Hans-Jürgen Bandelt
Ein Axiomensystem für Baum-Algebren

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 108 (1983), No. 4, 353--355

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118182`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

EIN AXIOMENSYSTEM FÜR BAUM-ALGEBREN

HANS - J. BANDELT, Oldenburg

(Eingegangen 6. Dezember 1982)

In diesem Artikel will ich Theorem 2 von B. Zelinka [7], das die Unabhängigkeit eines gewissen Axiomensystems für Baum-Algebren postuliert, widerlegen.

Es ist spätestens seit den Arbeiten von S. P. Avann [1] und M. Sholander [5, 6] (vgl. [2]) bekannt, daß sich Bäume als bestimmte ternäre Algebren beschreiben lassen. So wird eine Menge mit einer ternären Operation $(u, v, w) \to (uvw)$ eine *Baum - Algebra* genannt, falls sie die Axiome

(I) $(uuv) = u$,

(II) $((uvx)\,wx) = ((wxv)\,ux)$,

(III) $(uvx), (uwx), (vwx)$ sind nicht alle verschieden

erfüllt. Angesichts eines Resultats aus [3] ist (I), (II), (III) mit dem Axiomensystem (M), (N), (O_1) aus [5] gleichwertig. Insbesondere können Baum - Algebren auch wie in [7] (bzw. [4]) definiert werden. Eine Baum - Algebra heißt *diskret*, wenn jedes *Segment*

$$u \circ v = \{x \mid (uvx) = x\} \quad (\alpha)$$

endlich ist. Es wird mit [7] Theorem 12 festgestellt, daß genau die diskreten Baum - Algebren den (graphentheoretischen) Bäumen entsprechen. Dies ist in der Tat richtig – ergibt es sich doch schon aus [1] und [5, 6]. Beliebige Baum - Algebren lassen sich in vielfältiger Weise durch ihre Segmente charakterisieren. Genügt beispielsweise eine mengenwertige Funktion $\circ$ den Axiomen (S), (T), (U_1) aus [5], so wird vermöge

$$\{(uvw)\} = u \circ v \cap u \circ w \cap v \circ w \quad (\beta)$$

eine Baum - Algebra definiert. Ganz ähnlich lassen sich Baum - Algebren durch drei Bedingungen kennzeichnen, die in [7] Theorem 1 enthalten sind:

Satz. *Wenn je zwei Elementen x und y einer Menge eine Teilmenge $x \circ y$ zugeordnet wird, so daß die drei Axiome*

$$(1) \qquad u \circ v \cap u \circ w \cap v \circ w \neq \emptyset\,,$$

$$(2) \qquad w \in u \circ v \Rightarrow u \circ w \cup v \circ w = u \circ v\,,$$

$$(3) \qquad u \circ v = u \circ w \Rightarrow v = w$$

gelten, dann ist vermöge der Gleichung (β) *eine Baum - Algebra erklärt. Umgekehrt genügen die gemäß* (α) *definierten Segmente einer Baum - Algebra den Axiomen* (1), (2), (3).

Beweis. Es seien die Axiome (1), (2), (3) gültig. Das erste Axiom garantiert die Existenz eines Elements x in $u \circ u$, das zweite liefert dann die Gleichung $u \circ x = u \circ x \cup u \circ x = u \circ u$ und das dritte läßt dabei nur den Schluß auf $u = x$ zu, womit

$$u \circ u = \{u\} \tag{4}$$

bewiesen ist. Aus dem ersten Axiom folgt $u \circ v \cap u \circ u \cap v \circ u \neq \emptyset$ und damit aus (4) die Beziehung $u \in u \circ v \cap v \circ u$, d.h.

