Leo Boček
Eine Verschärfung der Poincaré-Ungleichung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 108 (1983), No. 1, 78--81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118160

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 108 (1983), Praha

EINE VERSCHÄRFUNG DER POINCARÉ-UNGLEICHUNG

LEO BOČEK, Praha

(Eingegangen am 20. November 1981)

Ist f eine periodische Funktion mit der Periode 2π, für die $\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ gilt und existiert das Integral $\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t$, so ist

$$\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t \geqq \int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $f(t) = a\cos t + b\sin t$ ist, (a und b konstant). Die Ungleichung (1) ist als die Ungleichung von Wirtinger bekannt, s. W. Blaschke [1]. Die Verallgemeinerung, die sog. Poincaré-Ungleichung, die eng mit der mathematischen Theorie von Membranen und den Eigenwerten des zweiten Operators von Laplace zusammenhängt (s. [2], [3], [4]), behauptet das folgende: Ist f eine Funktion auf der n-dimensionalen Einheitssphäre S^n, für die $\int_{S^n} f\,\mathrm{d}\omega^n = 0$ gilt ($\mathrm{d}\omega^n$ ist die Form der Oberfläche von S^n) und existiert das Integral $\int_{S^n} \|\operatorname{grad} f\|^2\,\mathrm{d}\omega^n$, dann gilt die Ungleichung

$$\int_{S^n} \|\operatorname{grad} f\|^2\,\mathrm{d}\omega^n \geqq n \int_{S^n} f^2\,\mathrm{d}\omega^n\,. \tag{2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in diesem Fall genau dann, wenn $f = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i$ ist, wo a_i konstant und x_i kartesische Koordinaten im euklidischen Raum E^{n+1} sind und S^n ist in E^{n+1} eingebettet, wobei der Mittelpunkt der Sphäre mit dem Nullpunkt zusammenfällt.

Z. Nádeník leitete in der Arbeit [5] eine Verschärfung der Ungleichung (1) ab. Er zeigte, daß unter denselben Voraussetzungen, die wir bei der Wirtingerschen Ungleichung angegeben haben, die verschärfte Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t \geqq \int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}\,[f(0) + f(\pi)]^2 \tag{3}$$

gilt. Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn $f(t) = a\cos t + b\sin t + c(|\sin t| - 2/\pi)$ für beliebige Konstanten a, b, c gilt. Wir beweisen jetzt eine Verschärfung der Poincaréschen Ungleichung (2), die gleichzeitig eine Verallgemeinerung von (3) ist.

Es sei f eine reelle Funktion auf der n-dimensionalen Sphäre S^n in E^{n+1}, die durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ gegeben ist. Es sei weiter S^{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre auf S^n, die durch die Gleichung $x_{n+1} = 0$ charakterisiert ist. Jeder Punkt der Sphäre S^n ist durch den Ortsvektor $p = u \cos \varphi + e \sin \varphi$ gegeben, wo u der Ortsvektor eines Punktes aus S^{n-1} ist, $e = (0, \ldots, 0, 1)$ und $\varphi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Mit Ausnahme der Punkten mit den Ortsvektoren e, $-e$ bestimmt jeder Punkt aus S^n in beschriebener Weise eindeutig den Ortsvektor u und den Wert φ. Es gilt

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{d}\omega^n = \cos^{n-1} \varphi \, \mathrm{d}\omega^{n-1} \wedge \mathrm{d}\varphi \,,$$

$$\omega^n = \omega^{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1} \varphi \, \mathrm{d}\varphi \,,$$

wo ω^n die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet. Weiter gilt

$$\int_{S^n} |x_{n+1}| \, \mathrm{d}\omega^n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin \varphi| \cos^{n-1} \varphi \, \mathrm{d}\varphi \,.\, \omega^{n-1} = \frac{2}{n} \, \omega^{n-1} \,.$$

Wir setzen $\int_{S^n} f \, \mathrm{d}\omega^n = 0$ und die Existenz des Integrals $\int_{S^n} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, \mathrm{d}\omega^n$ voraus. Betrachten wir jetzt auf S^n die Funktion

$$g = f + k\left(|x_{n+1}| - \frac{2\omega^{n-1}}{n\omega^n}\right), \quad k = \text{konst.}$$

