \sum_{\alpha \notin I_2} \Big(\sum_{r=1}^{m} a_{r\alpha} u_r^* \Big) x_\alpha^0 = \sum_{\alpha \notin I_2} \sum_{r \in I_1} a_{r\alpha} u_r^* x_\alpha^0 > (c, x^0),$$

což je opět spor s (18). Bod u^* splňuje tedy vztahy (17). Odtud a z důsledku 1 věty 2 plyne již tvrzení.

Poznámka 3. Zcela analogickým způsobem se dá dokázat, že je-li u^0 optimálním řešením úlohy (15), přičemž

$$J_1 = \{\alpha \in \{1, \ldots, n\} \mid (a_\alpha, u^0) = c_\alpha\}, \ J_2 = \{r \in \{1, \ldots, m\} \mid u_r^0 = 0\},$$

potom pro množinu M_{opt} všech optimálních řešení úlohy (11) platí

$$M_{opt} = \{x^* \in M \mid x_\alpha^* = 0 \ (\alpha \in \{1 \ \ldots, n\} \setminus J_1), \ \sum_{\alpha \in J_1} a_{r\alpha} x_\alpha^* = b_r \ (r \in \{1, \ldots, m\} \setminus J_2)\}.$$

Věta 4. (*princip duality*). *Úlohy* (11) *a* (15) *jsou řešitelné právě tehdy, jestliže současně* $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{N} \neq \emptyset$. *Pro libovolné optimální řešení* $\mathbf{x}^0$ *úlohy* (11) *a libovolné optimální řešení* $\mathbf{u}^0$ *úlohy* (15) *platí* $(\mathbf{c}, \mathbf{x}^0) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}^0)$.

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{N} \neq \emptyset$. Podle poznámky 2 je lineární funkce $(\mathbf{c}, \mathbf{x})$ na množině $\boldsymbol{M}$ shora omezená a tedy úloha (11) je řešitelná. Analogicky je cílová funkce $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})$ na množině $\boldsymbol{N}$ zdola omezená a tedy úloha (15) je řešitelná.

Jsou-li úlohy (11) a (15) řešitelné, potom nutně $\boldsymbol{M} \neq \emptyset$, $\boldsymbol{N} \neq \emptyset$. Zbývající část tvrzení plyne z věty 2.

Literatura

[1] *L. Collatz, W. Wetterling:* Optimierungsaufgaben. Springer-Verlag Berlin 1971.

[2] *G. B. Dantzig:* Lineare Programmierung und Erweiterungen. Springer-Verlag Berlin 1966.

[3] *D. Gale, H. W. Kuhn, A. W. Tucker:* Linear programming and the theory of games. In T. C. Koopmans (Ed.): Activity analysis of production and allocation. New York 1951.

[4] *J. Havrda:* Matematické programování. SNTL Praha 1972.

[5] *D. B. Judin, E. G. Golstein:* Lineare Optimierung 1. Berlin 1968.

[6] *A. Laščiak a kol.:* Optimálne programovanie. Alfa Bratislava 1983.

[7] *D. G. Luenberger:* Introduction to linear and nonlinear programming. Addison-Wesley. Publishing Company 1973.

[8] *M. Maňas:* Optimalizační metody. SNTL Praha 1979.

[9] *F. Nožička, J. Guddat, H. Hollatz:* Theorie der linearen Optimierung. Akademie-Verlag Berlin 1972.

[10] *F. Nožička:* Ein geometrischer Beweis des Dualitätsprinzips in der linearen Optimierung. Math. Operationsforsch. u. Statist. *2* (1971) 1.

[11] *F. Nožička, L. Grygarová, K. Lommatzsch:* Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis. Akademie-Verlag Berlin 1985 (kniha je v tisku).

[12] *G. Š. Rubinštejn:* dodatek v knize: Линейные неравенства и смежные вопросы. Izdatelstvo inostrannoj literatury. Moskva 1959.

Author's address: 118 00 Praha 1, Malostranské n. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).