$$u, v \in u \circ v\,. \tag{5}$$

Daher ist angesichts des zweiten Axioms und der Gleichung (4) auch $u \circ v = u \circ u \cup v \circ u = \{u\} \cup v \circ u$ wahr. Somit ist wegen (5) sofort

$$u \circ v = v \circ u \tag{6}$$

als richtig erkannt. Für das weitere nehme man an, daß $w \in u \circ v$ gelte. Dann gehört w wegen (5) auch zu $u \circ w \cap v \circ w$. Jedes Element x in diesem Durchschnitt liegt in $u \circ v$, da ja mit (2) erst recht

$$w \in u \circ v \Rightarrow u \circ w \subseteq u \circ v \tag{7}$$

gilt. Ebenfalls wegen (2) ergibt sich weiter $u \circ v = u \circ x \cup v \circ x$. Folglich enthält entweder $u \circ x$ oder $v \circ x$ das Element w — also sei etwa $w \in u \circ x$. Dies bedeutet, daß $u \circ w$ in $u \circ x$ enthalten ist. Weil aber $x \in u \circ w$ vorausgesetzt war, ist auch die umgekehrte Inklusion richtig, d.h. $u \circ w = u \circ x$. Mit (3) folgt $w = x$ und alsdann

$$w \in u \circ v \Rightarrow u \circ w \cap v \circ w = \{w\}\,. \tag{8}$$

Für beliebige Elemente u, v, w und $x \in u \circ v \cap u \circ w \cap v \circ w$ errechnet man (wie in [7]) mit Hilfe der Implikationen (2) und (8)

$$\begin{aligned} &u \circ v \cap u \circ w \cap v \circ w = \\ &= (u \circ x \cup v \circ x) \cap (u \circ x \cup w \circ x) \cap (v \circ x \cup w \circ x) = \\ &= (u \circ x \cap v \circ x) \cup (u \circ x \cap w \circ x) \cup (v \circ x \cap w \circ x) = \{x\}\,. \end{aligned}$$

Daher läßt sich das erste Axiom hier verschärfen zu der Forderung

(9) $\quad u \circ v \cap u \circ w \cap v \circ w$ enthält genau ein Element.

Da nun (4), (6), (7), (9) gelten, sind aufgrund von (4.11) aus [6] auch die Axiome (S) und (T) aus [5] hier erfüllt. Schließlich ziehen (1), (2), (6) das Axiom (U_1) aus [5] nach sich. Damit ist gezeigt, daß (1), (2), (3) Sholanders Axiomensystem für Baum-Algebren impliziert. Die Umkehrung folgt leicht aus den Ergebnissen in [5] und der nachstehenden Bemerkung. □

Man beachte, daß (1), (2), (3) zu (1), (2), (4), (8) äquivalent ist. In der Tat folgt aus den letzteren Axiomen, daß (5) und (6) gelten (vgl. den ersten Teil des obigen Beweises) und daher $u \circ v = u \circ w$ die Gleichungen $\{v\} = u \circ v \cap v \circ w = u \circ w \cap \cap v \circ w = \{w\}$ liefert.

Als Korollar des Satzes erhält man [7] Theorem 1, in dem Baum-Algebren durch die Bedingungen (1), (2), (6), (8) und

$$u \circ v = x \circ y \Rightarrow \{u, v\} = \{x, y\} \tag{10}$$

gekennzeichnet werden. In jener Charakterisierung sind also (6) und (8) schlichtweg überflüssig! Dagegen sind die Axiome (1), (2), (3) voneinander unabhängig, wie sich sofort auf einer vierelementigen Menge einsehen läßt.

Zitate

[1] *S. P. Avann:* Metric ternary distributive semi-lattices. Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 407—414.

[2] *H. J. Bandelt, J. Hedlíková:* Median algebras. Discrete Math. *45* (1983), 1—30.

[3] *M. Kolibiar, T. Marcisová:* On a question of J. Hashimoto. Mat. Časopis *24* (1974), 179—185.

[4] *L. Nebeský:* Algebraic properties of trees. Acta Univ. Carolinae, Philologica Monographia *25*, Praha 1969.

[5] *M. Sholander:* Trees, lattices, order, and betweenness. Proc. Amer. Math. Soc. *3* (1952), 369—381.

[6] *M. Sholander:* Medians and betweenness. Proc. Amer. Math. Soc. *5* (1954), 801—807.

[7] *B. Zelinka:* Infinite tree algebras, Čas. Pěst. Mat. *107* (1982), 59—68.

Adresse des Autors: Fachbereich 6 der Carl-von-Ossietzky-Universität in 2900 Oldenburg, BRD.