Es gilt $\int_{S^n} g \, \mathrm{d}\omega^n = 0$ und $\mathrm{grad}\, g = \mathrm{grad}\, f + k \, \mathrm{grad}\, |x_{n+1}|$ in allen Punkten aus $S^n - S^{n-1}$. Eine ausführlichere Berechnung der Vektorfelder $\mathrm{grad}\, f$ und $\mathrm{grad}\, (\sin \varphi)$ führt zu den Ergebnissen

$$\|\mathrm{grad}\, (\sin \varphi)\|^2 = \cos^2 \varphi \,; \quad \mathrm{grad}\, f \,.\, \mathrm{grad}\, (\sin \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi \,,$$

deshalb ist

$$\|\mathrm{grad}\, g\|^2 = \|\mathrm{grad}\, f\|^2 + k^2 \cos^2 \varphi \pm 2k \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi \,,$$

wo das Vorzeichen + in der oberen Halbsphäre $S^n_+ (x_{n+1} > 0)$ und das Vorzeichen − in der unteren Halbsphäre $S^n_- (x_{n+1} < 0)$ gilt. Wir schreiben jetzt die Poincaré-Ungleichung für die Funktion g auf. Es gilt also

$$\int_{S^n} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, \mathrm{d}\omega^n + k^2 \int_{S^n} \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}\omega^n + 2k \int_{S^n_+} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi \, \mathrm{d}\omega^n -$$

$$- 2k \int_{S^n_-} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cos \varphi \, \mathrm{d}\omega^n \geqq n \left[\int_{S^n} f^2 \, \mathrm{d}\omega^n + k^2 \int_{S^n} \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\omega^n \right] +$$

$$+ 2kn\left[\int_{S_+^n} f \sin\varphi \, d\omega^n - \int_{S_-^n} f \sin\varphi \, d\omega^n\right] + \frac{4k^2(\omega^{n-1})^2}{n\omega^n} -$$

$$- k^2 \frac{4\omega^{n-1}}{\omega^n}\left[\int_{S_+^n} \sin\varphi \, d\omega^n - \int_{S_-^n} \sin\varphi \, d\omega^n\right].$$

Durch Anwendung der Beziehungen (4) bekommen wir durch partielle Integration

$$\int_{S^n} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, d\omega^n \geqq n \int_{S^n} f^2 \, d\omega^n + 4k \int_{S^{n-1}} f \, d\omega^{n-1} - \frac{4k^2(\omega^{n-1})^2}{n\omega^n}.$$

Setzen wir

$$k = \frac{n\omega^n}{2(\omega^{n-1})^2} \int_{S^{n-1}} f \, d\omega^{n-1},$$

so bekommen wir das Hauptergebnis, die Verschärfung der Poincaré-Ungleichung:

$$(5) \qquad \frac{1}{\omega^n} \int_{S^n} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, d\omega^n \geqq n\left[\frac{1}{\omega^n} \int_{S^n} f^2 \, d\omega^n + \left(\frac{1}{\omega^{n-1}} \int_{S^{n-1}} f \, d\omega^{n-1}\right)^2\right].$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (5) genau dann, wenn $g = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i$ ist, also

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i + c\left(|x_{n+1}| - \frac{2\omega^{n-1}}{n\omega^n}\right)$$

ist, wo a_i und c konstant sind.

Im Fall $n = 2$ hat die Ungleichung (5) die Form

$$(6) \qquad \int_{S^2} \|\mathrm{grad}\, f\|^2 \, d\omega^2 \geqq 2 \int_{S^2} f^2 \, d\omega^2 + \frac{2}{\pi}\left(\int_{S^1} f \, d\omega^1\right)^2.$$

Ist h die Stützfunktion einer konvexen Fläche in E^3, so ist

$$M = \int_{S^2} h \, d\omega^2 \quad \text{und} \quad P = \int_{S^2} (h^2 - \tfrac{1}{2}\|\mathrm{grad}\, h\|^2) \, d\omega^2$$

das Integral der mittleren Krümmung und die Oberfläche dieser Fläche. Setzen wir in (6) $f = h - M/\omega^2$, so bekommen wir die Ungleichung

$$0 \geqq u^2 - Mu + \pi P \quad \text{mit} \quad u = \int_{S^1} h \, d\omega^1.$$

Handelt es sich um eine Rotationsfläche (Drehachse ist die x_3-Achse), geht die letzte Ungleichung in die Ungleichung

$$0 \geqq 4\pi a^2 - 2aM + P$$

über, die H. Hadwiger in [6] bewiesen hat (a bezeichnet den Radius des Äquators).

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, Berlin 1956.

[2] *R. Osserman:* The isoperimetric Inequality. BAMS 84 (1978), 1182—1238.

[3] *I. Chavel, E. A. Feldman:* An optimal Poincaré inequality for convex domains of non-negative curvature. Arch. Rational Mech. Anal. *65* (1977), 263—273.

[4] *O. Kowalski:* O geometrii laplasiánu I, II. Pokroky matem., fyz. a astron. *26* (1981), 23—41, 69—81.

[5] *Z. Nádeník:* Die Verschärfung einer Ungleichung von Frobenius für den gemischten Flächeninhalt der konvexen ebenen Bereiche. Časopis pro pěst. matem. *90* (1965), 220—255.

[6] *H. Hadwiger:* Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Maßzahlen bei konvexen Rotationskörpern. Monatshefte für Mathem. *56* (1952), 220—228.

Anschrift des Verfassers: 186 00 Praha 8, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).